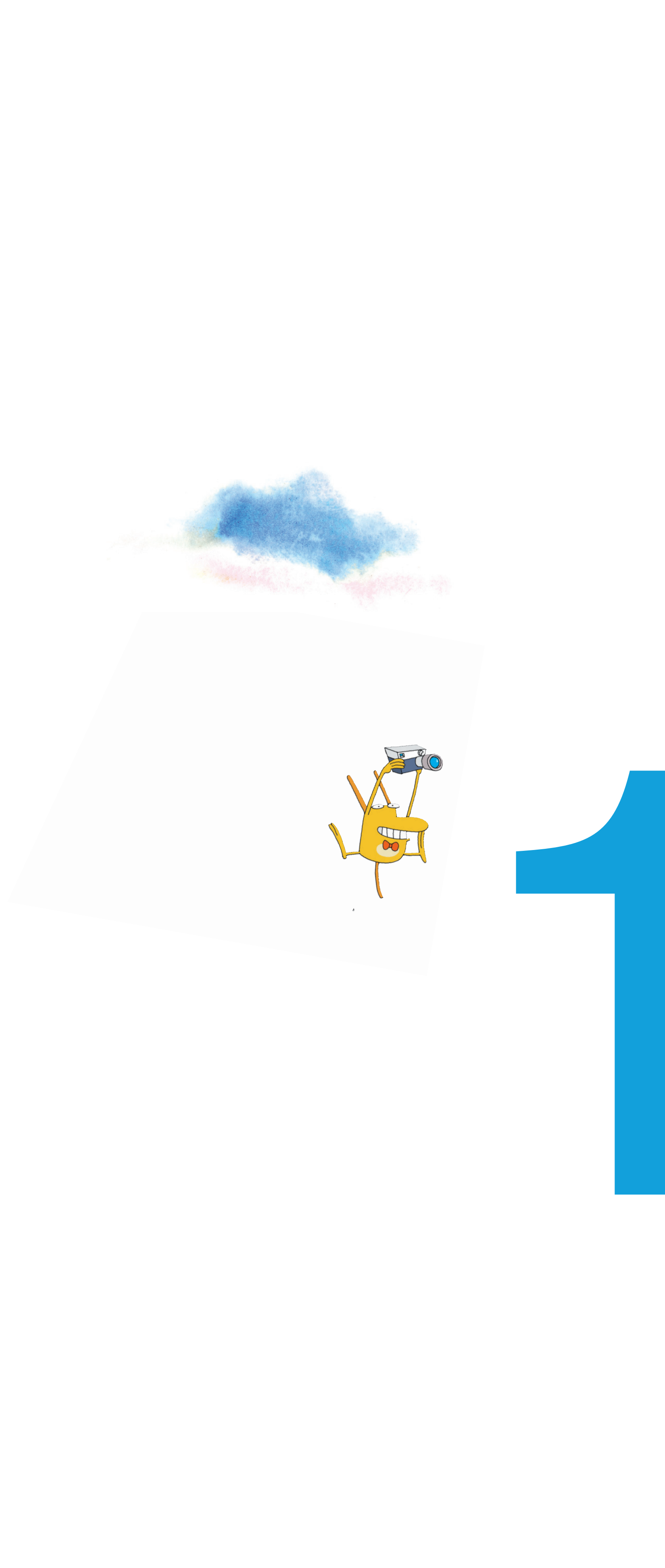


1st part ›››

총론

Ⅰ. 수학 교육의 목적

오늘날의 수학 교육을 지탱하는 사상적 기반은 유클리드(Euclid ; ? B.C. 325～? B.C. 265)의 학문지상주의(acade-micism), 헤론(Heron ; ? 10 ～? 75)의 현실주의(realism), 페스탈로치(Pestalozzi, J. H. ; 1746～1827)의 인본주의(humanism)로 볼 수 있다.

유클리드는 '원론' 13권을 집대성하여 이론 수학을 정립함으로써 지금도 학교 수학에서 그 내용을 다루고 있을 만큼 굳건한 학문의 토대를 마련하였다. 그러나 유클리드가 혼자의 힘으로 이론 수학을 정립한 것은 아니며, 그 이전의 많은 수학자들의 업적을 집대성한 것이다.

수학은 학문으로서의 이론적 토대가 정립되기 이전에 필시 실용적 목적에 의한 탐구가 선행되었던 것임에 분명하다. 이러한 점에서 헤론은 '실용 수학' 의 선구자라고 할 수 있다. 헤론의 실용 수학을 유클리드의 학문과 같은 위치에 서게 한 것은 20세기 초의 수학 교육 개량 운동이었다. 증명뿐만 아니라 실험 · 실측의 도입과 더불어 수학의 실용성을 중시하려고 한 것이다.

이러한 관점에서 독일의 수학 교육 개량 운동가였던 클라인(Klein, C. F. ; 1849～1925)의 협력자 트로이틀라인(Treutlein, P. ; 1845～1912)의 직관 기하의 창설은 큰 공적이며, 오늘날까지 초 · 중등 학교의 도형 단원의 지도에 있어서 큰 영향을 미치고 있다.

한편, 페스탈로치는 수학에 조예가 깊지는 않았지만 인간의 마음 속에서 수학을 본 사람이라고 할 수 있다. 즉, 수학 교육은 아동의 밖에 있는 수학을 아동의 머릿속에 주입하는 것이 아니라, 아동이 본래 가지고 있는 힘에 의해 수학을 만들어 내게 하는 것이 그의 교육 방법의 기본적인 생각이며, 이것이 오늘날의 활동주의적 수학 교육관의 출발점이라고 볼 수 있다.

1. 수학 교육의 목적

수학 교육의 목적은 일반적인 교육 목적의 기본 관점을 중심으로 수학의 실용적 가치의 구현, 문화적 · 교양적 가치의 함양, 도야적 가치의 구현, 창의적 활동의 실천 등의 기본적인 관점을 토대로 언급할 수 있다. 또한, 수학의 특성에서 도출할 수 있는 기초성 · 유용성, 추상성 · 일반성, 기호성 · 형식성, 논리성 · 계통성, 심미성 · 과학성 등을 토대로 구체적인 목표를 설정할 수도 있다. 한편, 문화적 관점에서의 수학 문화의 가치를 이념적 차원에서의 합리성과 객관성, 정서적 차원에서의 통제성과 진보성, 사회학적인 차원에서의 개방성과 신비성 등으로 논할 수도 있다. 그러나 수학 교육은 수학적 사고력과 창의력의 육성을 그 주요한 목적으로 삼는다고 보아도 과언이 아니다.

01 일반적인 교육 목적에 대응하는 수학 교육의 목적

수학의 지도는 교육 활동의 일환으로서 타 교과의 지도에서도 생각할 수 있는 일반적인 교육적 관점이 바탕이 된다. 일반적으로, '교육의 목적' 을 생각할 경우 다음과 같은 관점이 중시되고 있다.

가. 인간이 사회의 한 구성원으로서 생활을 실천하는 데 필요한 능력을 갖도록 젊은 세대를 기르는 일
　⬅ 실용적 목적

나. 선조들의 문화 유산은 생활의 실천에서 활용될 뿐만 아니라, 그것 자체가 또한 중요한 가치를 지니는 것이므로 이것들이 다음 세대로 전승되도록 하는 일
　⬅ 문화적 · 교양적 목적

다. 인간이 본래 가지고 있는 여러 가지 능력을 끄집어 내어 갈고 닦는 일 ⬅ 도야적 목적

라. 창의적인 실천 활동을 할 수 있고, 거기에서 아름다움과 즐거움을 찾을 수 있도록 하는 일
　⬅ 창의적 목적

이와 같은 일반적인 교육의 목적에 대응하여, 수학 교육

에서는 다음과 같이 구체적인 목적을 설정할 수 있다.

(1) 수학의 실용적 가치의 구현

수학 교육에서는 일상생활에 필요한 수학적 지식이나 기능을 습득시키는 것을 목적으로 한다. 고대 수학의 발생 자체가 인류 생활의 필요에서 이룩된 것이므로 실용성을 목적으로 삼는 것은 당연한 것이다. 물론 실용성은 개인의 생활 수준이나 직업 등에 따라 다양한 성격을 지니게 되며 내용도 복잡하게 된다.

또한 일상적으로 필요한 지식, 기능이라도 단순히 형식적인 테두리에서 머물지 않고, 수량적인 사고를 할 수 있는 아이디어나 개념을 잘 쓸 수 있도록 해야 한다.

(2) 문화적 · 교양적 가치의 함양

인류는 역사상 과학, 기술, 문학, 예술 등 많은 문화를 창조하여 왔다. 이들은 모두 빛나는 문화적 가치를 지니고 있으며, 인류는 이의 전승 및 발전에 기여해야 한다.

수학도 독특한 문화적 가치를 지닌 학문이다. 유클리드 기하학은 문화적 가치로 인하여 고대에서 근세에 이르기까지 인류에 의해 전승되어 온 것이다. 여기서 우리들이 유념할 것은 수학은 결코 특수한 사람에게만 필요한 것이 아니고, 수학 교육도 훌륭한 수학자를 양산하는 데 목적이 있는 것이 아니라는 점이다. 수학 교육에서는 수학의 필요성을 알고, 즐겁고 재미있는 학습을 통하여 수학의 문화적 · 교양적 가치를 많은 아동들이 알 수 있도록 하는 것이 중요한 일이다.

(3) 도야적 가치의 구현

수학의 학습에서는 그 학습 과정이나 학습의 결과 어떤 정신적인 습관이 형성된다든가 어떤 성격의 능력이 육성된다든가 하는 직접적인 것은 아니지만, 어느 정도 밀접한 관련을 가진 정신적인 가능성이 기대된다. 즉, 논리적으로 사고하는 능력, 형식화하는 능력 등의 전이를 기대하게 된다. 이와 같은 수학 학습의 결과는 형식으로 정착하고, 이 형식은 다른 학습에 파급되기를 바라고 있다.

(4) 창의적 활동의 실천

인간으로서의 보람과 즐거움은 문화의 수용과 함께 어떤 형태로든 문화 활동에 참가하며, 더욱이 새로운 것을 만들어 내는 능력을 발휘할 수 있다는 것이다. 새로운 수학적 지식을 만들어 낸다는 것은 극히 어려운 일이며 학습도 어떤 표준적인 하나의 흐름에 따라서 진행되는 경우가 많지만, 그러한 경우에서도 아동 개개인의 이해의 방법이나 문제를 음미하는 방법 등은 모두 개성적인 것이다.

실제 학습에서 아동들이 다양한 사고 활동을 하고 있는 모습은, 곧 아동의 상상력이나 유연성의 표출이며 창의적 활동을 실천하는 일로 간주된다. 우리는 과정으로서, 그리고 창의적 활동으로서의 수학 학습을 통하여 아동의 창의력을 고무시키는 방향을 모색하여야 한다. 또한 문제해결의 즐거움과 보람을 가지며, 수학의 힘을 자각할 수 있도록 지도하여야 할 것이다.

02 수학의 특성에서 도출되는 수학 교육의 목표

수학은 가장 순수하고 엄밀한 지적 활동으로 과학의 여왕이라고들 한다. 그러나 평범한 사람들에게는 수학이 개인적인 게임이거나 불확실하고 가치 없는 기호들의 조작 정도로 보일 수 있다. 1989년 루카스(Lucas, J. F.)는 수학에 대한 보통의 이야기들을 다음과 같이 다섯 가지로 열거하고 있다.

가. 수학은 기억해야 할 고립된 사실들과 기법들의 모임이다.
나. 수학적 진리는 절대적이다.
다. 수학은 정확한 과학이다.
라. 수학은 주로 기호적 표상과 조직을 취급하므로, 보통의 쓰기와 말하기 기능들은 수학의 의사소통에 필요하지 않다.
마. 수학은 누군가가 외롭게 수행하는 것이다.

수학이 무엇인가에 대한 이와 같은 고정 관념을 없애려면 수학을 가르치는 방법을 바꾸어야 한다. 우리는 수학을 우리 문화의 통합적인 부분이자 중요한 원동력으로 보고 이를 학생들에게 가르쳐야 한다. 1993년 네스(Ness, H.)는 수학을 다음과 같이 기술하고 있다.

"인간 세상의 질서를 추구하려는 인간의 원초적 충동으로 탄생되었으므로, 수학은 구조와 패턴의 연구를 위하여 영원히 발전하는 언어이다. 물리적 실체에 근거를 두고 거듭 새로워지므로, 수학은 지적 호기심에서 발원하여 예기치 않은 아름답고도 유용한 연결성과 패턴들이 출현하는 추상화와 일반화의 수준으로 발전한다. 수학은 추상적 사고뿐만 아니라 자연 법칙의 보금자리이다. 수학은 순수한 논리이자 창의적인 예술이다."

이러한 수학의 특성은 기초성 · 유용성, 추상성 · 일반성, 기호성 · 형식성, 논리성 · 계통성, 심미성 · 과학성 등으로 요약할 수 있으며, 이들 특성으로부터 다음과 같은 수학 교육의 목표를 도출할 수 있다.

(1) 기초성 · 유용성에서 도출되는 목표

수학은 일상생활을 비롯하여 다른 여러 교과의 기초적 역할을 담당하게 되므로 그 유용성이 매우 높다. 여기서 말하는 유용성은 수학을 이용하는 사람에게 처한 사회적 환경에 따라 수학이 많은 다양성을 지닌다는 것이다. 일반적으로, 기초성과 유용성에서 도출되는 목표는 다음과 같다.

① 일상생활에 필요한 지식 · 기능의 양성
② 수학 연구를 비롯하여 타 교과의 이해에 필요한 지식 · 기능의 양성
③ 직장이나 전문적 분야에서 쓰이는 지식의 습득
④ 일상생활에서 직면하는 여러 가지 문제해결 능력의 증진

(2) 추상성 · 일반성에서 도출되는 목표

수학의 본질은 그 추상성에 있으며 수학의 학습은 추상화하는 활동이 중심이 된다. 수와 식, 도형 등은 그것이 추상적인 개념으로 취급되기 때문에 단순화되어 있고, 법칙이 발견되며, 논리적으로 다룰 수가 있는 것이다. 추상화에 의하여 구축된 수학은 객관적 · 보편적인 것이므로 광범위하게 구체적인 장에서 활용할 수 있다. 일반적으로, 추상성과 일반성에서 도출되는 목표는 다음과 같다.

① 구체적 활동이나 조작에 의한 추상화된 개념의 형성과 일반적 원리의 이해
② 자연 현상의 일반적인 원리를 도출하는 능력의 양성
③ 사회 현상을 해석할 수 있는 패러다임의 구성 능력 양성

(3) 기호성 · 형식성에서 도출되는 목표

수학은 추상 작용에 의해 얻어진 개념이나 원리를 기호화하고, 기호에 따라 사고를 이끌어 간다. 그 기호는 사실을 객관적으로 나타낼 수 있으며, 타인에게 정확하게 전달하는 역할을 수행할 수 있다. 수학적 언어는 매우 형식화되어 있는 것이 특징으로 형식적인 취급이 허용되며, 형식적인 논리를 전개할 수 있다. 일반적으로, 기호성과 형식성에서 도출되는 목표는 다음과 같다.

① 함축성이 큰 언어 체계로서의 수학 기호와 개념의 관계적 이해력 증진
② 활동적 표상, 영상적 표상, 기호적 표상 등 다양한 수학적 의사소통 능력의 향상
③ 객관성과 경제성을 가진 수학 언어의 가치 인식

(4) 논리성 · 계통성에서 도출되는 목표

수학은 논리성과 체계성에 있어서 뛰어난 특징을 지니고 있다. 수학에서는 귀납이나 유추에 의해서 얻어진 사실이라도 그것이 참임을 연역적으로 확인하고, 다시 그것을 체계적으로 정리해 가고 있다. 수학은 논리에 의하여 누적된 하나의 유기적 · 계통적인 학문이라고 할 수 있다.

일반적으로, 논리성과 계통성에서 도출되는 목표는 다음과 같다.

① 규칙성의 인식과 가설 설정을 위한 귀납적 추론 능력의 증진

② 합리성에 의한 타당한 논증을 위한 연역적 추론 능력의 증진

③ 수학의 공리적 성질의 이해와 이를 토대로 한 논리의 전개 능력 증진

(5) 심미성 · 과학성에서 도출되는 목표

수학을 탐구하는 사람들은 그 아름다움의 본질에 매료되는 경험을 한다. 고대의 건축물이나 생활용품 등에서의 심미성 추구를 위한 황금비의 구현이나 정다면체를 포함한 기하학적 도형에 대한 탐구 등이 그 예이다.

한편, 과학은 모든 사물 간에 존재하는 법칙을 정립하는 것을 생명으로 하며, 그 방법으로써 귀납과 연역이 쓰인다. 수학도 다른 과학과 마찬가지로 합리성과 실증성, 귀납과 연역, 분석과 종합 등에 의하여 연구가 진행된다.

수학을 학습함에 있어서는 이 심미성과 과학성을 소중히 여기는 학습이 필요하다. 일반적으로, 심미성과 과학성에서 도출되는 목표는 다음과 같다.

① 이미 배운 여러 가지 정보를 새로운 문제 상황에 적용하여 해결함으로써 수학의 가치와 소중함을 인식

② 수학적 지식이나 성향의 여러 측면을 통합하는 능력의 양성

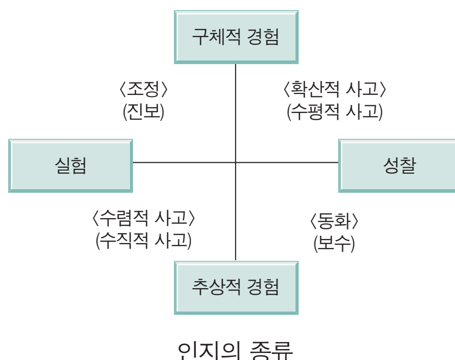
③ 자연 현상이나 사회 현상의 예측과 설명에 의한 수학적 힘의 신장

03 수학적 사고력

수학적 사고는 수학적 개념이나 원리 · 법칙 등이 생성되는 과정에서 작용하는 사고이다. 이때, 여러 가지 유형의 사고를 논할 수 있지만, 직관과 논리가 그 중심이라고 할 수 있다. 직관과 논리는 서로 상반되는 듯한 인식이면서도 상보적인 역할 관계에 있으며, 동시에 일어나는 것은 아니지만 수학적으로 사고하는 경우 긴밀한 연대성이 요구되는 것이다. 직관으로 계획을 세워서 논리로 정리하고 확인하게 되며, 또한 논리적으로 정리된 결과야말로 거기서부터 새로운 직관이 생성되는 것이다. 이러한 양자의 관계에 대한 배려는 뛰어난 교사가 경험적으로 터득하고 있는 수업의 지혜라고 할 수 있는 것이다.

04 수학적 창의력

창의력이란 다음 그림과 같은 인지의 종류 중 확산적 사고의 영역에 해당하는 것으로, 주어진 문제 상황에서 미지의 정보를 이용한 새로운 생각들로 새로운 형태의 문제해결을 발현시키는 것이라 볼 수 있다.



인지의 종류

창의력은 무의식의 세계에서 돌출하는 분수 감정(噴水感情)에 의한 정상 경험(頂上經驗)이며, 정상 경험의 조건들로는 완미 경험(完美經驗), 지적 발견(知的發見), 음악적 감별(音樂的鑑別) 등을 들 수 있다. 월러스(Wallas, G. ; 1858~1932)에 의하면 창의성의 과정은 고육 준비(苦肉準備), 부화(孵化), 섬광(閃光), 확인(確認)의 과정을 거친다.

다음은 디오판토스(Diophantos ; ? 200~? 284)의 묘비에 적혀있는 내용을 요약한 것이다.

'그는 생의 $\frac{1}{6}$ 을 소년으로, $\frac{1}{12}$ 을 청년으로, $\frac{1}{7}$ 을 미혼으로 살았다. 그의 아들은 결혼 후 5년 만에 태어났으며, 그보다 4년 먼저 사망하였다. 아들의 생애는 그의 절반이었다.'

이때, 그가 사망한 나이를 구하고자 하면 사망한 나이를 x로 놓고 다음과 같이 식을 세워 푸는 것이 보통이다.

$\frac{x}{6}$ $\frac{x}{12}$ $\frac{x}{7}$ $+5$ $\frac{x}{2}$ $+4$

x

$$\frac{x}{2}=\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{7}\right)x+9 \qquad \therefore x=84$$

그런데 보통의 풀이와 다른 독특한 방법에 의한 다음과 같은 풀이가 창의력이 발현된 사례라 볼 수 있다.
첫 번째 단계는, 나이는 일반적으로 0에서 100 사이의 자연수로 표현된다는 가정을 세운다. 따라서 자연수 해를 구하면 된다.

두 번째 단계는, 나타나는 분수 $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{12}$, $\frac{1}{7}$ 역시 자연수인 아버지의 삶의 기간을 대상으로 하고 있다. 결정적으로 분모 6, 12, 7은 0과 100 사이에서 공배수를 거의 갖지 않으므로 최소공배수를 계산하면 된다는 것이다. 따라서 그의 나이는 84세이다.
이 풀이에서 문제를 해결하기 위한 보다 복잡한 방법은 직관, 경험, 그리고 그 문제의 본질에 함축된 어떤 그럴듯한 가정들에 기초를 두고 있다.

〈참고 자료〉

1. Ernest, P. (1991), The philosophy of mathematics education, The Falmer Press
2. Howson, A. G., Keitel, C., Kilpatrick, J. (1981), Curriculum development in mathematics, Cambridge University Press
3. Kilpatrick, J. (1995), Curriculum change locally and globally, in R. P. Hunting, G. E. Fitzsimons, P. C. Clarkson, A. J. Bishop (Eds.), Regional collaboration in mathematics education(pp. 19～29), Monash University
4. Lucas, J. F. (1989), Heuristic thinking and mathematics, Contributed paper, AMS－MAA Mtg. Pheonix, AZ
5. Ness, H. (1993), Mathematics, an integral part of our culture, in A. M. White(Eds.), Essays in humanistic mathematics, Note No. 32, The Mathematical Association of America

Ⅱ. 수학 교수 · 학습 이론 및 방법

1. 수학 교수 · 학습 이론

01 피아제의 지적 발달 이론

1969년 피아제(Piaget, J. ; 1896～1980)는 인간의 인지 발달이 감각 운동기(생후 약 2년까지), 전조작기(약 2~7세), 구체적 조작기(약 7~11세), 그리고 형식적 조작기(약 11세~성인)의 네 단계로 진행된다고 이론화하였다. 이 단계들은 연속적이며, 전 단계를 토대로 구축된다.
구체적 조작기와 형식적 조작기가 중 · 고등학교와 관련성이 매우 높다. 이 두 단계를 구별짓는 기준은 논리적 사고력이다. 논리적 사고력은 비율 논리, 확률 논리, 상관 논리, 변인 통제 논리, 조합 논리 등의 하위 범주들로 구별할 수 있다. 단적으로 표현한다면, 구체적 조작기의 아동의 사고는 실체가, 형식적 조작기의 아동의 사고는 가능성이 지배한다고 볼 수 있다.

피아제 이론에 따르면, 인지 발달은 네 가지 요소들, 즉 물리적 성숙, 경험, 사회적 전수, 그리고 자아 통제의 상호 작용에서 기인한다. 물리적 성숙은 신경계와 내분비선 호르몬계의 유기적 성숙을 말한다. 경험은 대상들에 대한 활동을 수반하는 물리적 경험과, 물리적 활동들의 정신적 조정을 수반하는 논리· 수학적 경험으로 구성된다. 사회적 전수는 사회적 상호 작용뿐만 아니라, 언어적 · 교육적 경험들을 포함한다. 자아 통제는 현존하는 도식이 불충분하여 동화와 조절의 보상 단계들로 이루어질 때, 새로운 정신적 도식을 활동적으로 창출하는 과정이다.
지적 발달에 영향을 미치는 요소들과 아울러 청소년들의 수학 교육의 시사점을 탐색해 보자. 여기서 중요하게 고려해야 할 점은 많은 학생들이 아직도 형식적 조작기에 이르지 못하였다는 것이다. 이를 극복하기 위하여 다

음과 같은 방안을 염두에 두어야 한다.

가. 구체적인 것에서 추상적인 것으로 나아간다.
나. 학생 활동에 기초하여 가르친다.
다. 자아 통제를 통하여 가르친다.

02 딘즈의 수학 학습 이론

딘즈(Dienes)는 수학적 개념들이 발전적인 단계별로 학습된다고 믿는다. 이 단계들은 피아제의 지적 발달 단계들과 다소 유사하다. 그는 수학적 개념들의 교수와 학습에서 다음의 6단계를 설정하고 있다.

가. 자유 놀이 단계
나. 게임 단계
다. 공통성의 탐구 단계
라. 표현 단계
마. 기호화 단계
바. 형식화 단계

딘즈는 'Building up mathematics' 라는 그의 저서에서 그의 수학 교수의 체계를 개념의 교수를 위한 네 가지 일반적인 원리들로 요약하고 있는데, 위의 6단계는 이러한 네 가지 원리들을 정교화한 것이다.

(1) 역동적 원리

예비적 게임, 구조화된 실습용의 게임 그리고 반영적인 유형의 게임 등은 각 유형의 게임이 적절한 때에 도입되기만 하면, 수학적 개념들이 결국에는 구성될 수 있는 필요한 경험들로 제공되어야 함에 틀림없다. 역동적 원리란 장래에 그것으로부터 수학적 개념을 구성해 낼 수 있는 쌓기 나무 놀이나 종이접기 놀이, 또는 게임 등을 경험시켜 두어야 한다는 것이다.

(2) 구성적 원리

게임들의 구조화에서 구성은 언제나 분석에 선행되어야 한다. 분석은 12세까지는 아동들의 학습에서 거의 존재하지 않는 것이다. 따라서 구성의 원리란 수학의 학습에서는 구성이 분석에 선행되어야 한다는 원리인데, 여기에서 구성이란 물체를 만들거나 전체를 파악하는 것이고, 분석이란 물체를 분해하거나 세부를 검토하는 일 또는 어떤 근거를 묻는 것을 말한다. 공간도형의 학습에서 이를 적용하면 공간도형이나 단면을 만드는 것이 선행되고, 이어서 그 성질의 분석이나 성질의 근거를 조사하는 학습이 이루어지는 것이 좋다는 것이다.

(3) 수학적 다양성의 원리

변인들을 포함하는 개념들은 가능한 한 최대의 변인들을 포함하는 경험들에 의하여 학습되어야 한다. 수학적 다양성의 원리는 수학적 개념을 제시할 때 변화시킬 수 있는 것과 변화시킬 수 없는 것이 있는데, 변화시킬 수 있는 것은 가능한 한 변화시켜서 다양하게 제시하여야 한다는 것이다. 예를 들어, 평행사변형의 지도에서 변의 길이, 각, 위치 등 가변적인 요소는 여러 가지로 변화시킨 것을 보여 주어야 한다.

(4) 지각적 다양성의 원리 또는 다각적 구현의 원리

아동들이 추상화의 수학적 진수를 축적하도록 유도하기 위해서 뿐만 아니라, 개념 형성에서 개인적 변동에 대하여 가능한 많은 모습들을 허용하기 위하여, 똑같은 개념적 구조는 가능한 한 많은 지각적 동치물들의 형태로 제시되어야 한다. 예를 들어, 평행사변형의 경우 종이, 대나무, 살, 고무줄 등 다양한 재료를 이용하여 만든 것을 보여줄 수 있도록 해야 한다는 것이다.

03 브루너의 인지 경로에 따른 수학 학습 과정

브루너(Bruner, J. S. ; 1915~)는 지식의 구조(structure of knowledge) 이론에서 어떤 영역의 지식도 다음과 같이 활동적(E) · 영상적(I) · 상징적(S) 표상의 세 가지 과정으로 나타낼 수 있다고 하였다.

첫째, 학습자에게 제시하는 개념 · 지식 구조를 이해하는 데는 실물 그대로의 제시를 통하여 행동화, 조작화의 신체적 동작으로 표현하는 활동적 표상 양식(enactive mode of representation)의 조작적인 활동이 중심이 된다. 이 과정의 의미는 수학적인 개념이나 원리 · 법칙 등을 구체적인 행동화, 조작화 등의 적절한 운동 반응을 통하여 무엇을 어떻게 하는가를 아는 데에 있다.

둘째, 개념을 충분히 정의하지 않고도 영상을 통해서 그림이나 모형으로 지식을 이해하는 영상적 표상 양식(iconic mode of representation)은 내적인 심상에 근거를 두고 시각적 또는 다른 감각적 조작에 의하여 지식을 그림이나 도식으로 표현하는 것에 그 의미가 있다.

셋째, 법칙과 원리에 의해 지배되는 상징적 체제에서 배출된 논리적 명제에 의한 기호나 문자식으로 지식을 이해하는 상징적 표상 양식(symbolic mode of representation)은 융통성 있는 사고 체계에 근거를 두고 언어나 문자, 기호 등을 사용하여 지식을 표현하는 것으로, 고차적인 문제해결 능력의 기초가 된다.

학습 내용을 전달하는 의사소통원을 도식화하면 다음과 같다.

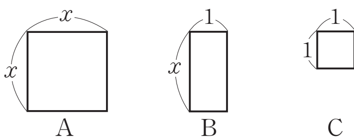
여러 가지 표상

	양식	구체적 기호	형태적 기호	상징적 기호	
구체	대상	실물	그림	용어	추상
		모형	도표	기호	
		사진	벤 다이어그램	수	
		구체물	수직선	문자	

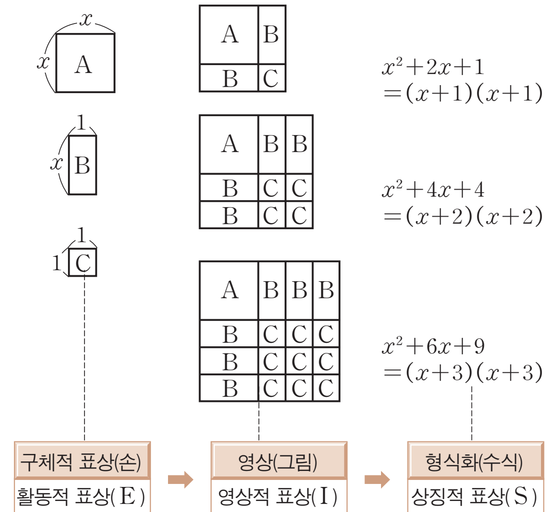
브루너는 인지 경로에 관한 EIS 이론의 바탕이 되고 있는 '2차원의 완전제곱'에 관한 수학 학습 지도의 예를 다음과 같이 들고 있다.

학습 내용은 2차원의 완전제곱형의 인수분해이다. 학습의 흐름은 주어진 자료를 조작, 구성해 보는 것에서 시작하여 자기가 구성한 수학적 원리를 영상적으로 파악하도록 하고, 나아가서 수식으로 표현하게 되어 있다.

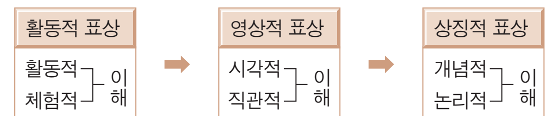
다음 그림에서 A는 한 변의 길이가 x인 정사각형 모양의 나무도막으로서 x곱하기 x를 'x네모'로, B는 가로 1, 세로 x인 직사각형 모양의 나무도막으로서 'x막대'로, C는 한 변의 길이가 1인 정사각형 모양의 나무도막으로서 1 곱하기 1의 나무도막을 '1네모'로 각각 부르기로 한다.



아동들에게 A, B, C를 여러 개씩 나누어 주고, 그것으로 놀 기회를 충분히 준 다음 'x네모'보다 큰 정사각형 모양을 만들어 보게 하자. 아동들은 큰 어려움 없이 다음과 같은 모양을 만들었다고 한다.



이처럼 브루너는 인지 경로 학습을 활동적 표상 → 영상적 표상 → 상징적 표상의 단계적인 학습을 요구하고 있다. 첫째 단계인 활동적 표상에서는 주로 구체물 조작에 의한 학습을 하고, 둘째 단계인 영상적 표상에서는 구체물 조작에 의해서 습득된 지식을 그림이나 도식으로 나타내어 보고, 마지막 단계인 상징적 표상에서는 영상으로 얻은 지식을 문자, 기호, 숫자 등을 사용하여 형식화하고, 이를 추상적인 수식으로 표현해 보게 하는 것을 인지 경로에 따르는 학습이라고 한다.



04 스켐프의 관계적 이해와 도구적 이해

스켐프(Skemp, R. ; 1919~1995)는 영국의 수학 교육학자로서 수학 학습 심리와 수학 교육 방법론에 관한 최대의 연구 업적을 남겼다. 스켐프는 영국의 옥스퍼드 대학에서 순수 수학을 전공하였다. 대학을 졸

업한 뒤에 수학 교육 연구에 관심을 가지고 수학을 재미있게 지도하는 방법을 연구·개발하기 위하여 대학 교수직도 사양하고 초·중등학교 교사 생활을 경험하였다. 스켐프는 훌륭한 이론은 현장에서 나온다는 신념에 따라 교사 생활을 하면서도 다시 옥스퍼드, 맨체스터, 워릭 대학에서 '심리학과 수학', '교육 심리학', '아동 심리학', '인지 발달 심리학', '수학 학습 심리학', '초등 수학 교수법' 등의 연구를 하여 수학 교수·학습 이론을 체계화하는 업적을 남겼다.

관계적 이해(relational understanding)와 도구적 이해(instrumental understanding)라는 용어는 스켐프가 1976년 'Mathematics Teaching' 이라는 학술지의 논문 발표에서 처음으로 알려지기 시작하면서부터 새로운 수학 교육 용어의 하나로 자리잡게 되었다. 스켐프는 이해를 새로운 상황을 이미 알고 있는 인지도식(scheme)과 동화(assimilation)시키는 것으로 설명하면서, 이해를 하게 되면 목표의 획득, 다른 사람과의 상호 협력, 창조적인 활동을 더 잘 할 수 있게 된다고 하였다.

관계적 이해란, 문제 해결의 방법과 이유를, 무엇을 왜 하는지를 알고 있으면서 보다 일반적인 수학적인 관계로부터 특수한 규칙이나 절차를 연역할 수 있는 상태를 말하고, 도구적 이해는 적당히 규칙을 기억하고 있으면서 그 규칙이 왜 그렇게 되느냐를 알지 못한 채 기억된 능력을 문제 해결에 적용하는 상태를 말한다.

예를 들면, 삼각형의 넓이를 구하는 문제에서, 첫째 날은 직각삼각형이 그려진 모눈종이를 등적변형(等積變形)시켜 직사각형으로 만들고 이들의 관계에서 삼각형의 넓이를 구하는 공식 '(밑변)×(높이)÷2' 를 만들어 내는 수업을 한다. 둘째 날은 만들어 낸 공식을 이용하여 실제로 삼각형의 넓이를 구해 보게 한다.

이러한 수업 과정에서 어떤 학생이 첫째 날은 결석하고, 둘째 날은 출석했다고 가정하자. 첫째 날 결석한 학생은 평소에 곱셈과 나눗셈 학습은 잘 하고 있다고 한다. 둘째 날 교사가 첫째 날 학습한 삼각형의 넓이를 구하는 공식 '(밑변)×(높이)÷2' 를 상기시키고 삼각형의 넓이를 구하는 문제를 제시했을 때, 첫째 날 결석한 학생도 곱셈과 나눗셈을 잘 할 수 있기 때문에 공식에 수를 대입하여 삼각형의 넓이를 어려움 없이 쉽게 구할 것이다.

이 경우, 결석한 학생은 삼각형의 넓이를 구하는 학습에서 도구적 이해는 하고 있지만 관계적 이해는 하지 못했다고 볼 수 있다.

이와 같이, 결석한 학생이 주어진 공식을 적용하여 정답만을 찾아내고 삼각형의 넓이 공식을 만들어 내는 과정을 모르는 경우를 가리켜, 스켐프는 도구적 이해를 통한 삼각형의 넓이 구하는 학습을 했다고 한다.

스켐프는 최근까지도 도구적 이해를 '논리없는 규칙'으로 보고 이해로 간주하지 않았으나, 때에 따라서는 도구적 이해가 필요하다는 점을 그의 저서에서 시사하고 있다. 학생들은 도구적 이해에 의한 학습을 원하지만 관계적 이해를 목표로 하는 교사에게는 도구적 이해를 반대한다. 그러나 인지 수준상 관계적 이해가 어려운 경우에는 우선 도구적 이해로 학습한 후에 적당한 시기에 관계적 이해에 의한 학습이 요구된다.

2. 창의적 문제 해결을 위한 교수 · 학습 방법

01 문제란 무엇인가?

1983년 렌츠너(Lenchner)는 "문제란 개인이나 집단이 직면하여 반드시 해결을 해야 하지만, 그 해결의 분명한 경로가 보이지 않는 상황을 말한다."고 하였다. 문제와 비슷한 용어로 질문(question), 연습문제(exercise), 문제(problem) 등이 있다. 질문은 단순한 회상과 기억에 의하여 해결이 가능한 상황이며, 연습 문제는 이미 학습된 기능이나 알고리즘의 강화를 위한 반복 연습을 요하는 상황이며, 문제는 해결을 위하여 이미 학습된 지식의 분석과 종합을 요하는 상황이라고 볼 수 있다. 문제란 수용, 장벽, 탐구의 세 가지 조건을 만족하여야 한다.

02 폴리아의 문제해결 4단계

요즘 강조되고 있는 문제해결(problem solving)은 듀이(Dewey, J.; 1859~1952)의 진보주의 철학에서 그 근거를 찾을 수 있으며, 형태주의와 폴리아(Polya)의 영향을 받아 1980년대에 들어서면서 NCTM의 권고로 부활된 것으로 볼 수 있다. 이제는 실용성을 근거로 하여, 정형화된 문제보다는 수학적 지식을 이용하여 해결할 수 있는 실생활 문제의 상황을 강조하기 시작한 것이다. 문제해결을 위한 첫 단계는 문제의 이해로, 이를 위해서는 통찰에 의한 문제의 구조를 파악하는 것이 중요하다. 따라서 개념과 원리의 이해는 지속적으로 강조되어 왔다고 볼 수 있다. 최근에는 실생활 문제의 해결 기능을 증진시키기 위하여 통찰에 의한 문제의 이해뿐만 아니라 연습에 의한 암송 전략을 강조하는 정보 처리 이론(IPS Theory)이 각광을 받고 있기도 하다. 폴리아의 문제 해결 4단계는 다음과 같다.

03 창의적 문제해결 전략

렌츠너는 학교 수학 수업에서 창의적 문제해결력을 높이기 위해 다음과 같은 문제해결 전략을 중점적으로 지도하여야 한다고 주장한다.

가. 그림이나 도표 그리기
나. 규칙성 찾기
다. 조직화 된 목록 만들기
라. 표 만들기
마. 문제를 단순화하기
바. 시행 착오
사. 실험하기
아. 문제의 실연
자. 거꾸로 풀기
차. 식 세우기
카. 연역적 추론의 이용
타. 고정 관념 바꾸기

예를 들어, 다음과 같은 '하노이의 탑' 문제의 해결 과정에서 위의 열두 가지 문제해결 전략 중 3개의 문제해결 전략이 이용된다.

문제 상황 | 다음 그림과 같이 세 개의 나무 막대기와 그 막대기에 꼭 맞게 끼울 수 있도록 가운데에 구멍이 나 있는, n개의 서로 다른 크기의 원판으로 이루어진 장난감이 있다. 처음에는 한 막대기에 모든 원판이 걸려 있되, 가장 작은 원판이 제일 위에 걸려 있고 아래로 갈수록 점점 큰 원판들이 걸려 있다.

원판을 옮길때 한 번에 한 개씩만 한 막대기에서 다른 막대기로 옮길 수 있고, 작은 원판 위에는 큰 원판을 올려 놓을 수 없다.

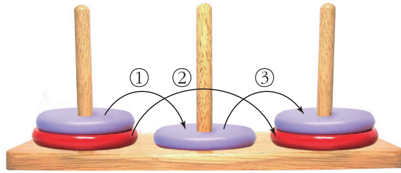
목표 | 이러한 규칙에 따라 처음의 막대기 위에 있는 모든 원판을 다른 막대기에 옮겨야 한다.

문제해결 전략 |

① n이 1일 때는 몇 회의 시행을 해야 할까?
(문제를 단순화하기)
② n이 2일 때는 몇 회의 시행을 해야 할까?
(문제를 단순화하기)
③ n이 3일 때는 몇 회의 시행을 해야 할까?
(문제를 단순화하기)
④ n이 4일 때는 몇 회의 시행을 해야 할까?
(문제를 단순화하기)
⑤ 어떤 규칙성을 발견할 수 있는가?
(규칙성 찾기)
⑥ 수학적 귀납법에 의하여 이러한 일은 (2^n-1)회의 시행으로 수행할 수 있음을 증명하여라. (거꾸로 풀기)

활동 및 풀이 |

① n이 1일 때: 1　　② n이 2일 때: 3



③ n이 3일 때: 7 ④ n이 4일 때: 15

⑤ 3개인 경우 먼저 작은 것 2개를 옮긴 다음에 마지막 하나를 옮기고 다시 2개를 옮긴다.
즉, $3+1+3=7$이다.
마찬가지로, 4개인 경우에도 위의 3개를 먼저 옮긴 다음에 마지막 하나를 옮기고 다시 3개를 옮겨야 하므로 $7+1+7=15$이다.

⑥ $n=k$일 때: (2^k-1)회의 시행이 필요하다면,
$n=(k+1)$일 때는 ⑤에 의하여 먼저 k개를 옮긴 다음 한 개를 옮기고 다시 k개를 옮겨야 하므로 $(2^k-1)+1+(2^k-1)=2^{k+1}-1$이고 따라서 모든 자연수에 대하여 성립한다.

〈참고 자료〉

1. Lenchner, G. (1983), Creative Problem Solving in school Mathematics, Houghton Mifflin Company
2. Piaget, J., Inhelder, B. (1969), The Psychology of the Child, Basic Books, Inc
3. Bruner, J. S. (1964), The course of cognitive growth, American Psychologist, 19, pp. 1~15
4. Skemp, R. R. (1976), Relational understanding and instrumental understanding, Mathematics Teaching, No. 77, pp. 20~26

Ⅲ. 수학 교구 및 기자재의 활용

수학의 학습은 계통적으로 이루어진다고 한다. 그 원리는 생물학자인 헤켈이 주장한 "개체 발생은 계통 발생의 발달 단계를 되풀이한다."라는 표현에 근거를 두고 있다. 이는 개체는 집단의 발전을 되풀이한다는 것을 의미하는데, 이를 수학의 학습에 적용하면 대개 오랜 세월에 걸쳐 그 과목이 발전한 순서로 그 과목을 배운다는 것이다. 이를테면, 기하학 분야는 아기들이 물리적인 형태를 인지하고 모양과 크기를 비교할 수 있는 능력, 즉 단순한 관찰에 기원한 잠재적 기하학(subconscious geometry)에서 출발한다. 그 후, 컴퍼스, 자, 각도기, 가위, 풀 등을 가지고 놀거나 실험을 하면서 여러 기하학적 사실을 상당히 이끌어 내는 과학적(또는 실험적) 기하학(scientific or experimental geometry)으로 발전한 다음 보다 높은 수준인 논증적 기하학(demonstrative geometry)으로 발전한다.

그런데 고등학교 교육과정에서 과학적 기하학 수준의 학습이 충분하게 이루어져야 하는데, 이런 면이 부족하다. 다른 수학 분야에서도 비슷한 실정이다.

따라서 이번 2006년 개정 교육과정에서는 이를 보완하고자 수학의 교수 · 학습에서 다양한 구체적 조작물 및 기술 공학적 교구(계산기, 컴퓨터, 인터넷 등)를 적극 활용할 것을 권장하고 있다.

수학과 교수 · 학습에서 다양한 구체적 조작물 및 학습 기자재를 활용하면 개념, 원리, 법칙 등의 이해를 돕기에 효과적이고, 흥미를 유발하여 학생 중심으로 탐구하고, 역동적인 학습을 기대할 수 있다.

1. 계산기의 활용

계산기를 수학 교육에 활용하는 방법으로는 다음의 세 가지를 생각할 수 있다.

첫째, 실생활 문제 등과 같은 문제해결을 위해 복잡한 계산을 해야 할 경우, 계산기를 사용함으로써 정확한 값을 신속하게 구할 수 있다.

둘째, 계산기를 문제해결을 위한 소재로 활용할 수 있다. 예를 들면, 그래픽 계산기로 삼차함수의 그래프를 그리려고 할 때, 그래프의 특성과 개형을 미리 예측해 보고 화면의 크기를 정한 후 실제로 그래프를 그려서 그 예측을 확인해 보게 할 수 있다.

셋째, 수학 학습을 위한 보조 자료로 활용할 수 있다. 과학용 계산기는 거듭제곱근의 값, 삼각비의 값, 지수함수의 값, 로그의 값 등을 내장하고 있어서 이들을 학습할 때 중요한 보조 자료로 활용할 수 있다. 그래픽 계산기는 함수의 그래프에 관한 기능뿐만 아니라, 행렬과 행렬식의 계산, 문자식의 인수분해와 전개, 통계 처리 기능, 미분과 적분의 계산 등을 포함하고 있어서 수학 지도의 중요한 보조 자료로 활용할 수 있다.

계산기는 일반용 계산기, 공학용 계산기, 그래픽 계산기 등 그 형태와 기능이 다양하고, 숫자판, 표시창, 전자 기억 소자로 구성되어 있다.

① 일반용 계산기: 사칙연산이 가능한 계산기

② 공학용 계산기: 삼각비와 지수 · 로그의 계산, 통계 처리까지 가능한 계산기

③ 그래픽 계산기: 공학용 계산기의 기능에 함수의 그래프까지 그릴 수 있는 계산기

2. 컴퓨터의 활용

컴퓨터를 활용하는 것은 수학 교수 · 학습 과정의 여러 어려움을 극복하기 위한 대안으로 생각되어, 기존 수학 개념 지도의 어려움을 경감할 수 있는 방안에 대한 연구로 진행되고 있다. 컴퓨터가 가지는 다양한 기능은 추상적인 수학 내용을 시각화하여 지도할 수 있을 뿐만 아니라, 그 시각화가 학생들의 직접적인 경험이나 통제를 통해 이루어질 수 있다는 점에서 수학 학습의 어려움을 완화시켜 준다. 특히, 형식적인 증명이나 개념 학습의 전 단계에서 그래픽이나 애니메이션, 시뮬레이션 등을 통한 직관적 탐구 활동은 수학의 역동적이고 발생적인 측면을 부각시킬 수 있다. 또, 산술 교육은 종래의 계산 기능 위주에서 사고력으로 옮겨갈 수 있게 되었으며, 학생들의 수학 학습을 돕기 위한 많은 소프트웨어가 개발되고 있다.

01 수학 수업에서의 컴퓨터 활용의 장점

(1) 그래픽과 애니메이션

학습 내용을 시각적으로 전달하여 학습자가 학습 내용을 쉽게 받아들일 수 있고, 학생들의 호기심을 자극하여 학습 효과를 높일 수 있다.

(2) 시뮬레이션

시간적, 공간적 제약으로 실제 경험이 불가능한 경우에 유사한 상황을 제시하여 이해를 돕고 학습 효과를 크게 높인다.

(3) 계산 능력

복잡한 계산 능력이나 자료 정리를 신속하고 정확하게 처리하여 탐구 학습에 많은 시간을 할애할 수 있다.

02 수학 수업에 활용할 수 있는 프로그램

컴퓨터가 발달함에 따라 수학 교재에 적용할 수 있는 다양한 소프트웨어가 제공되고 있다.

(1) Mathematica

울프람(Wolfram, S.)은 일리노이 대학의 복합 시스템 연구 센터에서 수학 문제라면 무엇이든지 해결할 수 있는 소프트웨어 개발을 시작했으며, 그 산물이 바로 Mathematica이다.

Mathematica의 가장 큰 특징은 첫째로 기호 계산 능력이다. 대부분의 프로그램은 수치 계산(numerical calculation)은 할 수 있지만, 기호 계산은 불가능하다. 하지만 Mathematica는 수치와 기호 계산 모두가 가능한 프로그램이다.

둘째로 Mathematica의 명령어는 일반 수학의 명령어와 기호가 흡사하여, 수학 문제의 수리적 과정을 대치하면서, 프로그램에 쉽게 접근할 수 있다.

셋째로 Word Processor로 사용할 수 있으며, html로 출력할 수 있다.

넷째로 Mathematica는 그래픽 처리와 풍부한 함수를 가지며, Mathematica의 부프로그램과의 호환 기능이 탁월하다.

(2) GSP(The Geometer's Sketch Pad)

GSP는 유클리드 기하의 도형을 구현할 수 있는 작도 프로그램의 일환으로, 기존의 정적이고 고정된 도형에서 동적이고 움직이는 도형을 관찰함으로써 기하학적 관계를 보다 이해하기 쉽게 해 준다. 각의 이등분선, 선분의 중점, 평행선 그리기, 수직선 그리기 등 기본적인 작도 기능을 한번에 수행할 수 있고, 평행이동, 대칭이동, 회전이동의 변환도 한번에 가능하다.

GSP는 애니메이션과 드래그(Drag)를 사용하면 평면기하의 성질을 연속적이고 역동적으로 관찰할 수 있고, 또한 도형의 자취를 생생하게 보여 준다. 이로부터 도형의 성질에 대한 확실한 개념을 얻을 수 있다.

또한, 도형의 여러 요소의 색상 처리, 변환, 측정, 계산, 도형의 방정식 등의 표현이 쉽게 구현되며, 도형의 이름을 붙여 주거나 주석을 다는 등의 여러 가지 표현도 손쉽게 처리할 수 있다.

따라서 학생들의 흥미를 자극할 수 있고, 학생들이 직접 GSP를 사용한다면 학습 욕구를 더욱 유발할 수 있어 효과적이다.

(3) C. a. R.

C. a. R.는 GSP와 마찬가지로 사용법이 간단하여 중 · 고등학생이 다루기 쉬운 프로그램으로 칠판이나 종이 위에서와는 달리 도형을 조작할 수 있다. 즉, 마우스로 도형을 이동시키거나 변형할 수 있다.

이때, 선분의 끝점을 움직이면 그 선분의 수직이등분선이 그에 따라 자동으로 이동하는 등 도형들 사이의 관계가 유지된다. 그러므로 칠판이나 종이에서 불가능한 '실험' 이라든가 '시행 착오를 통한 문제 해결' 이라는 개념을 기하 수업에 도입함으로써 학생들이 도형의 성질을 직관적으로 파악하는 데 큰 도움을 얻을 수 있다. 실제로 이 프로그램을 가지고 수업을 해 보면, 앞서는 학생들이 수업 내용 밖의 발전적인 내용을 스스로 발견하는 경우나, 평소 뒤처지는 학생들이 흥미를 가지고 수업에 참여하는 경우를 많이 볼 수 있다.

또한, '과제' 기능을 이용하면 학생들이 스스로 문제를 풀고 결과를 확인할 수 있어 편리하다.

특히, 하이퍼텍스트(html) 파일을 작성하여 웹 상에서 활용하는 것이 편리하다.

더욱이 이 프로그램은 GPL 라이센스를 따르는 무료 소프트웨어로 비용이 전혀 들지 않는다.

(4) 한글 오피스 - 엑셀

엑셀은 MS Office의 5가지 프로그램 중 하나이다. 그 중 엑셀(excel)은 단순한 표 계산부터 회계, 재무관리를 위한 프로그램이다.

엑셀의 가장 큰 특징은 자동 계산 기능이다.

엑셀의 자동 계산은 200여 가지에 이르는 '함수' 에 의하여 이루어진다.

따라서 사용자가 숫자만 치면 합계, 비율, 평균, 순위 등의 모든 결과는 엑셀이 알아서 계산한다. 또한, 200개가 넘는 함수 중에서 더하기, 빼기, 나누기, 곱하기의 4가지 함수의 사용법을 익히면 거의 모든 계산을 할 수 있고 추가로 if 함수의 사용법을 알게 되면 엑셀을 더욱 유용하게 이용할 수 있다.

(5) 그래프 마법사

사용자가 입력한 함수식을 그래프로 나타내어 주는 프로그램으로 중 · 고등학교 수학 교과 과정에서 다루어지는 모든 내용의 그래프에 대한 표현이 가능하다.

(6) 그 밖의 프로그램

① Poly : 정다면체와 준정다면체를 포함한 147개의 볼록 다면체를 자유롭게 회전시키면서 관찰할 수 있고, 입체에서 평면 전개도를 인쇄할 수 있는 프로그램이다.

② Wingeom: 2차원 도형, 3차원 다면체를 조작할 수 있는 프로그램이다.

③ TESS: 변환과 다각형의 각의 크기를 지도할 때 사용할 수 있는 프로그램이다.

④ Equation grapher: 함수의 그래프를 그리고 해석하는 프로그램이다.

⑤ GrafEq: 정함수, 음함수, 매개변수함수, 극좌표 형식의 함수 등 어떤 함수든지 그래프를 그릴 수 있고, 부등식의 영역을 표시할 수 있는 프로그램이다. 여러 개의 함수의 그래프를 동시에 그릴 수 있고, 줌(zoom) 기능도 가지고 있다.

⑥ WinPlot: 다양한 형태의 곡선, 곡면을 그릴 수 있는 프로그램이다.

⑦ Graphmatica: 다양한 형태의 곡선, 곡면을 그릴 수 있는 프로그램이다.

⑧ Winstat: 변량에 대한 그래프, 히스토그램, 확률분포 곡선 등을 그려 주는 통계 프로그램이다.

3. 웹 사이트(web site)의 활용 및 매개 커뮤니케이션의 활용

개인용 컴퓨터가 일반화되고 네트워크 시스템이 구축됨에 따라, 인터넷을 활용하여 자신이 가진 정보를 공유하고 지속적으로 확대시켜 나갈 수 있게 되었다.

이에 따라 수학 교수 · 학습에 필요한 많은 정보를 활용할 수 있게 되었다.

01 웹 사이트 활용 학습

인터넷을 이용하여 여러 정보를 모으고 활용하는 것이 가능하다. 또한, 문제은행식으로 구성된 사이트에서 수학 문제를 풀어 보고 그 결과를 알아볼 수 있다.

한편, 수학사나 수학자 등을 조사하여 학습에 활용할 수 있다.

02 매개 커뮤니케이션을 활용한 학습

메일을 이용하여 교사나 친구 등 여러 사람에게 학습 과제에 대한 도움을 받고, 과제를 제출할 수 있다. 또한, 탐구 학습에서 친구들과 대화방을 만들어 문제 해결 과정에 대하여 서로 의견을 나누는 등 여러 가지로 활용할 수 있다.

4. 수학 교구

01 산가지

우리나라에서는 조선 말까지 산가지를 이용하여 계산하였다. 산가지는 대나무 가지를 세모꼴 막대 모양으로 만들어 이용한 계산 도구로, 현재 국립 민속 박물관에 남아 있는 산가지의 길이는 약 15 cm이다.

산가지를 늘어놓을 때는 일의 자리, 십의 자리, 백의 자리의 숫자를 놓을 때마다 세로, 가로로 번갈아 늘어놓았으며, 음수를 나타낼 때는 산가지 위에 어슷하게 산가지를 한 개 더 올려 놓았다고 한다.

또, 이와 비슷한 산목이란 것을 이용하여 이차방정식까지도 풀었다고 한다.

02 계산패

곱셈을 할 때 사용했던 셈기구이다.

03 기하판 (geometric board)

다양한 도형의 넓이를 구하게 하여 창의력을 신장할 수 있는 수학 교구이다.

04 대수판 또는 대수막대(algebraic board 또는 algeblock)

대수판은 10진막대 또는 대수막대 등 여러 가지로 활용된다.

대수막대는 최근에 소개된 교구로 변수의 개념을 직접 손으로 만져 볼 수 있는 모델로 만들었다는 데 그 의의가 있다고 하겠다. 이 교구에는 x, y, x^2, xy, x^2y, xy^2,

x^3 등을 나타내는 대수막대들이 있고, 각종 계산의 모형을 만드는데 보조 역할을 하는 여러 가지 판들이 있다. 대수막대를 사용하면 정수의 연산과 변수의 연산을 직접 막대를 가지고 확인할 수 있으며, 다항식의 덧셈과 뺄셈, 곱셈, 심지어 간단한 방정식의 계산도 할 수 있다. 대수막대는 두꺼운 종이로 간단히 만들 수 있다.

05 삼항식

대수막대의 변형된 형태로 8개의 조각으로 정육면체를 만드는 퍼즐 형태의 교구로, 세제곱의 전개를 이해하는 데 도움이 되는 교구이다.

06 그림자 퍼즐(실루엣 퍼즐)

도형을 여러 조각으로 나눈 몇 개의 조각을 가지고 여러 가지 모양을 만드는 퍼즐을 그림자 퍼즐이라고 한다.
중국 고대의 탱그램(tangram) 게임에 기초한 것으로 우리나라에서는 칠교 놀이로 널리 알려져 있다. 이것을 발전시킨 것으로 T자, F자, 악마의 퍼즐이라고 불리는 kobold 등이 소개되어 있다.

〈참고 자료〉

1. 김원종(1993), 인공 지능을 활용한 수학 교육의 코스웨어, 한국 수학 교육 학회
2. 류희찬(1997), 수학 교육에서의 컴퓨터 활용: 현황과 과제, 청람 수학 교육

5. 수학과 추천 사이트

01 수학 학습 관련 사이트

• http://www.kms.or.kr/
대한수학회 홈페이지로 수학 용어를 검색할 수 있고, 한국수학올림피아드에 관한 소식 등 다양한 소식이 소개되어 있다.

• http://www.tmath.or.kr/
사단법인 전국수학교사모임 홈페이지로 수학과 수학 교육에 대한 다양한 정보가 소개되어 있다.

• http://mathforum.org/
The Math Forum 홈페이지이다.
여러 수학 문제와 퍼즐 수학 관련 소식 등이 소개되어 있다.

• http://primes.utm.edu/
소수에 대한 여러 가지를 설명한 사이트이다.

• http://www.mathnet.or.kr/
한국과학기술원 수리과학연구정보센터 홈페이지로 수학과 관련된 사이트를 잘 정리하여 소개하였고 최근 수학계 연구 동향 및 학술 정보, 수학자 정보 등을 제공하며 수학 경시 대회, 수학 교육 관련 내용 등이 소개되어 있다.

• http://math.exeter.edu/
Wingeom, Winplot 등의 수학 관련 프로그램을 내려 받을 수 있다.

• http://www.peda.com/
GrafEq, Poly, Poly Pro, Tess 등의 프로그램을 내려 받을 수 있다.

02 퍼즐 관련 사이트

• http://www.cimt.plymouth.ac.uk/
엑서터(Exeter) 대학의 Centre for Innovation in Mathematics Teaching에서 만든 사이트로 다양한 레크레이션 수학을 소개하고 있다.

• http://user.chollian.net/~badang25/bdh03.htm/
칠교 놀이, 소마큐브, 펜토미노, 도형 조각 퍼즐 등 다양한 퍼즐이 소개되어 있다.

• http://www.stetson.edu/~efriedma/
스테츤(Stetson) 대학에서 수학과 컴퓨터학을 담당하는 교수인 Erich Friedman이 만든 사이트로 재미있는 퍼즐이 많이 소개되어 있다. 더욱이 창의적인 사고를 하게 하는 문제가 많이 소개되어 있다.

03 계산기 관련 사이트

• http://matrix.skku.ac.kr/sglee/
성균관 대학교 이상구 교수의 홈페이지로 그가 만든 공학용 계산기와 그래픽 계산기를 컴퓨터에서 직접 사용할 수 있다.

Ⅳ. 2006년 개정 수학과 교육과정의 해설

1. 수학과 교육과정 개정의 배경

01 개정의 필요성

21세기 지식 기반 사회에 적합한 인재는 숙련된 단순 기능인보다는 자기 주도적으로 지적 가치를 창조할 수 있는 자율적이고 창의적인 인간이라고 할 수 있다. 이를 위하여 초·중등학교 수학과에서는 수학의 기본적인 개념, 원리, 법칙을 토대로 탐구하고 추측하며 논리적으로 추론하는 수학적 사고력, 수학을 이용하여 정보를 처리하고 의사소통을 하는 능력, 수학적 지식과 방법을 활용하여 실생활이나 다양한 분야의 문제를 창의적으로 해결하는 문제해결력, 수학의 유용성과 가치를 이해하고 활용하는 능력, 수학에 대한 흥미와 자신감 등을 기르는 것이 필요하다.

1950년대 말 미국에서 수학 교육 현대화 운동이 시작된 이후로 세계 각국의 초·중등학교 수학과 교육과정에는 많은 변화가 있었다. 이 운동의 영향으로 초·중등학교 수학과 교육에 집합, 대응, 행렬 등과 같은 현대적인 수학 내용이 도입되었고, 정확한 수학적 용어와 기호 사용, 엄밀한 증명 등이 강조되었다. 1970년대에는 수학 교육 현대화 운동에 대한 비판과 반성이 나타나면서 '기본으로 돌아가기(back to basics)' 운동이 전개되었고, 1980년대에는 전 세계적으로 문제해결력을 강조하였으며, 1990년대 이후에는 문제해결력을 비롯하여 여러 고등 사고 능력을 포괄하는 수학적 힘의 신장을 강조하고 있다.

우리나라 초·중등학교 수학과 교육과정도 이러한 세계적인 흐름의 영향을 받아 점진적으로 변화되어 왔다. 1973년에 고시된 제3차 수학과 교육과정은 수학 교육의 현대화 운동의 영향을 받아 집합 언어를 기초로 하

는 현대적인 수학 내용을 도입하였고, 엄밀한 수학적 증명을 강조하였다. 그러나 1981년에 고시된 제4차 수학과 교육과정부터는 학생 수준을 고려하여 수학적 엄밀성에 대한 강조를 점진적으로 완화시키고 수학 학습 내용을 감축하는 한편 수학적 문제해결력 신장을 강조해왔다. 1997년 말에 고시된 제7차 수학과 교육과정은 수학적 힘의 신장을 강조하는 수학 교육의 세계적 동향 및 학습자의 자율과 창의성에 바탕을 둔 소위 학생 중심 교육과정이라는 총론의 기본 정신을 반영하여 구성되었다.

제7차 수학과 교육과정은 학교 교육을 공급자 중심에서 수요자, 즉 학생 중심으로 바라보도록 그 관점을 전환시켰고 학생들이 자신의 진로, 적성, 흥미, 필요에 맞게 과목을 선택하여 이수할 수 있도록 학생 선택의 자율권을 확대하였다는 점에서 긍정적 기여를 하였지만, 학교 현장에 적용·운영되는 과정에서 문제점을 드러내었고, 이에 대한 개선 요구가 줄곧 제기되었다. 또한 제7차 수학과 교육과정에서는 수학 교육의 세계적인 흐름을 반영하여 수학적 힘의 신장을 강조하였지만 다소 미흡한 점이 있었고, 현대 사회의 빠른 변화에 적응하고 미래 사회에 더욱 적합한 수학 교육을 요청하는 국가·사회적 요구가 많았다.

제7차 수학과 교육과정에 대한 개선 요구 사항을 좀 더 구체적으로 살펴보면 다음과 같다.

(1) 단계형 수준별 교육과정의 개선 필요

제7차 교육과정에서는 초등학교 1학년부터 고등학교 1학년까지의 국민 공통 기본 교육 기간에는 학생의 능력과 수준에 맞는 수학 수업을 위하여 수학 교과는 단계형 수준별 교육과정을 편성, 운영하도록 하였다. 단계형 수준별 교육과정에 따르면 학생들은 학년에 관계없이 자신의 능력과 수준에 맞는 단계의 수학 수업을 듣도록 하고, 매 단계를 마칠 때마다 해당 단계 도달 여부를 확인하는 평가를 실시하여 그 단계의 수준에 도달하지 못했으면 그 단계를 재이수하거나 특별 보충과정을 이수해야 한다. 모든 학생들이 자신의 능력과 수준에 적합한 수학 교육을 받을 수 있도록 하는 것은 우리나라뿐만 아니라 세계적으로 강조되는 현상이다. 그러나 우리나라 학교 현실을 고려할 때 단계형 수준별 교육과정은 개선될 필요가 있었다.

(2) 교육 내용의 적정화 필요

제7차 교육과정에서는 이전에 비하여 수학 교과의 내용을 30 % 감축하도록 하였다. 그러나 제7차 교육과정에서 수학과 수업 시간이 축소됨에 따라 학습량 감축이 실질적인 효과를 거두지 못하였다(신성균 외, 2005).

또한 수준별 교육을 강화하기 위하여 제7차 교육과정에서는 국어, 사회, 수학, 과학, 영어 교과의 경우, 교육과정에 기본 과정과 함께 심화 과정도 함께 제시하도록 하였다. 이러한 심화 과정의 내용이 수학 교과서에 기본 내용과 함께 제시되자, 교과서에 나오는 내용은 모두 지도해 달라는 학생과 학부모의 요구에 따라 각 학교에서는 학생의 수준에 관계없이 모든 학생들에게 기본 과정의 수학 내용뿐만 아니라 심화 과정의 수학 내용도 모두 지도하게 되면서 학습량이 과다하고, 학습 수준이 지나치게 높다는 비판을 받게 되었다(박선화 외, 2005).

한편, 무리하게 수학 교과의 내용을 감축하는 과정에서 일부 학습 주제가 학년 간, 교과 간 연계성이 떨어지고, 내용 영역 구분 방식에 따라 연관된 수학 내용을 분리하여 지도하도록 함으로써 학습 효과가 떨어지는 문제도 발생하였다(신성균외, 2005).

(3) 수학적 능력 신장의 강조 필요

1990년대 이후로 학교 수학 교육에서 강조하는 세계적인 흐름의 하나가 수학적 추론 능력, 의사소통 능력, 문제해결력과 같은 수학적 능력의 신장을 강조하는 것이다. 제7차 수학과 교육과정도 이러한 세계적 흐름을 반영하고는 있지만 다소 미흡하였다.

(4) 수학에 대한 정의적 태도 개선 필요

그동안 수학과 교수·학습에서는 문제해결력 신장과 같은 인지적 측면을 주로 강조해왔다. 그러나 학

생들의 수학에 대한 정의적 태도가 개선되지 않으면 학생들의 수학적 능력의 향상을 기대하기 어렵고, 점차 수학 학습을 기피하거나 수학에 대한 두려움이나 혐오감을 가지는 학생들이 증가하게 되어, 학생 개인의 경쟁력뿐만 아니라 우리나라의 국가 경쟁력도 저하될 우려가 있다. 특히, 최근에 실시한 국제 학업 성취도 비교 연구 결과를 살펴보면, 우리나라 학생들의 수학 성취도는 최상위권이지만, 수학에 대한 자신감과 수학의 가치에 대한 인식이 상대적으로 매우 낮고, 초등학교에서 중학교로 올라갈수록 수학 학습에 대한 흥미도가 점점 낮아지는 등 수학에 대한 부정적인 태도가 다른 나라에 비해 매우 높게 나타나고 있어, 이를 개선하려는 노력을 적극적으로 기울일 필요가 있다(이미경 외, 2004a).

02 개정의 기본 방향

2007년에 개정 고시된 2007년 개정 교육과정의 개정의 기본 방향은 제7차 교육과정의 기본 철학 및 체제 유지, 단위 학교별 교육과정 편성 · 운영의 자율권 확대, 국가 · 사회적 요구사항의 반영, 고등학교 선택 중심 교육과정 개선, 교과별 교육내용의 적정화 추진, 수업 시수 일부 조정의 6가지였다(교육인적자원부, 2007a). 2006년에 개정 고시된 2006년 개정 수학과 교육과정은 2007년 개정 교육과정과 동일한 방향에서 개정이 추진되었다. 따라서 2006년 개정 수학과 교육과정에서는 2007년 개정 교육과정의 개정의 기본 방향 중에서 수학과 국민 공통 기본 교육과정과 관련된 사항과 앞에서 논의한 제7차 수학과 교육과정 개정의 필요성을 반영하여 개정의 기본 방향을 다음과 같이 6가지로 설정하였다.

(1) 제7차 교육과정의 기본 철학 및 체제 유지

제7차 교육과정의 기본 철학은 자기 주도적으로 지적 가치를 창조할 수 있는 자율적이고 창의적인 인재 양성을 목표로 하면서 학습자 중심의 교육과정을 추구하는 것이었다. 이에 따라 개정 수학과 교육과정에서는 학생의 능력과 수준, 적성에 적합한 수준별 교육을 지속적으로 실시할 수 있는 기반을 제공하도록 한다. 또한 제7차 교육과정의 체제를 유지하기로 함에 따라 초등학교 1학년부터 고등학교 1학년까지는 국민 공통 기본 교육과정 체제로 편성 · 운영하고, 고등학교 2, 3학년은 선택 중심 교육과정으로 편성 · 운영하도록 한다.

(2) 수준별 수업의 편성 · 운영 권한의 학교 부여

제7차 교육과정에 이어 2007년 개정 교육과정에서는 단위 학교의 교육과정 편성 · 운영 권한을 더욱 확대하는 것을 기본 방향으로 하고 있다. 이에 따라 수학과에서도 수준별 교육에 필요한 심화 또는 보충 과정의 학습 내용을 단위 학교에서 선정하여 지도할 수 있도록 한다. 즉, 국가 수준의 교육과정에서는 모든 학생들이 필수적으로 학습해야 할 수학과 학습 내용만 제시하고, 단위 학교에서는 각 학교 학생의 능력과 수준, 적성에 적합하게 수학과 교육 내용 및 방법을 재조직하여 지도할 수 있도록 수준별 수업의 편성 · 운영 권한을 각 학교에 부여하도록 한다.

(3) 국가 · 사회적 요구사항 반영

수학과와 관련된 국가 · 사회적 요구사항으로는 학생들의 진로와의 연계성을 강화한 수학 학습이 이루어질 수 있도록 해달라는 것이다. 따라서 개정 수학과 교육과정에서는 학생들이 미래에 전공하게 될 학문 분야나 직업의 세계에서 필요로 하는 수학을 충실히 학습할 수 있도록 수학과 교육 내용을 개선하도록 한다.

(4) 수학과 교육 내용의 적정화 추진

개정 교육과정에서는 수학과 교육 내용을 학생들의 미래 생활이나 학습에서의 필요성, 학습량, 난이 수준, 학년 간, 학교급 간, 교과 간 연계성 측면에서 적정화하도록 한다. 즉, 다음 학년의 내용을 학습하거나 미래 사회를 살아가는 데 필요한 수학과 교육 내용을 정선하고, 수학 수업 시간을 고려하여 학생들의 수학 학습량과 난이 수준을 적절하게 조정하도록 한다. 또한 제7차 수학 교육과정의 문제점으로 지적된 일부 학습 주제의 학년 간, 학교급 간, 교과 간 연계성 부족 문제를 해결하도록 한다.

(5) 수학적 능력 신장 추진

초 · 중등학교 수학 교육의 주요 목표인 수학적 능력 신장은 개정 수학과 교육과정에서도 지속적으로 강조하도록 한다. 특히, 수학적 의사소통 능력 신장을 강조하는 세계적인 추세를 우리나라 수학과 교육과정에도 반영하도록 하며, 논리적 추론 능력, 개연적 추론 능력, 문제해결력 등의 신장을 강조한다.

(6) 수학에 대한 정의적 태도 개선 추진

학생 개인뿐만 아니라 우리나라의 국가 경쟁력 강화를 위해, 학생들이 수학 학습에 관심과 흥미를 갖게 하고, 수학 학습에 자신감을 갖도록 하며, 수학의 유용성과 가치를 인식하게 하는 등 수학에 대한 정의적 태도를 개선하도록 한다.

2. 우리나라 수학과 교육과정의 변천

광복 후 우리나라 수학과 교육과정 개정의 기본 방향을 정리하면 다음과 같다.

(1) 교수요목의 시기(1946~1954)

- 교과의 지도 내용을 상세히 표시하고, 기초 능력을 배양하는 데 주력한다.
- 교과는 분과주의를 채택하고, 체계적인 지도와 지력의 배양에 중점을 둔다.
- 우리나라의 교육 목표인 홍익인간의 정신에 입각하여 애국애족의 교육을 강조하고, 일제의 잔재를 정신이나 생활에서 시급히 제거한다.

(2) 제1차 교육과정의 시기(1954~1963)

교수요목의 시기의 문제점을 개선하며, 학생들이 필요로 하는 욕구와 사회의 요구를 참작하고, 심리적인 배열과 체계적인 면을 적절히 고려하여 수학의 기본적인 개념이나 원리를 알게 하고, 사고 능력의 양성, 기초적인 과정과 상호 관계, 문제해결과 응용 능력, 기능의 숙달 등에 대하여 그 내용을 결정하고 지도 방법을 개선함으로써, 결과적으로 교육 목적을 달성하는 데 좋은 효과를 올려야 한다.

(3) 제2차 교육과정의 시기(1963~1973)

- 수학의 체계를 근간으로 계통적인 내용을 학생의 심신 발달의 단계에 맞고 다음 교과와 병행할 수 있도록 학년별로 안배하여, 생활 문제해결에 실천적으로 활용할 수 있도록 한다.
- 과학, 기술의 급진적인 발달에 따라 지도 내용을 충실히 하고 정비하여 논증적인 사고 능력, 수리적인 처리 기능을 기르도록 한다.

(4) 제3차 교육과정의 시기(1973~1981)

- 집합 개념을 토대로 한다.
- 수학적 구조에 중점을 둔다.
- 엄밀성을 강조한다.
- 현대 수학의 발전에 비추어 교재를 재구성한다.
- 응용면이 넓은 교재를 조기에 도입한다.

(5) 제4차 교육과정의 시기(1981~1987)

- 수학의 기초적인 개념과 기능을 강조한다.
- 수학적 구조나 논리의 엄밀성을 무리하게 강조함을 지양한다.
- 지도 내용의 양을 적정 수준으로 경감한다.
- 학습자의 발달 수준에 맞게 수준을 적정화한다.
- 문제해결력을 강조한다.

(6) 제5차 교육과정의 시기(1987~1992)

- 최소의 필수 기본 지식 및 기능을 정선한다.
- 수학적 활동을 강화한다.
- 문제해결을 강화한다.
- 정의적 측면을 강조한다.

(7) 제6차 교육과정의 시기(1992~1997)

- 범국민적 기초 소양으로서의 수학 교육을 한다.
- 수학적 사고력을 신장한다.
- 문제해결력을 신장한다.
- 수학의 실용성을 강조한다.
- 계산기나 컴퓨터를 수학적 도구로 활용한다.
- 학생의 적성, 능력, 진로 등에 적합한 학습의 기회를 제공한다.
- 다양한 교수 · 학습 방법과 평가 방법을 이용한다.

(8) 제7차 교육과정의 시기(1997~2007)

- 단계형 수준별 교육과정으로 구성한다.
- 수학 학습 내용을 적정화한다.
- 학습자의 활동을 중시한다.
- 수학 학습에 흥미와 자신감을 가지게 한다.
- 다양한 학습 도구를 활용한다.

(9) 2006년 개정

- 수준별 수업 운영을 권장한다.
- 교육 내용을 적정화한다.
- 수학적 능력의 신장을 강조한다.
- 수학의 가치를 재고하고 정의적 측면을 강조한다.
- 문서 체제를 개선한다.

광복 후 우리나라의 수학 교육과정의 변천을 간단히 표로 정리하면 다음과 같다.

기별	공포(고시)	근거	특징
교수요목기	1947.9.1		• 광복 전 일본 체제의 교육과정 • 실용에 치중되었으며, 지도 내용이 어렵고 과다함. • 가르칠 주제를 열거하는 교수요목의 형태 • 해방 전의 교육 내용의 답습
제1차	1954.4.20	문교부령 제 35호	• 교과 중심 교육과정 • 생활 중심 수학 교육 • 수학 용어의 한글화
	1955.8.1	문교부령 제46호 고등학교 교육과정	
제2차	1963.2.15	문교부령 제120호 고등학교 교육과정	• 경험 중심 교육과정 • 수학의 계통성 중시 • 수학 교육 현대화 운동 일부 반영
제3차	1974.12.31	문교부령 제350호 고등학교 교육과정	• 학문 중심 교육과정 • 수학 교육 현대화 운동의 정신 반영 • 수학 내용의 조기 도입 • 수학의 구조와 엄밀성 강조
제4차	1981.12.31	문교부령 제442호 고등학교 교육과정	• 수학 교육 현대화 운동의 반성 • '기본으로 돌아가기' 정신의 반영 • 학습 부담 경감을 위한 학습 내용 축소 • 문제해결 학습의 중요성 인식
제5차	1987.3.31	문교부 고시 제88-7호 고등학교 교육과정	• 학습 부담 경감을 위한 학습 내용 축소 • 문제해결력의 강조
제6차	1992.10.30	교육부 고시 제1992-19호 고등학교 교육과정	• 학습 부담 경감을 위한 학습 내용 축소 • 정보화 사회 대비 • 문제해결력의 강조 • 다양한 평가 방법 권장
제7차	1997.12.30	교육부 고시 제1997-15호 고등학교 교육과정	• 학습자 중심 교육과정 • 수준별 교육과정(단계형과 과목 선택형) • 학습 부담 경감을 위한 학습 내용 축소 • '수학적 힘'의 신장 도모
2006년 개정	2006.8.29	교육인적자원부 고시 제2006-75호 수학과 교육과정	• 현실 적합한 수준별 수업 방안 제시 • 교육 내용의 적정화 • 수학적 사고력 및 의사소통 능력 신장 강조 • 수학의 가치 제고와 정의적 측면 강조

3. 개정 수학과 교육과정 개정의 중점

개정 수학과 교육과정은 교육과정 개정의 기본 정신을 반영하고, 수학과 교육과정 개정의 필요성과 외국의 수학 교육 동향, 그리고 제7차 수학과 교육과정의 운영상의 문제점을 고려하여 다음과 같은 개정의 중점 사항을 설정하였다.

01 수준별 수업의 도입

수학은 학생들의 개인 차이가 가장 크게 드러나는 교과이므로, 수학 수업에서는 특히 학생들의 수준 차이에 대응되는 적절한 내용을 제공할 필요가 있다. 이러한 필요성에 따라 학생이 자기의 능력 수준에 맞는 학습을 할 수 있는 수준별 교육이 고안되었다.

제7차 단계형 수준별 교육과정은 우리나라 학교 상황에서 현실적으로 운영에 어려운 점이 많아 현재 명목상으로만 존재하고 있다. 개정 교육과정에서는 특별 보충과정을 형식적으로 운영하는 것을 제외하고는 편성 · 운영이 이루어지지 않고 있는 단계형 수준별 교육과정을 개정하여 수준별 수업 운영을 권장하고 있다. 이것은 수준별 교육과정을 도입한 본래의 취지인 '학생의 능력과 수준, 적성에 적합한 교육 실시' 라는 본질적인 정신은 살리면서도 우리나라 학교 상황에서 운영 가능한 수준별 수업을 할 수 있도록 하기 위한 것이다. 이를 위하여 각 학교에서는 학생의 능력과 수준, 적성, 희망 등을 고려하여 학교 상황에 맞는 수준별 집단을 편성 · 운영할 수 있도록 하였다.

수준별 교육과정의 아이디어를 내용상으로 구현한 것이 '익힘책' 의 도입이라고 할 수 있다. 심화 과정도 마찬가지이지만 보충 과정에 선정될 수 있는 내용은 학생에 따라 천차만별일 수 있으므로, 국가 수준의 교육과정에서는 이를 일률적으로 제시하지 않았다.

그 대신 익힘책의 보충 과정에 해당하는 최소 필수 내용 선정시 고려해야 할 사항이나 보충 과정 내용의 예시를 제시함으로써, 보충 과정 내용을 선정하는 데 도움이 되도록 하고 있다.

익힘책에 제시된 심화 과정은 기본 과정을 성공적으로 학습한 학생들이 발전적으로 학습할 수 있는 내용으로, 기본 과정에서 습득한 지식을 실생활에 활용하는 다양한 방법을 찾아보거나, 문제해결력의 배양과 관련된 내용이 주류를 이룬다.

그러나 심화 과정의 내용이 상위 단계에서 학습할 수학적 개념, 원리, 법칙을 미리 도입하거나 탐구하게 해서는 안 된다. 즉, 심화 과정이 속진의 의미나 난이도상의 심화로 해석되어서는 안된다.

02 선택 중심 교육과정의 구성 및 다양한 선택 과목의 설정

고등학교 2학년, 3학년에 해당되는 선택 중심 교육과정의 기본 취지는 다양한 선택 과목을 제시하고, 학생들은 자신의 능력, 진로, 적성에 부합되는 과목을 선택하여 학습할 수 있도록 한다는 것이다. 고등학교 2학년과 3학년 학생은 선택 과목 중에서 자신의 진로와 능력, 흥미 등을 고려하여 과목을 선택할 수 있다.

수학 계열의 교과목명과 상세한 구분은 다음과 같다.

(1) 수학의 활용

'수학의 활용' 은 국민 공통 기본 교육 기간인 고등학교 1학년까지의 수학을 학습한 학생이면 선택할 수 있는 과목으로, 실생활에 필요한 수학적 지식과 기능을 습득하도록 하는데 적합하다. '수학의 활용' 의 학습을 통하여 실생활의 여러 가지 문제를 수학의 관점에서 이해하고 합리적으로 해결하는 능력을 신장시키며, 수학에 대한 관심과 흥미를 길러 수학에

대한 긍정적 태도를 기를 수 있다.

'수학의 활용' 의 내용은 '명제와 논리', '지수와 로그', '수열', '확률과 통계', '도형과 그래프' 로 구성된다.

(2) 수학 I

'수학 I' 은 국민 공통 기본 교육 기간인 고등학교 1학년까지의 수학을 이수한 다음 보다 높은 수준의 수학을 학습하기 위하여 선택할 수 있는 기본 과목이다. '수학 I' 의 학습을 통하여 수학적 개념, 원리, 법칙을 이해하고 수학적 사고 능력을 키워, 합리적이고 창의적으로 문제를 해결하는 능력과 태도를 기를 수 있다.

'수학 I' 의 내용은 '행렬과 그래프', '지수함수와 로그함수', '수열', '수열의 극한' 으로 구성된다.

(3) 미적분과 통계 기본

'미적분과 통계 기본' 은 국민 공통 기본 교육 기간인 고등학교 1학년까지의 수학을 이수한 후 보다 높은 수준의 수학을 학습하기 위하여 선택할 수 있는 과목으로, 대학에 진학하여 인문과학, 사회과학 등의 분야를 전공하고자 하는 학생이 이수하기에 알맞은 과목이다. '미적분과 통계 기본' 의 학습을 통하여 수학의 기본적인 개념, 원리, 법칙을 이해하고 수학적 사고 능력을 키워, 합리적이고 창의적으로 문제를 해결하는 능력과 태도를 기를 수 있다.

'미적분과 통계 기본' 의 내용은 '함수의 극한과 연속', '다항함수의 미분법', '다항함수의 적분법', '확률', '통계' 로 구성된다.

(4) 수학 II

'수학 II' 는 국민 공통 기본 교육 기간인 고등학교 1학년까지의 수학을 이수한 후 보다 높은 수준의 수학을 학습하기 위하여 선택할 수 있는 과목으로, 대학의 자연 계열 또는 공학 계열로 진학을 희망하는 학생에게 필요한 기본 과목이다. '수학 II' 는 심화된 수학적 지식과 사고방법을 습득하고, 논리적 추론 능력을 키워 문제를 합리적으로 해결하는 능력과 태도를 기르게 함으로써 자연 과학 및 공학 분야의 학습에 기초를 제공한다. '수학 II' 의 내용은 '방정식', '부등식', '삼각함수', '함수의 극한과 연속', '미분법' 으로 구성된다.

(5) 적분과 통계

'적분과 통계' 는 국민 공통 기본 교육 기간인 고등학교 1학년까지의 수학을 이수한 후 보다 높은 수준의 수학을 학습하기 위하여 선택할 수 있는 과목으로, 대학의 자연 계열 또는 공학 계열로 진학을 희망하는 학생에게 필요한 기본 과목이다. '적분과 통계' 는 심화된 수학적 지식과 사고방법을 습득하고, 논리적 추론 능력을 키워 문제를 합리적으로 해결하는 능력과 태도를 기르게 함으로써 자연 과학 및 공학 분야의 학습에 기초를 제공한다. '적분과 통계' 의 내용은 '적분법', '순열과 조합', '확률', '통계' 로 구성된다.

(6) 기하와 벡터

'기하와 벡터' 는 국민 공통 기본 교육 기간인 고등학교 1학년까지의 수학을 이수한 후 보다 높은 수준의 수학을 학습하기 위하여 선택할 수 있는 과목으로, 대학의 자연 계열 또는 공학 계열로 진학을 희망하는 학생에게 필요한 과목이다. '기하와 벡터' 는 심화된 수학적 지식과 사고방법을 습득하고, 논리적 추론 능력을 키워 문제를 합리적으로 해결하는 능력과 태도를 기르게 함으로써 자연 과학 및 공학 분야의 학습에 기초를 제공한다. '기하와 벡터' 의 내용은 '일차변환과 행렬', '이차곡선', '공간도형과 공간좌표', '벡터' 로 구성된다.

03 교육 내용의 적정화

개정 교육과정에서는 수학과 교육 내용을 학생들의 미래 생활이나 학습에서의 필요성, 학습량, 난이 수준, 학년 간, 학교급 간, 교과 간 연계성의 측면에서 적정화하였다. 이를 구체적으로 살펴보면 다음과 같다.

첫째, 학생들의 미래 생활이나 학습에서의 필요성과 관련하여 수학과 교육 내용을 적정화하였다.

실생활에 널리 활용되고 여러 나라에서 공통적으로 지도되고 있는 수학적 개념에 대한 지도를 보강하도록 하였다.
둘째, 수학의 학습량과 난이 수준을 적정화하였다.
셋째, 개정 교육과정에서는 학년 간, 학교급 간, 교과 간의 연계성을 강화하고 연관된 내용은 밀접하게 관련지어 학습할 수 있도록 함으로써 학습 효과를 높일 수 있게 하였다.

04 수학적 능력의 신장 강조

수학적 능력 신장을 강조하기 위하여 수학과 교육 목표, 내용, 교수 · 학습 방법, 평가 등 교육과정 전반에서 일관되게 수학적 능력 신장과 관련된 언급을 하고 있다. 예를 들어, 교수 · 학습 방법에서는 수학적 사고와 추론 능력 신장을 위하여 귀납, 유추 등을 통해 학생 스스로 수학적 사실을 추측하게 하고, 이를 정당화하거나 증명해 보게 하며, 수학적 사실이나 명제를 분석하고, 수학적 관계를 조직하고 종합해 보며, 학생 자신의 사고 과정을 반성해 보게 하고 있다.
수학적 문제해결력 신장은 제4차 교육과정 이래로 수학 교육의 목표로 강조해 온 사항이며 미래를 살아갈 학생들에게도 지속적으로 필요한 능력이라는 점에서 개정 교육과정에서도 지속적으로 강조될 필요가 있다. 이를 위하여 개정 교육과정에서는 교육 목표에서뿐만 아니라 내용, 교수 · 학습 방법, 평가에 걸쳐 일관되게 강조하고 있다.

05 수학의 가치 제고와 정의적 측면 강조

국제 학업 성취도 비교 평가에서 우리나라 학생들의 수학 성취도가 전 세계에서 최상위권이면서도 수학에 대한 관심과 흥미가 적고 수학에 대한 자신감이 부족하며 수학에 대한 부정적인 태도가 다른 나라에 비해 매우 높게 나타나는 사실은 학생의 입장에서 뿐만 아니라 국가적으로도 심각한 문제가 아닐 수 없다. 이러한 현실을 개선하기 위하여 수학과 교육과정에서는 수학과 교육목표에서부터 수학에 관심과 흥미를 갖도록 하고, 수학의 가치를 이해하며 수학에 대한 긍정적 태도를 기르도록 할 것을 강조하였다.

06 문서 체제 개선

단계형 수준별 교육과정이 개정됨에 따라 교육과정 문서 체제도 다소 변화하였다.
첫째, '단계' 라는 용어 대신에 '학년', '학기' 라는 용어를 사용하였다. 즉, 1−가 단계와 1−나 단계를 묶어 1학년으로 나타내고, 1−가 단계는 1학년 1학기로 나타내었다.
둘째, 수학과 목표를 제시할 때, 국민 공통 기본 교육 기간 10년에 걸친 총괄 목표 외에도 초등학교, 중학교, 고등학교의 학교급별 목표를 제시하였다. 이것은 학교급별 교육의 목표를 좀 더 구체적으로 제시하는 것이 필요하다는 총론의 방침을 따른 것이다. 한편, 제7차 교육과정에서는 수학과에만 '단계별 목표' 를 제시하였다. 그러나 모든 교과의 교육과정 문서 체제가 일관성을 유지하는 것이 필요하고, '단계별 목표' 와 학습 내용 사이에 중복이 심하다는 의견에 따라 이를 삭제하였다.
셋째, 내용 영역을 20단계로 제시하던 것을 학년 단위로 제시하였다. 학년 단위로 학습 내용을 제시함으로써 교사가 학교와 학생의 여건에 맞게 학습 내용을 탄력적으로 조절하여 수업할 수 있도록 하였다.
넷째, 초등학교와 중 · 고등학교 내용 영역명을 구분하였다. 제7차 교육과정에서는 국민 공통 기본 교육 기간인 10년 동안에 수학의 계통성을 고려하고 학습 내용의 일관성을 유지하기 위하여 초, 중, 고등학교의 내용 영역명을 통일하여 제시하였다. 그러나 학교급별로 강조하거나 중점적으로 다루어야 할 내용이 약간씩 다르고 각 내용 영역에 속한 내용의 적절성 논란이 심해짐에 따라, 학교급별 학습 내용의 특성을 살리고 학습 내용 간의 연계성을 강화하기 위하여 학교급별로 내용 영역명을 다소 다르게 제시하였다. 이에 따라 초등학교 수학은 수와 연산, 도형, 측정, 확률과 통계, 규칙성과 문제해결의 5개 영역으로 구분하여 제시하였고, 중 · 고등학교 수학은 수와 연산, 문자와 식, 함수, 확률과 통계, 기하의 5개 영역으로 구분하여 제시하였다.

4. 수학과 교육과정 해설

01 성격

(1) 수학의 개관

수학은 수량과 관련된 수학적 사실, 관계, 규칙을 다루며, 공간에서 일어나는 다양한 현상들에 대해 연구하는 분야이다. 수학은 우리 인간의 생활 영역이나 지식의 세계에서 주로 수리적 계산이나 사고, 공간 감각과 직접적인 관련이 있으며, 또한 개인의 생각이나 개념을 정확하고 간결하게 전개, 표현하는 것을 용이하게 해 준다. 여기에서는 이러한 수학의 특성과 가치를 알아보고자 한다.

① 수학의 특성

수학은 추상성, 이상성, 실용성, 논리성과 직관성, 형식성, 일방성과 특수성, 계통성 등의 특성을 가지고 있다(교육부, 1999a).

추상성은 어떤 구체물의 집합에서 이질적인 속성을 제거하고, 동질적인 속성만을 추출하는 추상화 과정과 관련된 것으로, 수학에서 다루는 대상은 대부분 추상화하여 얻어진 개념이라는 점에서 추상성은 수학 교과가 가지는 핵심적 특성이라고 할 수 있다. 이상성은 추상성과 밀접하게 관련된 것으로, 수학적 사고 과정에서 그 사고의 대상인 사물이나 현상에 대하여 사고의 대상이 되는 사물이나 현상을 그 겉모양으로 보는 것이 아니라, 최적의 사고가 가능하도록 본질적인 요소만 고려하여 새로이 바람직한 형태로 단순화시킴으로써 얻게 되는 특성이다.

땅의 넓이나 산의 높이를 구할 때 수학의 이론을 적용하여 측정하는 것과 같이 실제 생활에서 수학이 유용하게 사용되는 점, 다른 교과의 학습을 돕는 기초적인 도구 교과로서의 역할을 수행하는 점은 수학의 실용성을 보여준다.

한편, 전제나 선행 명제로부터 결론이나 후속 명제를 타당하게 이끌어 내는 논리성은 다른 어떤 교과보다 수학 교과에 특징적인 것이다. 그러나 논리적으로 정당화되는 대상은 사실상 직관에 의해서 발견되고, 발명되는 경우가 많다는 점에서 수학에서 직관성도 매우 중요하다. 또한 수학의 개념이나 원리가 추상화의 사고 과정을 통하여 발견되고 추출된 다음, 더욱 발전된 일반성을 가지는 활용 방법을 얻는 과정에서 갖출 필요가 있는 격식인 형식성은 수학적 표현의 엄밀성을 보장하기 위한 장치로서, 수학의 힘을 증대시키고 효율적인 사고를 가능하게 해 주는 특징적인 것이다.

일반성은 하나의 대상에 대한 고찰로부터 그 대상을 포함하는 집합에 대한 고찰로 확장시키는 일반화의 성질을 가리키는 것으로 수학에서 사용되는 여러 가지 원리와 법칙을 발견(구성)하게 해 준다. 특수성은 주어진 대상의 집합에 대한 고찰로부터 그 집합에 포함되는 더 작은 집합 또는 단 하나의 대상에 대한 고찰로 옮겨가는 특수화의 성질을 가리키는 것으로, 일반화된 명제를 검증하거나 그 증명 또는 풀이에 대한 실마리를 제공해 주기도 한다.

계통성은 어떤 기초적인 내용을 기반으로 하여 그 기반 위에 다른 내용을 더 첨가함으로써, 발전되고 통합된 새로운 내용을 일관성 있게 이어나가는 것으로, 수학적 개념의 확장과 관련된다. 수학은 어느 교과보다도 계통성이 강한 교과이며, 계통성은 학습 내용의 순서를 정할 때 논리적 연결성을 가지고 학습이 단계적으로 이루어지도록 해 준다.

② 수학의 가치

수학의 가치에 대한 논의는 수학을 가르쳐야 하는 이유와 직결되는 것으로 수학 교육의 목표를 설정하고 그 의의를 찾는 바탕이 된다. 수학의 가치로는 다음과 같은 네 가지가 일반적으로 제안되고 있다.

첫째는 수학의 실용적 가치이다. 이는 수학을 배우면 사회 생활을 하는 데 그리고 장차 과학이나

다른 학문을 하는 데 유익하다는 것이다. 수 개념이나 사칙연산 등과 같이 어떤 수학적 지식은 사회 생활을 하는 데 필수적이며, 또 어떤 수학적 지식은 사회 생활에 직접 소용이 되지 않는다 하더라도 다른 학문을 하는 데 필수적이다. 과학 기술의 발달로 수학을 필요로 하는 분야가 많아지고 수학의 중요성이 점점 증대되고 있을 뿐만 아니라 공학, 경제학을 비롯하여, 산업, 금융, 국방, 정보통신, 의학 등 많은 학문 분야에서 수학은 기초적인 학문으로서 중요한 역할을 한다.

둘째는 수학의 도야적 가치이다. 이는 수학을 배우면 우리의 정신 능력을 신장시킬 수 있다는 것이다. 수학을 배우면서 습득한 합리적이고 논리적인 사고력, 추상화 능력, 창의성, 비판적 사고 능력, 기호화하고 형식화하는 능력, 단순화하고 종합화하는 능력 등은 수학이 아닌 다른 분야에서도 그 위력을 발휘할 수 있다. 이러한 능력은 수학과 관련이 없는 분야에 진출하는 사람에게도 요구되는 정신능력으로서 수학을 배워야 하는 강력한 이유가 된다.

셋째는 수학의 심미적 가치이다. 이는 수학적 대상도 아름다우며, 수학의 공식이나 방법이 절묘하고 아름답게 적용되는 것을 통해 수학의 아름다움을 느낄 수 있다는 것이다. 학생들 수준에서 수학의 심미적 가치를 쉽게 인식하기는 어렵지만, 많은 수학자들이 수학에서 볼 수 있는 추상화된 아이디어들의 아름다움을 강조하였다. 우주와 자연의 조화로운 질서를 밝혀내는 수학적 개념과 이론들은 그 자체로 아름답다.

넷째는 수학의 문화적 가치이다. 이는 인류가 오래전부터 오늘날까지 구축해 온 수학이라는 지적 문화 유산을 수용하고 다음 세대에 잘 전달하는 것이 가치가 있다는 것이다. 수학은 수많은 사람들의 노력을 거쳐 생동하며 발전해 오면서 각 시대마다 그 사회 발전에 공헌해 왔으며, 현대에도 다방면에 걸쳐 기여하는 바가 큰 인류의 소중한 정신적, 문화적 유산이다. 그러므로 수학을 배우는 것은 곧 인류가 남긴 문화적, 학문적 유산을 계승하여 활용하고 발전시키는 일에 참여하는 셈이 된다.

학교수학이 다루는 내용은 학문으로서의 수학의 수준이나 그 범위와는 차이가 있다. 하지만 수학 교과를 학습함으로써 학습자가 획득하기를 기대하는 것은 수학의 학문적 특성과 가치의 맥락에서 크게 벗어나지 않는다. 수학을 가르치고 배우는 활동 속에서 사용되는 소재와 내용이 무엇이든지 간에 그것을 통해 수학의 특성을 인식하고 그 가치를 느끼는 것이야말로 수학 교육을 통해 달성할 중요한 목적이라고 할 것이다. 그러므로 수학을 가르치는 교사가 먼저 수학이 지닌 독특한 특성과 그 가치를 느끼고, 수업을 통해 그와 같은 것이 학생들에게 전달될 수 있어야 할 것이다.

⑵ 수학과 목적

수학과는 수학적 개념, 원리, 법칙을 이해하고 논리적으로 사고하며, 여러 가지 현상을 수학적으로 관찰하고 해석하는 능력을 기르고, 여러 가지 문제를 수학적인 방법을 사용하여 합리적으로 해결하는 능력과 태도를 기르는 교과이다.

⑶ 수학 학습의 필요성

수학적 개념의 깊이 있는 이해와 활용, 합리적인 문제해결 능력과 태도는 모든 교과를 성공적으로 학습하는 데 필수적일 뿐만 아니라 개인의 전문적인 능력을 향상시키고 민주 시민으로서 합리적 의사 결정 방법을 습득하는 데에도 필요하다. 또한 수학적 지식과 사고 방법은 오랜 역사를 통해 인간 문명 발전의 지적인 동력의 역할을 해 왔으며, 미래의 지식 기반 정보화 사회를 살아가는 데 필수적이다.

⑷ 수학과 교육 내용

초등학교 수학과 교육 내용은 '수와 연산', '도형',

'측정', '확률과 통계', '규칙성과 문제해결'의 5개 영역으로 구성된다. '수와 연산' 영역에서는 자연수, 분수, 소수의 개념과 사칙계산을, '도형' 영역에서는 평면도형과 입체도형의 개념과 성질을, '측정' 영역에서는 길이, 시간, 들이, 무게, 각도, 넓이, 부피의 개념과 활용을, '확률과 통계' 영역에서는 자료의 정리와 해석, 경우의 수, 확률의 의미를, '규칙성과 문제해결' 영역에서는 규칙 찾기, 비와 비례, 문자의 사용, 간단한 방정식, 정비례와 반비례, 여러 가지 문제해결 방법을 다룬다.

중학교와 고등학교 수학과 교육 내용은 '수와 연산', '문자와 식', '함수', '확률과 통계', '기하'의 5개 영역으로 구성된다.

중학교의 경우, '수와 연산' 영역에서는 집합, 정수, 유리수, 실수의 개념과 사칙계산, 근삿값을, '문자와 식' 영역에서는 다항식의 개념과 사칙계산, 일차방정식과 일차부등식, 연립일차방정식과 연립일차부등식, 이차방정식의 풀이와 활용을, '함수' 영역에서는 함수 개념, 일차함수의 개념과 활용, 이차함수의 개념을, '확률과 통계' 영역에서는 도수분포에 대한 이해와 활용, 확률의 기본 성질, 대푯값과 산포도를, '기하' 영역에서는 기본 도형의 성질에 대한 이해와 증명, 피타고라스의 정리, 삼각비에 대한 이해와 활용을 다룬다.

고등학교의 경우, '수와 연산' 영역에서는 집합의 연산 법칙, 명제의 이해와 활용, 실수의 성질, 복소수의 개념과 사칙계산을, '문자와 식' 영역에서는 다항식의 연산과 활용, 유리식과 무리식의 계산, 이차방정식의 활용, 고차방정식, 연립방정식, 이차부등식, 연립부등식, 절대부등식의 풀이를, '함수' 영역에서는 이차함수의 활용, 유리함수, 무리함수, 삼각함수의 개념과 활용을, '확률과 통계' 영역에서는 순열과 조합의 이해를, '기하' 영역에서는 평면좌표, 직선의 방정식, 원의 방정식, 도형의 이동, 부등식의 영역의 이해와 활용을 다룬다.

(5) 수학과 교수 · 학습 방향

수학의 교수 · 학습에서는 학생이 구체적인 경험에 근거하여 여러 가지 현상을 수학적으로 해석하고 조직하는 활동, 구체적인 사실에서 추상화 단계로 점진적으로 나가는 과정, 직관이나 구체적인 조작 활동에 바탕을 둔 통찰 등의 수학적 경험을 통하여 형식이나 관계를 발견하고, 수학적 개념, 원리, 법칙 등을 이해할 수 있도록 한다. 또한 수학적 문제를 해결하는 과정에서 문제를 명확히 이해하고 합리적인 해결 계획을 세워 실행하며, 반성을 통하여 풀이 과정을 점검하고 다양하게 활용하는 태도를 기르도록 한다. 수학적 지식과 기능을 활용하여 실생활의 여러 가지 문제를 해결해 봄으로써 수학의 필요성과 유용성을 인식하고, 수학 학습의 즐거움을 경험함으로써 수학에 대한 긍정적인 태도를 가지도록 한다.

02 목표

발전된 수학적 지식과 기능을 습득하고 수학적으로 사고하고 의사소통하는 능력을 길러, 여러 가지 현상과 문제를 수학적으로 고찰하고 합리적으로 해결하는 능력을 기르며, 수학에 대한 긍정적 태도를 기른다.

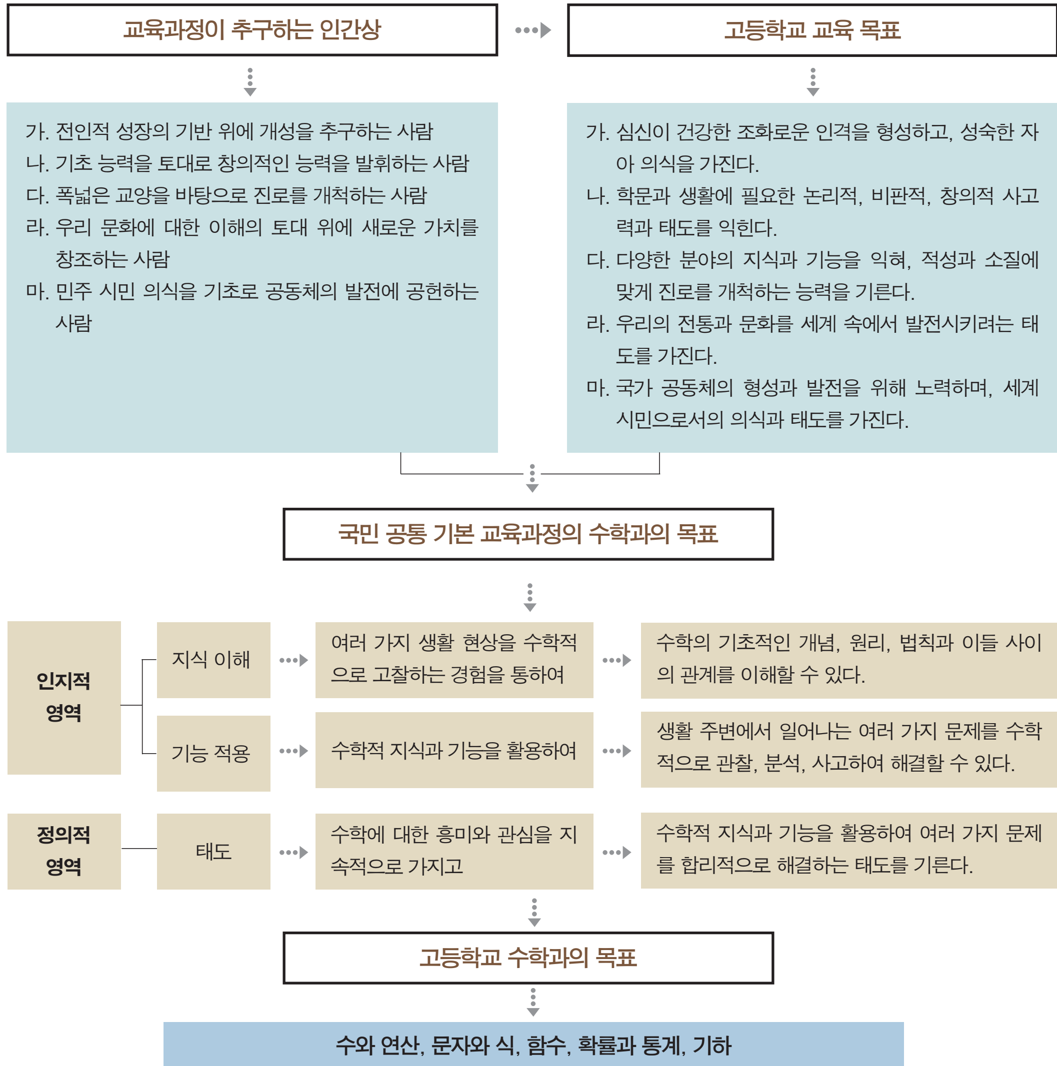
가. 여러 가지 현상을 수학적으로 관찰, 분석, 조직하는 경험을 통하여 수학의 발전된 개념, 원리, 법칙과 이들 사이의 관계를 이해하는 능력을 기른다.

나. 수학적으로 사고하고 의사소통하는 능력을 길러, 여러 가지 문제를 해결하는 능력을 기른다.

다. 수학에 대한 관심과 흥미를 지속적으로 가지고, 수학의 가치를 이해하며, 수학에 대한 긍정적 태도를 기른다.

(1) 목표 체계표

수학과의 목표는 고등학교 교육 목표를 바탕으로 하고 있고, 고등학교 교육 목표는 교육과정에서 추구하고 있는 인간상을 그 출발점으로 삼고 있다. 수학과 목표는 이런 배경을 지니고 있는 바, 일련의 목표 사이의 위계 관계를 체계화하여 표로 나타내면 다음과 같다.



(2) 총괄 목표

2006년 개정 수학과 교육과정에서 고등학교 수학과의 목표는 다음과 같은 국민 공통 기본 교육과정 전체에 대한 수학과의 총괄적인 목표와 관련지어 이해되어야 한다.

수학의 기본적인 지식과 기능을 습득하고, 수학적으로 사고하는 능력을 길러, 실생활의 여러 가지 문제를 합리적으로 해결할 수 있는 능력과 태도를 기른다.

2006년 개정 교육과정이 추구하는 인간상을 구현하기 위한 수학 교육의 목표는 크게 두 가지 측면으로 나누어 생각할 수 있다. 하나는 수학적 지식과 기능의 습득 및 그 응용이며, 다른 하나는 수학적 사고력의 신장과 수학적 태도의 함양이다. 이런 의미에서 고등학교 수학과에서는 고등학교 학생들이 가져야 할 기초적인 수학적 지식의 습득을 중요시함과 동시에 이를 토대로 여러 가지 사물의 현상을 수학적으로 표현하고, 사고하고, 처리하는 능력과 수학적 태도의 육성을 그 목표로 하고 있다.

(3) 하위 목표

총괄 목표에 이어 고등학교 수학과의 하위 목표가

인지적 영역과 정의적 영역으로 구분되어 제시되어 있다. 인지적 영역에서는 수학적 지식과 이해, 기능과 적용에 대하여, 정의적 영역에서는 수학적 태도에 관하여 각각 설명하고 있다.

가. 여러 가지 생활 현상을 수학적으로 고찰하는 경험을 통하여 수학의 기초적인 개념, 원리, 법칙과 이들 사이의 관계를 이해할 수 있다.

나. 수학적 지식과 기능을 활용하여 생활 주변에서 일어나는 여러 가지 문제를 수학적으로 관찰, 분석, 조직, 사고하여 해결할 수 있다.

다. 수학에 대한 흥미와 관심을 지속적으로 가지고, 수학적 지식과 기능을 활용하여 여러 가지 문제를 합리적으로 해결하는 태도를 기른다.

목표 '가' 항은 수학과의 학습 지도에 있어 지식과 이해에 관한 목표라고 볼 수 있다. 먼저, 일상생활에서 일어나고 관찰되는 여러 현상을 수학적으로 생각하는 활동을 통하여 수학의 기초적인 개념, 원리, 법칙과 이들 사이의 관계로부터 구성된 원리, 법칙 등을 학습자가 찾아내어 이해하도록 지도해야 한다는 것이다.

목표 '나' 항은 학습 지도에 있어 기능 · 적용에 관한 목표이다. 이 목표는 수학적 지식과 기능을 바탕으로 여러 가지 생활 문제를 수학적으로 해결할 수 있는 능력을 기르게 하는 것이다.

목표 '다' 항은 태도에 관한 목표라고 할 수 있다. 이 목표는 앞의 목표 '가' 와 '나' 의 달성 없이는 기대할 수 없을 것이며, 역으로 수학에 대한 흥미와 관심 없이 목표 '가' 와 '나' 의 효과적인 달성은 어려울 것이다. 따라서 목표 '다' 는 목표 '가' 와 '나' 항의 지도를 통하여 수학에 대한 흥미와 관심을 지속적으로 가질 수 있도록 하고, 이를 바탕으로 하여 사물의 현상을 합리적으로 생각하여 해결하고자 하는 태도를 육성하도록 지도하자는 것이다.

03 교수 · 학습방법

개정 수학과 교육과정에서 교수 · 학습 방법의 특징은 학습자의 심리, 인지 수준 및 학습 능력을 최대한 고려하여, 이를 학교 현장의 실제 수학 수업에 구현하려는 이른바 학습자 중심의 교수 · 학습의 의지를 강하게 나타내고 있다는 점이다. 즉, 개정 수학과 교육과정의 교수 · 학습은 학습자의 수준에 따른 수준별 학습 적용, 학습 방법의 다양화, 학습자의 능동적 학습 활동 강조, 학습자의 수학 학습에 대한 흥미와 관심의 유발, 학습자의 실제 경험과 관련된 문제해결 강조 등을 강조하고 있다. 이와 관련하여 세부적인 사항을 살펴보면 다음과 같다.

(1) 교육과정 내용의 지도 방법

① 교육과정에 제시된 내용은 모든 학생이 도달해야 할 성취 기준이므로, 학생의 특성, 학년 간 연계성, 지역성 및 현실성을 고려하여 적절히 지도되어야 한다.

② 학년별 내용의 배열 순서가 반드시 교수 · 학습의 순서를 의미하는 것은 아니므로, 교수 · 학습 계획을 수립하거나 학습 자료를 개발할 때에는 내용의 특성과 난이도, 학교 여건 등을 고려하여 내용, 순서 등을 재구성할 수 있다.

(2) 보충 · 심화 학습의 기회 부여

교육과정에 제시된 내용을 지도한 후 학습 결손이 있는 학생에게는 보충 학습, 우수한 학생에게는 심화 학습의 기회를 추가로 제공할 수 있다.

교육과정에는 기본 내용만 제시하고 있으며, 교육과정상 명시된 기본 내용을 지도한 후 여전히 학습 목표에 제대로 도달하지 못한 학생들에게는 보충 학습의 기회를 제공할 수 있다. 이는 강제적 규정은 아니지만 학교 현장에서는 교육과정에 제시된 기본 내용에 대한 일반적인 이해나 학습이 제대로 이루어지지 못했다고 판단되는 학생들을 위하여 제반 여건이 허락하는 범위 내에서 보충 학습의 기회를 부여할 수 있다.

한편, 교육과정에 제시된 기본 내용을 지도한 후 우수한 학생에게는 심화 학습의 기회를 제공할 수 있다. 심화 학습도 교육과정상 명시되어 있지는 않지

만, 기본 학습 내용으로 이미 학습한 내용에 대한 이해와 적용의 폭을 넓히거나 그 내용과 관련하여 수업 자료를 좀 더 풍요롭게 제공하는 방식으로 내용을 상세화 할 수 있다. 그렇지만 심화 학습이 자칫 해당 학년의 내용의 범위나 수준을 벗어나거나 난이도 면에서도 지나치게 어려운 경우는 피해야 할 것이다. 즉, 상위 학년에서 학습할 내용을 미리 도입하거나 그 내용과 관련되어 있는 내용을 다루어서는 안 된다.

(3) 다양한 교수 · 학습 방법의 제공

학생들이 수학 학습의 본연의 목적을 달성하고 교육과정에서 제시하는 기본 학습 내용을 습득하도록 하기 위하여 다양한 교수 · 학습 방법을 제공해야 한다. 수학과 수업에서 적용 가능한 다양한 교수 · 학습 방법과 그 실천을 위한 구체적인 내용은 다음과 같다.

① 수학과 수업에서는 교육 내용과 학생의 특성을 고려하여 발견 학습, 탐구 학습, 협동 학습, 개별 학습, 설명식 교수 등 다양한 교수 · 학습 방법을 활용할 수 있다.

② 수학 수업에서 의미 있는 발문을 하기 위하여 다음 사항에 유의한다.
- 발문은 학생의 인지 발달과 경험을 고려하여 선택하고, 그에 대한 반응을 의미 있게 처리한다.
- 가능하면 열린 형태의 발문을 하여 창의적인 답이 나올 수 있게 한다.

③ 수학적 개념, 원리, 법칙의 교수 · 학습에서는 다음 사항에 유의한다.
- 생활 주변 현상, 사회 현상, 자연 현상 등의 여러 가지 현상을 학습 소재로 하여 수학적 개념, 원리, 법칙을 도입한다.
- 구체적 조작 활동과 탐구 활동을 통하여 학생 스스로 개념, 원리, 법칙을 발견하게 한다.

(4) 수학적 능력의 신장을 위한 교수 · 학습 방법

① 수학적 사고와 추론 능력을 발전시키기 위하여 교수 · 학습에서 다음 사항에 유의한다.
- 귀납, 유추 등을 통해 학생 스스로 수학적 사실을 추측하게 하고, 이를 정당화하거나 증명해 보게 할 수 있다.
- 수학적 사실이나 명제를 분석하고, 수학적 관계를 조직하고 종합하며, 학생 자신의 사고 과정을 반성하게 한다.

② 수학적 의사소통 능력을 신장시키기 위하여 교수 · 학습에서 다음 사항에 유의한다.
- 수학 용어, 기호, 표, 그래프 등의 수학적 표현을 이해하고 정확히 사용하게 한다.
- 수학적 아이디어를 말과 글로 설명하고 시각적으로 표현하여 다른 사람과 효율적으로 의사소통 할 수 있게 한다.
- 수학을 표현하고 토론하면서 자신의 사고를 명확히 하고 반성함으로써 의사소통이 수학을 학습하고 활용하는 데 중요함을 인식하게 한다.

③ 문제해결력을 신장시키기 위하여 교수 · 학습에서 다음 사항에 유의한다.
- 문제해결은 전 영역에서 지속적으로 지도한다.
- 학생 스스로 문제 상황을 탐색하고 수학적 지식과 사고 방법을 토대로 문제해결 방법을 적절히 활용하여 문제를 해결하게 한다.
- 학생의 경험과 욕구를 바탕으로 문제를 창의적으로 해결할 수 있게 한다.
- 문제해결의 결과뿐만 아니라 문제해결 방법과 과정, 문제를 만들어 보는 활동도 중시한다.
- 생활 주변 현상, 사회 현상, 자연 현상 등의 여러 가지 현상에서 파악된 문제를 해결하면서 수학적 개념, 원리, 법칙을 탐구하고, 이를 일반화하게 한다.

(5) 수학에 대한 긍정적 태도 신장을 위한 교수 · 학습 방법

수학에 대한 긍정적 태도를 신장시키기 위하여 교수 · 학습에서 다음 사항에 유의한다.

① 여러 가지 현상에서 접할 수 있는 수학을 다룸으로써, 수학에 대한 가치를 인식하고 수학의 필요성을 느낄 수 있게 한다.

② 수학에 대한 흥미, 관심, 자신감을 갖도록 학습 동기와 의욕을 유발한다.

(6) 교육 기자재의 활용

수학 교수 · 학습 과정에서 교육기자재의 활용은 다음 사항에 유의한다.

① 교수 · 학습의 전 과정을 통하여 적절하고 다양한 교육 기자재를 활용하여 수학 학습의 효과를 높이도록 한다.

② 계산 능력 배양을 목표로 하지 않는 경우의 복잡한 계산 수행, 수학적 개념 · 원리 · 법칙의 이해, 문제해결력 향상 등을 위하여 계산기, 컴퓨터, 교육용 소프트웨어 등의 공학적 도구와 다양한 교구를 확보하여 활용할 수 있다.

(7) 수준별 수업의 운영

각 학교에서는 학생 개인의 학습 능력과 수준, 적성, 희망 등을 고려하여 수준별 수업을 운영할 수 있다. 수준별 수업을 운영할 때에는 다음 사항에 유의한다.

① 수준별 수업은 학교 상황에 맞게 수준별 집단을 편성하여 운영할 수 있다.

② 수준별 수업은 내용 요소를 차별화하기보다는 내용의 깊이나 접근 방법에 차이를 두어 운영한다.

04 평가

평가는 학생이 특정한 수학 내용을 학습한 후에 치르는 시험 이상의 것이어야 한다. 평가는 교수 · 학습 개선을 위한 피드백을 제공해야 하며, 또는 의미 있는 수학 학습을 뒷받침할 수 있어야 한다. 평가는 교사가 교수학적 결정을 내릴 때 정보를 주고 안내하는 교수 활동의 필수적인 부분이어야 하며, 학생들의 학습을 안내하고 향상시킬 수 있어야 한다.

(1) 평가의 목적

① 수학 학습의 평가는 학생들의 인지적 영역과 정의적 영역에 대한 유용한 정보를 제공하여 학생 개개인의 수학 학습과 전인적인 성장을 돕고 교사의 교수 활동과 수업 방법을 개선하는 데 활용한다.

② 수학 학습의 평가에서는 학생의 인지 발달 수준을 고려하고, 교육과정에 제시된 내용의 수준과 범위를 준수한다.

(2) 평가의 방법

① 수학 학습의 평가는 수업의 전개 과정에 따라 진단평가, 형성평가, 총괄평가 등의 적절한 평가 방식을 택하여 실시하되, 지속적인 평가를 통하여 다양한 정보를 수집하고 수업에 활용한다.

② 수학 학습의 평가에서는 획일적인 방법을 지양하고 지필평가, 관찰, 면담, 자기평가 등의 다양한 평가 방법을 통해 수학 교수 · 학습을 향상시킬 수 있게 한다.

(3) 인지적 영역의 평가

인지적 영역에 대한 평가에서는 학생들의 수학적 사고력 신장을 위하여 결과뿐만 아니라 과정도 중시하여 평가하되, 수학의 교수 · 학습에서 전반적으로 요구되는 다음 사항을 강조한다.

① 수학의 기본적인 개념, 원리, 법칙을 이해하고 적용하는 능력

② 수학적 표현의 의미를 이해하고 정확하게 사용하는 능력

③ 수학적 지식과 기능을 활용하여 타당하게 추론하는 능력

④ 다양한 상황에서 발생하는 여러 가지 문제를 수학적으로 사고하여 해결하는 능력

⑤ 생활 주변 현상, 사회 현상, 자연 현상 등의 여러 가지 현상을 수학적으로 관찰, 분석, 조직하는 능력

⑥ 수학적 사고 과정과 결과를 합리적으로 의사소통하는 능력

(4) 정의적 영역의 평가

정의적 영역에 대한 평가에서는 학생들의 수학에 대한 긍정적 태도를 신장시키기 위하여 학생들의 수학에 대한 바람직한 가치관이나 수학 학습에 대한 관심, 흥미, 자신감 등의 정도를 파악한다.

다음의 표는 각각의 하위 영역에서 활용할 수 있는 세부 항목들이며, 학교 현장에서 이를 직접적으로 활용하는 교사는 아래의 세부 항목들을 적절히 선택하여 활용할 수 있다. 각각의 항목에 대해 교사는 '전혀 그렇지 않다', '그렇지 않다', '보통이다', '그렇다', '매우 그렇다'와 같은 5가지 척도로 평가할 수 있으며, 목적에 맞게 척도를 다양하게 설정할 수도 있다.

정의적 영역	세부 항목
수학에 대한 흥미와 호기심	수학을 하는 것을 즐거워한다. 수학에서 배우는 것들에 대해 흥미가 있다. 수학 수업 시간을 기다린다. 수학에 대한 것을 읽기를 좋아한다. 수학의 개념이나 원리를 알려고 한다.
수학에 대한 자신감	수학 공부에 자신감을 가지고 있다. 수학에서 좋은 성적을 받을 것이라고 생각한다. 수학에서 어려운 내용까지도 잘 이해할 수 있다. 수학을 가장 잘하는 과목 중의 하나로 생각한다.
수학에 대한 불안	수학 수업이 어려울까봐 걱정한다. 수학 성적이 나빠질까봐 걱정한다. 수학 문제를 풀 때 긴장한다.
수학의 유용성 인식	수학이 우리의 생활에 많은 도움을 준다고 생각한다. 수학이 사고력을 기르는 데 도움이 된다고 생각한다. 수학이 나중에 공부하는 데 필요하므로 중요한 과목이라고 생각한다. 수학이 나중에 직장 생활을 하는 데 도움이 된다고 생각한다.
과제 집착력과 의지	수학 공부를 열심히 한다. 수학 시간에 배운 내용을 확실히 알려고 노력한다. 수학 문제를 풀 때, 답을 구할 때까지 중단하지 않고 열심히 하려고 노력한다. 수학 공부를 잘하기 위해 계획을 세우고 스스로 노력한다.
창의적 사고	다른 사람의 방법을 그대로 따라하는 것보다는 스스로 생각하고 탐구한다. 수학 문제를 풀 때 다른 사람과는 다른 독특한 방법을 찾아보려고 한다. 수학 문제를 풀 때 한 가지 방법으로 해결하는 것보다는 다양한 방법을 찾아보려고 한다. 수학 문제를 풀 때 내가 알고 있는 방법 중에 어떤 것이 더 적절한지를 생각한다.
수학 수업에의 참여	수학 수업 시간에 모둠 활동에 적극적으로 참여한다. 수학 수업 시간에 다른 생각을 한다. 수학 수업 시간에 발표를 많이 한다. 수학 문제를 풀 때 아이디어를 다른 학생들과 공유한다.

(5) 평가에서 공학적 도구의 활용

수학 학습의 평가에서는 평가하는 학습 내용에 따라 학생들에게 계산기, 컴퓨터와 같은 공학적 도구와 다양한 교구를 이용할 수 있는 기회를 제공할 수 있다.

5. 제7차 교육과정과 2006년 개정 교육과정의 내용 비교

2006년 개정 수학과 교육과정은 앞의 개정의 필요성, 개정의 중점에서 언급한 바와 같이 수준별 교육과정으로 구성, 운영하도록 하였으며 특히, 학습 내용이 상 · 하위 학년으로 이동된 부분이 있다.

수활의 활용의 내용에 대하여 제7차 교육과정과 2006년 개정 수학과 교육과정을 비교 · 정리하면 다음과 같다.

제7차 교육과정	2006년 개정 교육과정	비고
〔6차 교육과정-실용수학〕 **(3) 명제와 진리표**		• 6차 교육과정에 있었던 내용이 7차 교육과정에서 삭제되었다가 이번 개정 교육과정에 다시 추가됨
(가) 명제의 합성	**(가) 명제와 논리** **1** 명제의 합성 ① 명제변수 p, q, r 등을 논리 연산인 $\wedge$(논리곱), $\vee$(논리합), $\sim$(부정)으로 만든 합성명제의 실생활 사례를 통해 합성명제의 참과 거짓을 판별할 수 있다.	
(나) 조건문	② 조건문과 쌍조건문의 참과 거짓을 판별할 수 있고, 이를 논리 연산으로 나타낼 수 있다.	
	2 합성명제와 논리	
(다) 진리값과 진리표	① 합성명제의 진릿값을 진리표를 통해 구할 수 있다.	
(라) 논리 회로	② 논리 회로의 뜻을 알고 논리 연산과 기호를 논리 회로에 활용할 수 있다. 용어와 기호 | 논리곱, 논리합, 쌍조건문, 진릿값, 진리표, 동치명제, 논리 회로, $p \wedge q$, $p \vee q$, $p \leftrightarrow q$	
〔수학 Ⅰ〕 **(1) 대수**		• 수학 Ⅰ (1)대수 영역의 (가)지수와 로그와 (2)해석 영역의 (나)지수함수 (다)로그함수가 모두 (나)지수와 로그로 합쳐짐
(가) 지수와 로그 **1** 지수 ① 거듭제곱과 거듭제곱근의 뜻을 알고, 그 성질을 이해한다.	**(나) 지수와 로그** **1** 지수와 로그 ① 거듭제곱과 거듭제곱근의 뜻을 알고, 그 성질을 이해한다.	
② 지수가 유리수까지 확장될 수 있음을 이해한다. ③ 지수가 실수까지 확장될 수 있음을 이해한다.	② 지수가 유리수, 실수까지 확장될 수 있음을 이해한다.	
④ 지수의 법칙을 이해하고 이를 이용하여 식을 간단히 나타낼 수 있다.		• 삭제
2 로그 ① 로그의 뜻과 그 성질을 이해한다.	③ 로그의 뜻과 그 성질을 이해한다.	
② 상용로그의 뜻을 알고, 지표와 가수의 성질을 이해하며 이를 활용할 수 있다.		• 삭제 • 상용로그를 이용하는 방법은 예

용어와 기호 | 거듭제곱근, 밀, 로그, 진수, 상용로그, 지표, 가수, $\sqrt[n]{a}$, $\log_a N$, $\log N$		를 통해 간단히 다루고, 상용로그표의 비례부분은 다루지 않음 • 계산기 활용
[수학 Ⅰ] **(2) 해석** **(나) 지수함수**		
1 지수함수와 그래프 ① 지수함수의 뜻을 안다. ② 지수함수의 그래프를 그려 보고, 그 성질을 이해한다.	**2** 지수함수와 그 그래프 ① 실생활 상황을 통해 지수함수의 뜻을 안다. ② 지수함수의 그래프를 그려 보고, 그 성질을 이해한다.	• 기본 성질을 이해하는 데 도움이 되는 정도로만 다룸
2 지수방정식과 지수부등식 ① 지수방정식과 지수부등식을 풀 수 있다.		• 지수방정식과 지수부등식은 수학 Ⅰ 에서 배움
용어와 기호 | 지수함수, 지수방정식, 지수부등식		
(다) 로그함수		
1 로그함수와 그 그래프 ① 로그함수의 뜻을 안다. ② 로그함수의 그래프를 그려 보고, 그 성질을 이해한다.	**3** 로그함수와 그 그래프 ① 실생활 상황을 통해 로그함수의 뜻을 안다. ② 로그함수의 그래프를 그려 보고, 그 성질을 이해한다.	• 기본 성질을 이해하는 데 도움이 되는 정도로만 다룸
2 로그방정식과 로그부등식 ① 로그방정식과 로그부등식을 풀 수 있다.		• 로그방정식과 로그부등식은 수학 Ⅰ 에서 배움
용어와 기호 | 로그함수, 로그방정식, 로그부등식	용어와 기호 | 거듭제곱근, (로그의)밀, 로그, 진수, 상용로그, 지표, 가수, 지수함수, 로그함수, $\sqrt[n]{a}$, $\log_a N$, $\log N$	• 지수의 '밀'은 중1 수학에서 배움
[수학 Ⅰ] **(1) 대수**		
(다) 수열 **1** 등차수열과 등비수열 ① 수열의 뜻을 안다. ② 등차수열의 뜻을 알고, 일반항, 첫째항부터 제 n항까지의 합을 구할 수 있다. ③ 등비수열의 뜻을 알고, 일반항, 첫째항부터 제 n항까지의 합을 구할 수 있다.	**(다) 수열** **1** 등차수열과 등비수열 ① 실생활 상황을 통해 수열의 뜻을 안다. ② 등차수열의 뜻을 알고, 일반항, 첫째항부터 제 n항까지의 합을 구할 수 있다. ③ 등비수열의 뜻을 알고, 일반항, 첫째항부터 제 n항까지의 합을 구할 수 있다.	• 등차수열, 등비수열의 합, 계차수열, 등차수열, 등비수열인 수열의 합을 기호로 나타내고 이를 구하는 것을 중심으로 다룸
2 여러 가지 수열 ① $\sum$의 뜻과 성질을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.	**2** 수열의 합 ① 수열의 합을 구할 수 있다.	

② 여러 가지 수열의 일반항, 첫째항부터 제n항까지의 합을 구할 수 있다. ③ 여러 가지 수열에 관한 문제를 해결할 수 있다.	② 수열을 활용하여 실생활에 관련된 문제를 해결할 수 있다.	• 실생활 문제의 경우 지나치게 복잡한 경우는 다루지 않음
3 수학적귀납법 ① 수학적귀납법의 원리를 이해한다. ② 수학적귀납법을 이용하여 자연수 n에 관하여 참인 명제를 증명할 수 있다.		• 수학적귀납법, 알고리즘과 순서도는 수학 I 에서 다룸
4 알고리즘과 순서도 ① 알고리즘과 순서도의 뜻을 알고, 그 필요성을 이해한다. ② 간단한 문제해결을 위한 알고리즘을 작성하여 순서도를 만들 수 있다.		• 삭제
용어와 기호 | 수열, 항, 유한수열, 무한수열, 일반항, 공차, 등차수열, 등차중항. 공비, 등비수열, 등비중항, 계차수열, 수학적귀납법, 알고리즘, 순서도, a_n, $\{a_n\}$, $\sum_{k=1}^{n} a_k$	용어와 기호 | 수열, 항, 유한수열, 무한수열, 일반항, 공차, 등차수열, 등차중항, 공비, 등비수열, 등비중항, 계차수열, 원리합계, a_n, $\{a_n\}$, $\sum_{k=1}^{n} a_k$	• 추가된 용어 원리합계 • 삭제된 용어 수학적귀납법, 알고리즘, 순서도
〔실용수학〕 **(3) 생활 통계** **(나) 확률과 통계의 활용**	**(라) 확률과 통계**	
① 확률의 뜻을 알고, 이를 활용할 수 있다.	**1** 확률과 그 활용 ① 확률의 뜻을 안다. ② 확률의 기본 성질을 이해하고 이를 활용할 수 있다.	• 확률의 기본 성질 이해 추가
	2 통계와 그 활용 ① 확률변수와 확률분포의 뜻을 안다.	• 추가
② 복권 등의 기대값을 구할 수 있다.	② 기댓값과 분산을 구할 수 있다.	• 복권 등의 기대값 → 기댓값과 분산
③ 이항분포를 실생활의 문제해결에 활용할 수 있다.	③ 이항분포의 뜻을 이해하고, 실생활 문제해결에 이를 활용할 수 있다.	
④ 정규분포를 실생활의 문제해결에 활용할 수 있다.	④ 정규분포의 뜻과 그 성질을 이해한다.	• 삭제
⑤ 여론 조사의 결과를 해석할 수 있다.	⑤ 간단한 통계 조사의 결과를 해석할 수 있다.	• 여론 → 간단한 통계
용어와 기호 | 평균, 분산, 표준편차, 확률, 조합, 기대값, 이항분포, 정규분포, 표준화, 모집단, 표본, 전수조사, 표본조사, 임의추출, 모평균, 표본평균, 모비율, 표본비율, 구간추정, ${}_nC_r$, $E(X)$, $V(X)$	용어와 기호 | 통계적 확률, 수학적 확률, 확률변수, 확률분포, 기댓값, 분산, 표준편차, 이항분포, 정규분포, 표준화, 모집단, 표본, 전수조사, 표본조사, 임의추출, 모평균, 표본평균, 모비율, 표본비율, 구간추정, $E(X)$, $V(X)$, $\sigma(X)$, $B(n, p)$, $N(m, \sigma^2)$, $N(0, 1)$	• 추가된 용어 통계적 확률, 수학적 확률, $\sigma(X)$, $B(n, p)$, $N(m, \sigma^2)$, $N(0, 1)$ • '기대값'에서 '기댓값'으로 용어 변경

〔6차 교육과정-중학교 1학년〕		
(라) 점, 선, 면의 연결 상태에 의하여 생기는 도형의 간단한 성질을 관찰하게 한다. ① 단일폐곡선 ② 꼭지점과 변으로 이루어진 도형 ③ 오일러의 공식 용어와 기호 | 단일폐곡선, 한붓그리기, 짝수점, 홀수점, 뫼비우스의 띠	**(마) 도형과 그래프** **1** 연결 상태가 같은 도형 ① 평면도형의 성질을 이해하고, 공통적인 특징을 설명할 수 있다. ② 점과 선으로 이루어진 도형의 성질을 이해한다. ③ 입체도형에서 연결 상태가 같은 도형을 관찰하고, 공통적인 특징을 설명할 수 있다.	• 새롭게 도입됨. • 연결 상태가 같은 도형의 뜻을 알고 예를 찾아보기, 단일폐곡선의 뜻과 성질을 이해하고 예를 찾아보기 등을 다룸 • 꼭짓점과 변으로 이루어진 도형의 뜻, 짝수점과 홀수점의 뜻과 성질, 한붓그리기가 가능한 도형의 성질과 예 알아보기, 꼭짓점과 변으로 이루어진 평면도형에서 꼭짓점, 변, 면의 개수 사이의 관계 알기 등을 다룸 • 지나치게 복잡한 도형은 다루지 않음
〔7차 교육과정-이산수학〕 **(2) 그래프**		
(가) 그래프 ① 그래프의 뜻을 알고, 여러 가지 용어를 안다. ② 임의의 그래프에서 꼭지점의 차수와 변의 수 사이의 관계를 이해한다.	**2** 평면그래프와 정다면체 ① 정다면체를 평면그래프로 나타낼 수 있다.	
③ 여러 가지 그래프를 이해한다.	**3** 그래프를 이용한 의사 결정 최적화 ① 그래프를 이용하여 여러 가지 최적화 문제를 해결할 수 있다.	• 7차 이산수학의 그래프와 최적화와 알고리즘이 그래프를 이용한 의사 결정 최적화로 바뀜
(나) 수형도 ① 수형도에서 꼭지점의 수와 변의 수 사이의 관계를 이해한다. ② 주어진 그래프의 생성수형도를 찾을 수 있다.		
(다) 여러 가지 회로 ① 오일러회로와 해밀턴회로의 뜻을 알고, 간단한 그래프에서 오일러회로와 해밀턴회로를 찾을 수 있다. ② 그래프에서 오일러회로가 존재하기 위한 필요충분조건을 이해한다. ③ 간단한 그래프에서 해밀턴회로가 존재하기 위한 필요조건을 이해한다.		

(라) 그래프의 활용 ① 행렬의 뜻을 알고, 행렬의 덧셈, 뺄셈, 곱셈을 할 수 있다. ② 그래프를 행렬로 나타내고, 그 성질을 알 수 있다. ③ 색칠 문제 등의 실생활 문제를 그래프를 이용하여 해결 할 수 있다. 용어와 기호 | 그래프, 꼭지점, 변, 꼭짓점의 차수, 경로, 회로, 수형도, 생성수형도, 오일러회로, 해밀턴회로, 인접행렬	용어와 기호 | 한붓그리기, 그래프, (그래프의)꼭짓점, (그래프의)변, 경로, 최적의 경로	
(3) 알고리즘 **(가) 수와 알고리즘** ① 수와 관련된 여러 가지 규칙성의 문제를 해결할 수 있다. ② 자연수를 이진법으로 나타내는 알고리즘을 이해한다. ③ 소수를 판정하는 알고리즘을 이해한다. ④ 최대공약수와 최소공배수를 구하는 알고리즘을 이해한다. **(나) 점화관계** ① 두 항 사이의 관계식을 이해한다. ② 세 항 사이의 관계식을 이해한다. 용어와 기호 | 알고리즘, 순서도, 점화관계, 일반항, 부분합, a_n, S_n		
(4) 의사결정의 최적화 **(가) 의사결정과정** ① 결정적인 2×2게임에서 의사결정과정의 변화를 안다. ② 여러 가지 선거 방법의 수학적 의미와 그 정당성을 이해한다. **(나) 최적화와 알고리즘** ① 실생활에 나타나는 계획 세우기의 최적화 문제를 해결할 수 있다. ② 도로망에서 최적의 경로를 구할 수 있다. 용어와 기호 | 최적의 경로		

〈수학 교사에게 필요한 추천 자료 및 도서 목록〉

교육부(1997). 수학과 교육과정. 교육부 고시 제 1997-15호. 교육부.

교육부(1999a). 중학교 교육과정 해설(Ⅲ) - 수학, 과학, 기술·가정 -. 교육부.

교육부(1999a). 중학교 교육과정 해설(Ⅰ) - 총론 -. 교육부.

교육인적자원부(2006). 수학과 교육과정 교육인적자원부 고시 제2006-75호 수정 고시에 따른 보도자료. 교육인적자원부.

교육인적자원부(2007a). '2007년 개정 교육과정' 개요. 교육인적자원부.

교육인적자원부(2007b). 수학과 교육과정. 교육인적자원부 고시 제2007-79호. 교육인적자원부.

교육인적자원부(2008). 중학교 교육과정 해설(Ⅲ) - 수학, 과학, 기술·가정 -. 교육과학기술부.

구광조 외 5명(1988). 수학과교육론, 서울: 갑을출판사.

문교부(1980). 한국 교육 30년. 문교부.

박선화 외 7명(2005). 수준별 수업 활성화 방안 연구. 한국교육과정평가원.

박선화 외 14명(2006). 수학과 교육과정 개정 시안 수정·보완 연구. 한국교육과정평가원.

박순경 외 9명(2007). 초·중학교 교육과정 해설-총론-. 2007년 개정 교육과정 해설 교육인적자원부 위탁과제 답신 보고서. 한국교육과정평가원

신성균 외 6명(2005). 수학과 교육과정 개선 방안 연구. 한국교육과정평가원.

우정호(1998). 학교 수학의 교육적 기초. 서울대학교출판부.

이미경 외 6명(2004a). PISA 2003 결과 분석 연구 -수학적 소양, 읽기 소양, 과학적 소양 수준 및 배경변인 분석- 한국교육과정평가원.

이미경 외 6명(2004b). PISA 2003 공개문항 분석 자료집. 한국교육과정평가원.

최승현(1999). 수학 교과에서의 자기평가. 학교수학, 1(1), 123-133.

황혜정 외 5명(2001). 수학교육학신론. 서울: 문음사.

Brousseau, G.(1997). Theory of Didactical Situations in Mathematics. Dordrecht: Kruwer Academic Publishers

Burton, G. M.(1985). Writing as a way of knowing in mathematics education class. Arithmetic Teacher, 33(4), 40-45.

Davis, P. J. & Hersh, R.(1981). The Mathematical Experience. 양영오·허민(공역)(1995). 수학적 경험. 경문사.

Freudenthal, H.(1973). Mathematics as an educational task. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Kennedy, L. M., Tipps, S., Johnson, A.(2004). Guiding children's learning of mathematics. Belmont: Wadsworth.

Kenny, P. A., & Silver, E. A. (1983). Student self-assessment in mathematics. In N. L. Webb & A. F. Coxford (Eds.), Assessment in the mathematics classroom: 1993 Yearbook. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

National Council of Teachers of Mathematics, 류희찬 외 5명(공역)(2007). 학교수학을 위한 원리와 규준. 서울: 경문사.

National Council of Teachers of Mathematics(2000). Principles and Standards for School Mathematics. Reston, Va.: National Council of Teachers of Mathematics. NCTM.

Ⅴ. 교과서와 익힘책의 편찬 방향 및 구성

1. 교과서의 편찬 방향

2006년 개정 교육과정의 정신을 반영하여, 기본적인 수학적 지식과 기능을 습득하여 논리적으로 사고하고, 사회나 자연의 현상과 문제를 수학적으로 고찰하고 합리적으로 해결하는 능력을 키우며, 수학에 대한 긍정적 태도를 갖게 하는데 중점을 두어 교과서를 저술하였다. 특히, 익힘책과 연계를 긴밀히 하여 학교 교육 체계에 적합하도록 중단원 중심으로 저술하였으며, 학습자의 사고력, 탐구력, 창의력, 의사소통 능력을 기를 수 있도록 쉽고 재미있게 저술하였다. 교과서의 편찬 방향은 다음과 같다.

가. 2006년 개정 교육과정을 충실히 반영하였다.

나. 학생들의 발달 수준을 고려하여 내용을 이해하기 쉽게 구성하였다.

다. 수학적 개념의 이해와 기능의 습득을 바탕으로 수학적 추론 능력, 의사소통 능력, 문제해결력을 신장시키는 데 적합하도록 하였다.

라. 수학적 지식과 방법을 통하여 생활 주변 현상, 자연 현상, 사회 현상 등을 이해하고 다양한 문제를 해결함으로써, 수학의 가치를 이해하고 수학에 대한 긍정적 태도를 기르는 데 적합하도록 하였다.

마. 적절한 편집과 디자인을 활용하여 학습 효과를 높이도록 하였다.

2. 교과서의 구성과 활용 방법

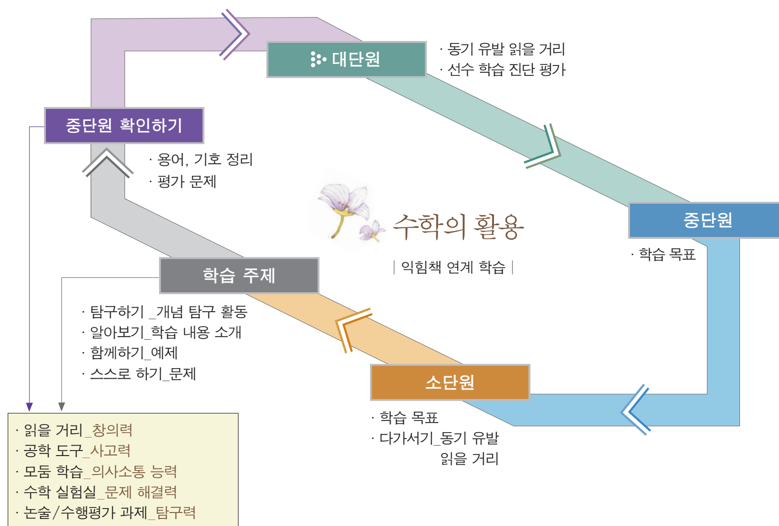
1) 교과서의 구성 체제

(1) 학습 주제의 연계성, 특성, 분량 등을 고려하여 교육과정에 제시된 영역별 내용을 분리하거나 통합하여 단원을 구성하고 배열하였다.

(2) 내용을 쉽게 이해할 수 있도록 충분한 설명을 제공하고, 예제, 문제 등을 적절히 제시하였다.

(3) 수학적 추론 능력, 의사소통 능력, 문제해결력을 신장시키는 데 적합한 소재, 문제 등을 고르게 실었다.

2) 교과서의 단원 구성



3) 교과서의 활용 방법

(1) 단원 도입 및 동기유발

단원을 시작하기 전에

본 단원의 학습 주제와 연계되는 학습 내용을 확인하고 평가할 수 있도록 하였다.

단원을 시작하기 전에

지수법칙 — **1** a, b가 실수이고 m, n이 자연수일 때, □ 안에 알맞은 것을 써넣어라.

(1) $a^m \times a^n = a^{\square}$ (2) $(a^m)^n = a^{\square}$

방정식 — **2** 다음 방정식의 해를 구하여라.

(1) $x^2=2$ (2) $x^3=8$

다가서기

소단원 학습에 필요한 개념을 사진, 만화, 읽기 자료 등으로 표현하였다.

다 가 서 기 / 토끼 울타리

오스트레일리아에는 세계에서 가장 긴 울타리인 토끼 울타리(Rabbit-Proof Fence)가 있다. 이것은 오스트레일리아의 북에서 남으로 뻗어 있어 토끼가 서부 오스트레일리아로 퍼지는 것을 막기 위한 것이다.

오스트레일리아에는 유럽인들이 도착하기 이전까지 토끼가 살지 않았다. 그런데 1859년 한 지주가 사냥을 하기 위하여 자신의 농장에 유럽에서 들여온 야생 토끼를 방사한 이후 그 수가 기하급수적으로 늘어났

제 1 울타리
제 2 울타리
제 3 울타리
칼바리
퍼스

탐구하기

소주제 학습의 실마리가 되는 내용을 실생활 또는 선수 학습에서 찾아보았다.

01 거듭제곱의 뜻과 지수법칙

탐 구 하 기 / 유에스비(USB) 저장 장치

바이트(byte, B) 컴퓨터가 처리하는 정보의 기본 단위로, 하나의 문자를 표현하는 단위이다.

용량이 16 GB인 유에스비(USB) 저장 장치가 있다. 한글 한 자 기 위해서는 2 B가 필요할 때, 다음 물음에 답하여 보자.

(단, 1 GB$=2^{10}$ MB, 1 MB$=2^{10}$ KB, 1 KB=

1. 이 저장 장치에는 몇 자의 한글을 저장할 수 있는지 구하여라.
2. 종이 한 쪽 분량에 한글 문자를 1024자까지 쓸 수 있을 때, 이 에는 몇 쪽의 분량을 저장할 수 있는지 구하여라.

(2) 내용 전개

알아보기_ 본 단원의 학습 주제와 연계되는 학습 내용을 확인하고 평가할 수 있도록 하였다.

함께하기_ 대표적인 문제를 해결하여 학습 내용을 정리하고 풀이 방법을 익히도록 하였다.

스스로 하기_ 스스로 문제를 해결하고 학습 내용을 점검할 수 있도록 하였다.
더 많은 문제를 풀어 보며 학습 내용을 확인할 수 있도록 익힘책과 연계하였다.

(3) 수학적 가치 함양

읽을 거리

단원과 관련된 상식을 소개하여 수학 학습의 흥미를 높일 수 있도록 하였다.

읽을 거리

독일의 암호 체계를 무력화시킨 튜링

콜로서스의 존재가 알려지기 전까지 에니악이 최초의 컴퓨터로 알려져 있었다.

콜로서스 에니그마

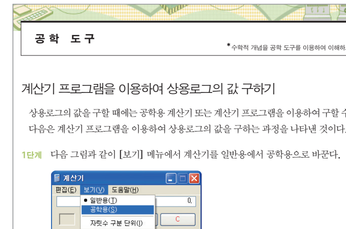
제2차 세계 대전은 영국을 비롯한 연합국과 독일 간의 치열한 과학 기술 경쟁이었다고 할 수 있다.

이 전쟁에서 독일에 패망을 안겨 준 결정적인 역할을 한 전투가 바로 미국이 참전한 후 1944년 6월에 진행된 노르망디 상륙 작전이다.

당시 독일은 '에니그마(Enigma)'라는 기계를 사용하여 암호문을 작성하고 해독하였다. 이 기계

공학 도구

계산기, 컴퓨터 프로그램 및 인터넷을 활용하여 수학적 사고력 향상에 도움이 되도록 하였다.


공 학 도 구

*수학적 개념을 공학 도구를 이용하여 이해하고

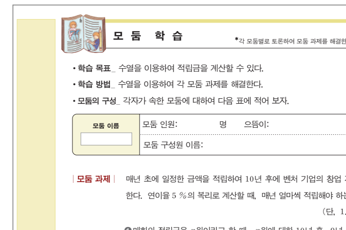
계산기 프로그램을 이용하여 상용로그의 값 구하기

상용로그의 값을 구할 때에는 공학용 계산기 또는 계산기 프로그램을 이용하여 구할 수 다음은 계산기 프로그램을 이용하여 상용로그의 값을 구하는 과정을 나타낸 것이다.

1단계 다음 그림과 같이 [보기] 메뉴에서 계산기를 일반용에서 공학용으로 바꾼다.

모둠 학습

주어진 주제에 대한 모둠 학습을 통하여 의사소통 능력을 향상시키고, 협동심을 기를 수 있도록 하였다.


모 둠 학 습

*각 모둠별로 토론하여 모둠 과제를 해결한

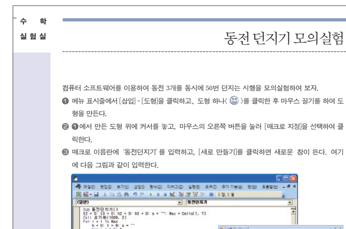
- 학습 목표_ 수열을 이용하여 적립금을 계산할 수 있다.
- 학습 방법_ 수열을 이용하여 각 모둠 과제를 해결한다.
- 모둠의 구성_ 각자가 속한 모둠에 대하여 다음 표에 적어 보자.

모둠 이름	모둠 인원: 명 으뜸이:
	모둠 구성원 이름:

| 모둠 과제 | 매년 초에 일정한 금액을 적립하여 10년 후에 벤처 기업의 창업 자 한다. 연이율 5 %의 복리로 계산할 때, 매년 얼마씩 적립해야 하는 (단, 1.0

수학 실험실

실생활에서 찾을 수 있는 다양한 소재로 문제해결력을 기를 수 있도록 하였다.


수 학 실 험 실

동전 던지기 모의실험

컴퓨터 소프트웨어를 이용하여 동전 3개를 동시에 50번 던지는 시행을 모의실험하여 보자.

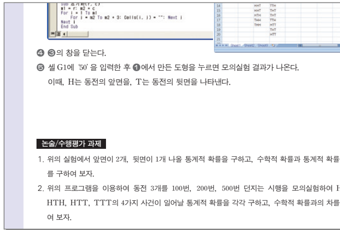
❶ 메뉴 표시줄에서 [삽입]-[도형]을 클릭하고, 도형 하나( )를 클릭한 후 마우스 끌기를 하여 도형을 만든다.

❷ ❶에서 만든 도형 위에 커서를 놓고, 마우스의 오른쪽 버튼을 눌러 [매크로 지정]을 선택하여 클릭한다.

❸ 매크로 이름란에 '동전던지기'를 입력하고, [새로 만들기]를 클릭하면 새로운 창이 뜬다. 여기에 다음 그림과 같이 입력한다.

논술/수행평가 과제

학습 내용의 이해를 바탕으로 조사, 분석, 관찰, 발표 등의 활동을 통하여 탐구력을 기를 수 있도록 하였다.


④ ③의 창을 닫는다.
⑤ 셀 G1에 '50'을 입력한 후 ❶에서 만든 도형을 누르면 모의실험 결과가 나온다.
이때, H는 동전의 앞면을, T는 동전의 뒷면을 나타낸다.

논술/수행평가 과제

1. 위의 실험에서 앞면이 2개, 뒷면이 1개 나올 통계적 확률을 구하고, 수학적 확률과 통계적 확률의 를 구하여 보자.
2. 위의 프로그램을 이용하여 동전 3개를 100번, 200번, 500번 던지는 시행을 모의실험하여 H HTH, HTT, TTT의 4가지 사건이 일어날 통계적 확률을 각각 구하고, 수학적 확률과의 차를 여 보자.

3. 익힘책의 편찬 방향

2006년 개정 교육과정의 정신을 반영하여, 학생들의 적성과 능력에 맞춘 자기주도적 학습에 중점을 두어 익힘책을 저술하였다. 특히, 교과서와 연계를 긴밀히 하여 다양한 형태의 학습이 가능하도록 하였으며, 학습자의 사고력, 탐구력, 창의력, 의사소통 능력을 기를 수 있도록 쉽고 재미있게 저술하였다. 익힘책의 편찬 방향은 다음과 같다.

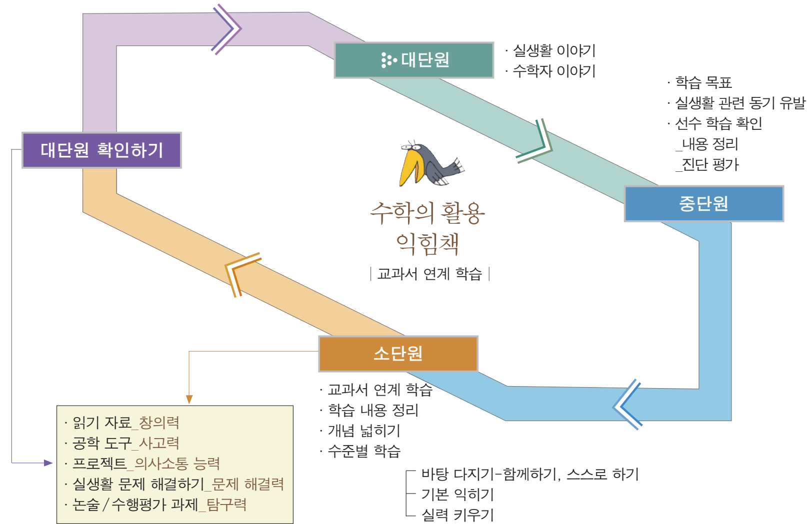
가. 2006년 개정 교육과정을 충실히 반영하였다.
나. 교과서에서 습득한 지식과 기능을 적절히 활용할 수 있도록 하였다.
다. 내용을 이해하기 쉽게 구성하여 학생들의 자기주도적 학습이 가능하도록 하였다.
라. 학생의 능력과 수준에 따른 수준별 교수 · 학습이 가능하도록 하였다.
마. 수학적 개념의 이해와 기능의 습득을 바탕으로 수학적 추론 능력, 의사소통 능력, 문제해결력을 신장시키는 데 적합하도록 하였다.
바. 수학적 지식과 방법을 통하여 생활 주변 현상, 자연 현상, 사회 현상 등을 이해하고 다양한 문제를 해결함으로써, 수학의 가치를 이해하고 수학에 대한 긍정적인 태도를 기르는 데 적합하도록 하였다.
사. 적절한 편집과 디자인을 활용하여 학습 효과를 높이도록 하였다.

4. 익힘책의 구성과 활용 방법

1) 익힘책의 구성 체제

(1) 교과서의 내용과 유기적으로 연계하였고, 학생의 능력과 수준에 따라 수준별 교수 · 학습이 가능하도록 구성하였다.
(2) 수학적 탐구, 수학적 개념과 기능의 이해와 습득, 추론, 의사소통, 문제해결 등의 수학적 활동에 대한 반복 학습과 심화 학습의 기회를 제공하여 자기주도적 학습이 가능하도록 하였다.
(3) 단원의 도입 부분에서는 그 단원을 학습하는 데 필요한 선수 학습 내용을 제시하였고, 역사적 배경, 여러 가지 현상 등에 대한 읽기 자료를 적절히 소개하였다.
(4) 다양한 유형 및 난이도의 평가 문항을 제시하고, 그 평가 결과를 토대로 교수 · 학습을 향상시킬 수 있도록 하였다.
(5) 개별 학습이나 협력 학습을 통해 해결할 수 있는 프로젝트형 과제나 토론 과제를 제시하였다.

2) 익힘책의 단원 구성



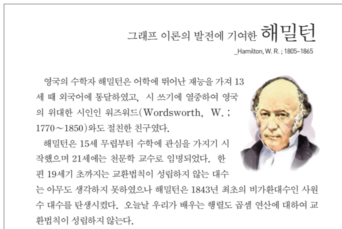
(1) 단원도입 및 선수학습

실생활 이야기

학습의 실마리가 되는 생활소재를 만화 및 사진으로 구성하여 학습 주제에 쉽고 재미있게 다가서도록 하였다.

수학자 이야기

대단원 학습에 관련된 수학자의 업적과 일화를 소개하여 학습의 흥미를 높이도록 하였다.



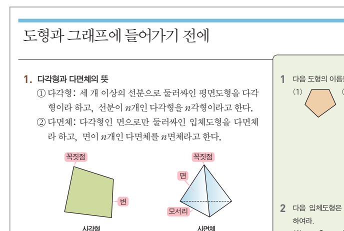
그래프 이론의 발전에 기여한 해밀턴
_Hamilton, W. R. ; 1805~1865

영국의 수학자 해밀턴은 어학에 뛰어난 재능을 가져 13세 때 외국어에 통달하였고, 시 쓰기에 열중하여 영국의 위대한 시인인 워즈워드(Wordsworth, W. ; 1770~1850)와도 절친한 친구였다.

해밀턴은 15세 무렵부터 수학에 관심을 가지기 시작했으며 21세에는 천문학 교수로 임명되었다. 한편 19세기 초까지는 교환법칙이 성립하지 않는 대수는 아무도 생각하지 못하였으나 해밀턴은 1843년 최초의 비가환대수인 사원수 대수를 탄생시켰다. 오늘날 우리가 배우는 행렬도 곱셈 연산에 대하여 교환법칙이 성립하지 않는다.

~에 들어가기 전에

중단원 학습에 필요한 선수 학습의 내용 정리와 함께 진단 평가 문항을 제시하였다.



도형과 그래프에 들어가기 전에

1. 다각형과 다면체의 뜻

① 다각형: 세 개 이상의 선분으로 둘러싸인 평면도형을 다각형이라 하고, 선분이 n개인 다각형을 n각형이라고 한다.

② 다면체: 다각형인 면으로만 둘러싸인 입체도형을 다면체라 하고, 면이 n개인 다면체를 n면체라고 한다.

(2) 교과서와 연계된 학습

학습 내용 정리_ 교과서에서 익힌 학습 내용을 정리하였으며, □ 채우기를 통하여 보다 효율적으로 습득하도록 하였다.
내용 정리가 부족한 학생은 개념을 다시 확인할 수 있도록 교과서와 연계하였다.

개념 넓히기_ 교과서에서 다룬 개념, 방법 등을 깊이 있게 설명하고 사고력을 넓혀 심화학습이 가능하도록 하였다.

(3) 자기 주도적 학습 방법

바탕 다지기_ 함께하기(예제)와 스스로 하기(유제)를 제시하여 기초적인 학습 내용을 확인하도록 하였으며 보충학습이 가능하도록 하였다.

기본 익히기_ 기본적인 학습 내용을 확인하는 문제를 제시하였으며 오류 유형을 소개하였다.

실력 키우기_ 학습 내용을 응용, 활용할 수 있는 문제를 제시하여 심화학습이 가능하도록 하였으며, 또 오류 유형을 소개하였다.

(4) 수학적 가치 함양

읽기 자료

단원과 관련된 상식을 소개하여 수학 학습의 흥미를 높일 수 있도록 하였다.

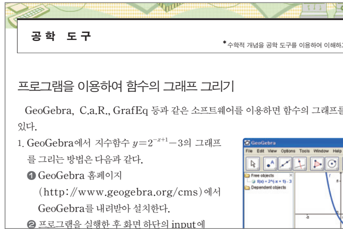
읽기 자료

로그의 역사

17세기 초 망원경의 발명으로 천문학, 항해술, 삼각법
히 발달하였고, 이에 따라 방대하고도 복잡한 천문학상의
하기 위해 새로운 계산 기술이 절실히 요구되었다. 이러
적인 요구에 따라 네이피어(Napier, J. ; 1550~1617)
운 계산 방법인 로그를 발명하였다. 로그의 개념을 쓰면
잡한 곱셈 문제를 간단한 덧셈 문제로 바꿀 수 있기 때문
라스(Laplace, P. S. ; 1749~1827)가 "천문학자의 수
어줌으로써 그들의 수명을 두 배로 늘렸다."라고 말했을

공학 도구

계산기, 컴퓨터 프로그램 및 인터넷을 활용하여 수학적 사고력 향상에 도움이 되도록 하였다.


공학 도구

*수학적 개념을 공학 도구를 이용하여 이해하

프로그램을 이용하여 함수의 그래프 그리기

GeoGebra, C.a.R., GrafEq 등과 같은 소프트웨어를 이용하면 함수의 그래프를
있다.

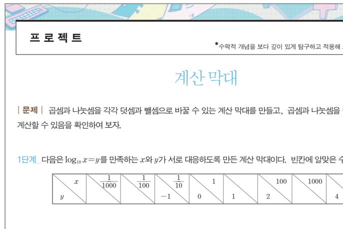
1. GeoGebra에서 지수함수 $y=2^{-x+1}-3$의 그래프를 그리는 방법은 다음과 같다.

❶ GeoGebra 홈페이지 (http://www.geogebra.org/cms)에서 GeoGebra를 내려받아 설치한다.

❷ 프로그램을 실행한 후 화면 하단의 input에

프로젝트

수학적 개념을 보다 깊이 있게 탐구하고 적용하는 문제로서, 다양한 방법으로 학습 내용을 활용할 수 있도록 하였다.


프로젝트

*수학적 개념을 보다 깊이 있게 탐구하고 적용해

계산 막대

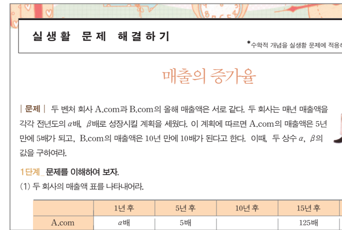
| 문제 | 곱셈과 나눗셈을 각각 덧셈과 뺄셈으로 바꿀 수 있는 계산 막대를 만들고, 곱셈과 나눗셈을
계산할 수 있음을 확인하여 보자.

1단계_ 다음은 $\log_{10} x=y$를 만족하는 x와 y가 서로 대응하도록 만든 계산 막대이다. 빈칸에 알맞은 수

x	$\frac{1}{1000}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{10}$	1		100	1000	
y			-1	0	1	2		4

실생활 문제 해결하기

문제해결 전략을 활용하여 실생활의 문제해결력을 기르도록 하였다.


실 생 활 문 제 해 결 하 기

*수학적 개념을 실생활 문제에 적용해

매출의 증가율

| 문제 | 두 벤처 회사 A.com과 B.com의 올해 매출액은 서로 같다. 두 회사는 매년 매출액을 각각 전년도의 α배, β배로 성장시킬 계획을 세웠다. 이 계획에 따르면 A.com의 매출액은 5년 만에 5배가 되고, B.com의 매출액은 10년 만에 10배가 된다고 한다. 이때, 두 상수 α, β의 값을 구하여라.

1단계_ 문제를 이해하여 보자.

(1) 두 회사의 매출액 표를 나타내어라.

	1년 후	5년 후	10년 후	15년 후
A.com	α배	5배		125배

논술/수행평가 과제

학습 내용을 바탕으로 여러 가지 문제해결 상황을 제시하고 해결해 보도록 하였다.

논술/수행평가 과제

다음 만화를 보고, 다리를 무사히 통과한 사람이 한 말을 추측하여 보자.

(5) 학습 평가

대단원 확인하기

대단원 학습의 마무리로써 문항별로 난이도와 계산, 이해, 추론 등의 수학적 능력 항목을 제시하여 학습 전략을 스스로 찾아가도록 하였다.

정기고사 방식의 평가

선다형, 단답형, 서술형 등의 다양한 평가 문항을 수록하고, 또 채점 기준을 제시하여 자율 학습에 도움이 되도록 하였다.

계산기를 활용할 수 있는 문제이다.

컴퓨터를 활용할 수 있는 문제이다.

Ⅵ. 지도 계획 및 교수 · 학습 지도안 예시

1. 수학의 활용 1학기 대단원별 지도 계획

수학의 활용에 배정된 1학기 수업 시간 수인 102시간(주당 6시간×17주)을 기준으로 익힘책을 포함하여 대단원별 지도 계획을 작성한 것이다.

대단원	중단원	교과서 쪽	시간 배당	차시
Ⅰ 명제와 논리	1. 합성명제와 논리 회로	8~29	14	1~14
	소계		14	
Ⅱ 지수와 로그	1. 지수와 로그	30~54	14	15~28
	2. 지수함수와 로그함수	55~65	9	29~37
	소계		23	
Ⅲ 수열	1. 등차수열과 등비수열	66~84	12	38~49
	2. 수열의 합	85~97	7	50~56
	소계		19	
Ⅳ 확률과 통계	1. 확률과 그 활용	98~112	8	57~64
	2. 통계와 그 활용	113~151	21	65~85
	소계		29	
Ⅴ 도형과 그래프	1. 도형과 그래프	152~179	17	86~102
	소계		17	
합계			102	

2. 수학의 활용 1학기 소단원별 지도 계획

수활의 활용에 배정된 1학기 수업 시간 수인 102시간(주당 6시간×17주)을 기준으로 익힘책을 포함하여 소단원별 지도 계획을 작성한 것이다.

대단원	중단원	소단원	지도 내용	용어 및 기호	교과서 쪽	시간 배당
Ⅰ 명제와 논리	1. 합성명제와 논리 회로	1. 합성명제	명제변수 p, q, r 등을 논리 연산인 ∧(논리곱), ∨(논리합), ~(부정)을 사용하여 만든 합성명제의 참과 거짓을 판별할 수 있게 한다. 합성명제의 진릿값을 구하게 하고, 진리표를 만들 수 있게 한다.	진릿값, 논리곱, 논리합, 진리표, 동치명제, 쌍조건문, 논리 회로, $p\wedge q$, $p\vee q$, $p\leftrightarrow q$	8~19	6
		2. 쌍조건문	조건문과 쌍조건문의 참과 거짓을 판별할 수 있게 하고, 이를 논리 연산으로 나타낼 수 있게 한다. 쌍조건문의 진릿값을 진리표를 통해 구할 수 있게 한다.		20~23	3
		3. 논리 회로	논리 회로의 뜻을 알게 하고, 논리 연산과 기호를 논리 회로에 활용할 수 있게 한다.		24~27	4
		중단원 확인하기, 읽을 거리			28~29	1
Ⅱ 지수와 로그	1. 지수와 로그	1. 지수	거듭제곱과 거듭제곱근의 뜻을 알게 하고, 그 성질을 이해하게 한다. 지수가 유리수, 실수까지 확장될 수 있음을 이해하게 한다.	거듭제곱근, (로그의) 밑, 로그, 진수, 상용로그, 지표, 가수, $\sqrt[n]{a}$, $\log_a N$, $\log N$	30~41	6
		2. 로그	로그의 뜻과 그 성질을 이해하게 한다.		42~52	7
		공학도구, 중단원 확인하기			53~54	1
	2. 지수함수와 로그함수	1. 지수함수와 그 그래프	실생활을 통해 지수함수의 뜻을 알게 한다. 지수함수의 그래프를 그려보고, 그 성질을 이해하게 한다.	지수함수, 로그함수	55~59	4
		2. 로그함수와 그 그래프	실생활을 통해 로그함수의 뜻을 알게 한다. 로그함수의 그래프를 그려보고, 그 성질을 이해하게 한다.		60~63	4
		중단원 확인하기, 수학 실험실			64~65	1
Ⅲ 수열	1. 등차수열과 등비수열	1. 등차수열	실생활을 통해 수열의 뜻을 알게 한다. 등차수열의 뜻을 알게 하고 일반항, 첫째항부터 제 n항까지의 합을 구할 수 있게 한다.	수열, 항, 유한수열, 무한수열, 일반항, 등차수열, 공차, 등차중항,	66~77	6

Ⅲ 수열	1. 등차수열과 등비수열	2. 등비수열	등비수열의 뜻을 알게 하고 일반항, 첫째 항부터 제 n항까지의 합을 구할 수 있게 한다.	등비수열, 공비, 등비중항, a_n, $\{a_n\}$	78~83	5
		중단원 확인하기			84	1
	2. 수열의 합	1. 수열의 합과 그 활용	수열의 합을 구할 수 있게 한다. 수열을 활용하여 실생활에 관련된 문제를 해결할 수 있게 한다.	계차수열, 원리합계, $\sum_{k=1}^{n} a_k$	85~95	6
		중단원 확인하기, 읽을 거리			96~97	1
Ⅳ 확률과 통계	1. 확률과 그 활용	1. 확률의 뜻과 기본 성질	확률의 뜻을 알게 한다. 확률의 기본 성질을 이해하게 하고, 이를 활용할 수 있게 한다.	수학적 확률, 통계적 확률	98~111	7
		중단원 확인하기			112	1
	2. 통계와 그 활용	1. 확률변수와 확률분포	확률변수와 확률분포의 뜻을 알게 한다. 기댓값과 분산을 구할 수 있게 한다.	확률변수, 확률분포, 기댓값, 분산, 표준편차, 이항분포, 정규분포, 표준화, 모집단, 전수조사, 표본, 표본조사, 임의추출, 모평균, 표본평균, 구간추정, 모비율, 표본비율, $\mathrm{E}(X)$, $\mathrm{V}(X)$, $\sigma(X)$, $\mathrm{B}(n,\ p)$, $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$, $\mathrm{N}(0,\ 1)$	113~122	5
		2. 이항분포	이항분포의 뜻을 이해하게 하고, 실생활 문제해결에 이를 활용할 수 있게 한다.		123~128	4
		3. 정규분포	정규분포의 뜻과 그 성질을 이해하게 한다.		129~134	4
		4. 통계 조사와 그 활용	간단한 통계 조사의 결과를 해석할 수 있게 한다.		135~150	7
		중단원 확인하기			151	1
Ⅴ 도형과 그래프	1. 도형과 그래프	1. 연결 상태가 같은 도형	평면도형의 성질을 이해하게 하고, 공통적인 특징을 설명할 수 있게 한다. 입체도형에서 연결 상태가 같은 도형을 관찰하고, 공통적인 특징을 설명할 수 있게 한다.	그래프, (그래프의) 꼭짓점, (그래프의) 변, 경로, 한붓그리기, 최적의 경로	152~160	5
		2. 그래프	점과 선으로 이루어진 도형의 성질을 이해하게 한다. 정다면체를 평면그래프로 나타낼 수 있게 한다.		161~172	6
		3. 그래프와 최적화	그래프를 이용하여 여러 가지 최적화 문제를 해결할 수 있게 한다.		173~178	5
		중단원 확인하기			179	1
합계						102

3. 교수 · 학습 지도안 예시

01 단원명

(1) 대단원: Ⅲ 수열
(2) 중단원: Ⅲ－2. 수열의 합
(3) 소단원: Ⅲ－2－1. 수열의 합과 그 활용
(4) 수업내용: 03 계차수열의 뜻과 활용

02 지도 계획

(1) 지도의 목표

① 계차수열의 뜻을 알게 한다.

② 계차수열의 일반항을 이용하여 수열의 일반항을 구할 수 있게 한다.

(2) 지도상의 유의점

① 계차수열은 등차수열이나 등비수열을 이루는 간단한 것만 다룬다.

② 계차수열을 이용하여 수열의 일반항을 구하는 것은 수열의 귀납적 정의에서 a_n을 구할 때 이용되므로 충분히 이해하여 활용할 수 있도록 한다.

(3) 지도과정

학습 단계	학습 요소	교수 · 학습 활동		유의점 및 자료	시간
		교사	학생		
도입	전시 학습 내용 확인	• 인사 및 출석 확인 • 전 시간에 학습한 내용 확인 [등차수열의 합] 첫째항이 a, 공차가 d, 제n항이 l인 등차수열의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n은 $S_n=\dfrac{n(\square+l)}{2}$ $=\dfrac{n\{\square+(n-1)d\}}{2}$ [등비수열의 합] 첫째항이 a, 공차가 r인 등비수열의 첫째항부터 제 n항까지의 합 S_n은 (i) $r\neq1$일 때, $S_n=\dfrac{a(1-r^n)}{1-r}=\dfrac{a(r^n-1)}{r-1}$ (ii) $r=1$일 때, $S_n=\square$ [자연수의 거듭제곱의 합] ① $\sum_{k=1}^{n}k=1+2+3+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$ ② $\sum_{k=1}^{n}k^2=1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\square$ ③ $\sum_{k=1}^{n}k^3=1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\left\{\dfrac{n(n+1)}{2}\right\}^2$	• 인사 • 전시 학습 내용에 대한 질문에 답한다. '$S_n=\dfrac{n(a+l)}{2}$, $S_n=\dfrac{n\{2a+(n-1)d\}}{2}$ 입니다.' 'na입니다.' '$\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$입니다.'	교과서 익힘책 색분필	
	본시 학습 목표 제시	• 이번 시간에는 계차수열의 뜻과 계차수열을 이용하여 수열의 일반항을 구하는 방법에 대하여 알아보자.	• 본시 학습 목표를 주시한다.		5분

학습 단계	학습 요소	교수 · 학습 활동		유의점 및 자료	시간
		교사	학생		
전개	탐구하기	• 벽돌쌓기 다음 그림과 같은 벽돌 쌓기의 각 단계에 있는 벽돌의 개수를 a_n이라고 할 때, 물음에 답하여 보자. $a_1=1$ $a_2=3$ $a_3=6$ $a_4=10$ ⋯ 1. a_4, a_5, a_6을 구하여라. 2. 수열 $\{a_n\}$에서 a_n과 a_{n+1} 사이의 관계를 말하여라.	• 경청하며 질문에 답한다. '$a_4=6+4=10$, $a_5=10+5=15$, $a_6=15+6=21$입니다.' '$a_{n+1}=a_n+(n+1)$인 관계가 있습니다.'		
	알아보기	• 계차수열의 뜻을 알아보자. 수열이 어떤 규칙에 의해 만들어져 있는지를 알아보기 위해 가장 먼저 하는 일은 이웃하는 두 항의 차를 구하여 조사하는 것이다. 위 수열에서 이웃하는 두 항의 차를 구해보면 다음과 같다. 1, 3, 6, 10, 15, 21, ⋯ 2, 3, 4, 5, 6, ⋯ 즉, 수열 a_1, a_2, a_3, ⋯, a_n, ⋯에 대하여 b_n을 다음과 같이 정의하자. $b_n=a_{n+1}-a_n\ (n=1, 2, 3, \cdots)$ 이때, 수열 $\{b_n\}$을 주어진 수열 $\{a_n\}$의 계차수열이라고 한다.	• 설명을 들으며 질문에 답한다.		
	보기	(1) 수열 1, 4, 9, 16, 25, ⋯의 계차수열은 무엇인가? $\{a_n\}$ 1 4 9 16 25 ⋯ $\{b_n\}$ 3 5 7 9 ⋯ 이때, 계차수열 $\{b_n\}$은 어떤 수열인가? (2) 수열 5, 6, 8, 12, 20, ⋯의 계차수열은 무엇인가? $\{a_n\}$ 5 6 8 12 20 ⋯ $\{b_n\}$ 1 2 4 8 ⋯ 이때, 계차수열 $\{b_n\}$은 어떤 수열인가?	'3, 5, 7, 9, ⋯입니다.' '첫째항이 3이고 공차가 2인 등차수열입니다.' '1, 2, 4, 8, ⋯입니다.' '첫째항이 1이고 공비가 2인 등비수열입니다.'		
	스스로 하기	다음 수열의 계차수열을 구하여라. (1) 1, 2, 7, 16, 29, ⋯ (2) 2, 7, 32, 157, 782, ⋯	• 지명된 학생은 앉은 자리에서 대답하고, 나머지 학생은 공책에 푼다. (풀이) (1) $\{a_n\}$ 1 2 7 16 29 ⋯ $\{b_n\}$ 1 5 9 13 ⋯ (2) $\{a_n\}$ 2 7 32 157 782 ⋯ $\{b_n\}$ 5 25 125 625 ⋯		

학습 단계	학습 요소	교수 · 학습 활동		유의점 및 자료	시간
		교사	학생		
	알아보기	• 계차수열을 이용하여 수열의 일반항을 알아보자. 수열 $\{a_n\}$의 계차수열을 $\{b_n\}$이라고 하면 $a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ \cdots,\ a_{n-1},\ a_n$ $b_1,\ b_2,\ b_3,\ \cdots,\ b_{n-1}$ $b_1\ =a_2-a_1$ $b_2\ =a_3-a_2$ $b_3\ =a_4-a_3$ $\vdots$ $b_{n-1}=a_n-a_{n-1}$ 이들을 변끼리 더하면 $b_1+b_2+\cdots+b_{n-1}=a_n-a_1$ $\therefore a_n=a_1+(b_1+b_2+\cdots+b_{n-1})$ $=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}b_k$ (단, $n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots$)	• 경청하며 질문에 답한다.		
	보기	수열 $\{a_n\}$이 $3,\ 4,\ 7,\ 12,\ 19,\ \cdots$일 때, 이 수열의 계차수열을 $\{b_n\}$이라고 하면 $\{a_n\}$ 3 4 7 12 19 ⋯ $\{b_n\}$ 1 3 5 7 ⋯ 에서 $b_n=2n-1$이므로 $a_n=3+\sum_{k=1}^{n-1}(2k-1)$ $=3+2\cdot\frac{(n-1)n}{2}-(n-1)$ $=n^2-2n+4\ (n\geq2)$ 그런데 이것은 $n=1$일 때에도 성립하므로 구하는 일반항은 $a_n=n^2-2n+4$이다. ※ $a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}b_k$는 일반적으로 $n\geq2$일 때 성립하므로 $n=1$일 때에도 성립하는지 확인해야 한다.	• 칠판을 주시하며 질문에 답한다.		
	스스로 하기	다음 수열의 일반항을 구하여라. (1) $1,\ 3,\ 8,\ 16,\ 27,\ 41,\ \cdots$ (2) $1,\ 1,\ 2,\ 4,\ 7,\ 11,\ \cdots$ (3) $2,\ 3,\ 5,\ 9,\ 17,\ 33,\ \cdots$ (4) $-1,\ 0,\ 3,\ 12,\ 39,\ 120,\ \cdots$	• 지명된 학생은 칠판에 풀고, 나머지 학생은 공책에 푼다. (풀이) (1) $\{a_n\}$ 1 3 8 16 27 41 ⋯ $\{b_n\}$ 2 5 8 11 14 ⋯ 에서 $b_n=3n-1$이므로		

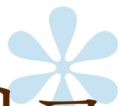
학습 단계	학습 요소	교수 · 학습 활동		유의점 및 자료	시간
		교사	학생		
			$a_n=1+\sum_{k=1}^{n-1}(3k-1)$ $=1+3\cdot\frac{(n-1)n}{2}-(n-1)$ $=\frac{3}{2}n^2-\frac{5}{2}n+2\ (n\geq2)$ 그런데 이것은 $n=1$일 때에도 성립하므로 구하는 일반항은 $\frac{3}{2}n^2-\frac{5}{2}n+2$ (2) $\{a_n\}$ 1 1 2 4 7 11 ⋯ $\{b_n\}$ 0 1 2 3 4 ⋯ 에서 $b_n=n-1$이므로 $a_n=1+\sum_{k=1}^{n-1}(k-1)$ $=1+\frac{(n-1)n}{2}-(n-1)$ $=\frac{1}{2}n^2-\frac{3}{2}n+2\ (n\geq2)$ 그런데 이것은 $n=1$일 때에도 성립하므로 구하는 일반항은 $\frac{1}{2}n^2-\frac{3}{2}n+2$ (3) $\{a_n\}$ 2 3 5 9 17 33 ⋯ $\{b_n\}$ 1 2 4 8 16 ⋯ 에서 $b_n=2^{n-1}$이므로 $a_n=2+\sum_{k=1}^{n-1}2^{k-1}$ $=2+\frac{1(2^{n-1}-1)}{2-1}$ $=2^{n-1}+1\ (n\geq2)$ 그런데 이것은 $n=1$일 때에도 성립하므로 구하는 일반항은 $2^{n-1}+1$ (4) $\{a_n\}$ −1 0 3 12 39 120 ⋯ $\{b_n\}$ 1 3 9 27 81 ⋯ 에서 $b_n=3^{n-1}$이므로 $a_n=1+\sum_{k=1}^{n-1}3^{k-1}$ $=-1+\frac{1(3^{n-1}-1)}{3-1}$ $=\frac{1}{2}(3^{n-1}-3)\ (n\geq2)$ 그런데 이것은 $n=1$일 때에도 성립하므로 구하는 일반항은 $\frac{1}{2}(3^{n-1}-3)$ ※ 풀이 후 설명한다.		

<table>
<tr><th rowspan="2">학습 단계</th><th rowspan="2">학습 요소</th><th colspan="2">교수 · 학습 활동</th><th rowspan="2">유의점 및 자료</th><th rowspan="2">시간</th></tr>
<tr><th>교사</th><th>학생</th></tr>
<tr><td></td><td>수준별 학습</td><td>익힘책 81, 83, 84쪽</td><td>• 수준별로 공책에 문제를 풀이한다.
하 ⟶ 바탕 다지기(81쪽)-함께하기, 스스로 하기
중 ⟶ 바탕 다지기(81쪽)-1번
기본 익히기(83쪽)-5번
상 ⟶ 실력 키우기(84쪽)-3번, 4번

※ 시간의 여유가 있는 경우 다른 수준의 문제도 풀어 본다.</td><td>익힘책</td><td>35분</td></tr>
<tr><td>형성 평가</td><td>문제</td><td>계차수열을 이용하여 수열 1, 3, 7, 15, 31, 63, …의 일반항을 구하여라.</td><td>(풀이)
$\{a_n\}$ 1 3 7 15 31 63 …
$\{b_n\}$ 2 4 8 16 32 …
에서 $\{b_n\}$은 첫째항이 2이고 공비가 2인 등비수열이므로
$b_n=2\cdot 2^{n-1}=2^n$
$\therefore a_n=1+\sum_{k=1}^{n-1}2^k$
$=1+\frac{2(2^{n-1}-1)}{2-1}$
$=2^n-1\ (n\geq 2)$
이것은 $n=1$일 때에도 성립하므로 구하는 일반항은 $a_n=2^n-1$</td><td></td><td>5분</td></tr>
<tr><td rowspan="3">정리 및 차시 예고</td><td>정리</td><td>• 계차수열의 정의
수열 $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots$에 대하여 b_n을 다음과 같이 정의하자.
$b_n=a_{n+1}-a_n\ (n=1, 2, 3, \cdots)$
이때, 수열 $\{b_n\}$을 주어진 수열 $\{a_n\}$의 계차수열이라고 한다.

• 계차수열과 수열의 일반항
수열 $\{a_n\}$의 계차수열을 $\{b_n\}$이라고 하면
$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}b_k$ (단, $n=2, 3, 4, \cdots$)</td><td>• 질문에 답한다.</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>과제 제시</td><td>• 수준에 따라
하 ⟶ 바탕 다지기(81쪽)−1번,
기본 익히기(83쪽)−3번, 5번
중 ⟶ 기본 익히기(83쪽)−3번,
실력 키우기(84쪽)−3번, 4번
상 ⟶ 실력 키우기(84쪽)−3번, 5번
을 풀이하여 제출할 것.</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>차시 예고</td><td>• 다음 시간에는 원리합계를 공부하겠습니다.</td><td>• 차시 확인 및 인사</td><td></td><td>5분</td></tr>
</table>

nd part ›››



단원별 지도 자료

Ⅰ. 명제와 논리

Ⅱ. 지수와 로그

Ⅲ. 수열

Ⅳ. 확률과 통계

Ⅴ. 도형과 그래프

Ⅰ. 명제와 논리

01 단원의 목차

1. 합성명제와 논리 회로

02 단원의 지도 목표

1. 합성명제와 논리 회로

① 진릿값의 뜻을 알고, 명제의 진릿값을 구할 수 있게 한다.
② 논리곱, 논리합, 부정의 뜻과 그 진릿값을 진리표로 나타낼 수 있게 한다.
③ 동치명제의 뜻을 알고, 진리표를 이용하여 동치명제임을 보일 수 있게 한다.
④ 조건문과 쌍조건문의 뜻을 알고, 그 진릿값을 구할 수 있게 한다.
⑤ 논리 회로의 뜻을 알고, 기호로 나타낼 수 있게 한다.
⑥ 합성명제의 논리 회로를 기호로 표현할 수 있게 하고, 그 진릿값을 구할 수 있게 한다.

03 단원 지도상의 유의점

① 합성명제의 진릿값을 구할 때에는 각각의 명제의 진릿값을 먼저 구한 다음 진릿값의 논리곱, 논리합, 부정, 조건문, 쌍조건문의 진릿값을 구하도록 지도한다.
② 어떤 두 명제가 동치명제임을 보이려면, 먼저 진리표를 구한 후 각 명제의 진릿값이 같음을 보인다.
③ 조건문은 두 명제 p, q의 합성명제임에 유의한다.

04 단원의 이론적 배경

1. 명제

문장에는 일반적인 언어로 나타낸 것과 수학적인 언어로 나타낸 것이 있다. 이러한 문장의 내용은 참인 것, 거짓인 것, 참이라고도 거짓이라고도 말할 수 없는 것 중 어느 하나가 된다. 이때, 그 내용이 참인지 거짓인지를 판별할 수 있는 문장을 명제라 하며, 참, 거짓을 명제의 진릿값이라고한다. 즉, 명제의 진릿값에는 참과 거짓 둘 뿐이며, 참이라고도 거짓이라고도 말할 수 없는 문장은 명제가 아니다.

'사람은 동물이다.' 는 참인 문장이고, '해는 서쪽에서 뜬다.' 는 거짓인 문장으로, 이 두 문장은 모두 명제이다.

그런데 참, 거짓을 판별할 수 없는 것 가운데 다음과 같은 것이 있다.

'$2x-1<0$', '$x^2-2x=0$'

이들은 모두 참, 거짓을 판별할 수 없다. 그러나 x에 구체적인 수를 대입하면 참인지 거짓인지를 판별할 수 있게 된다.

이와 같은 것을 명제함수 또는 조건 또는 조건명제라고 하며, 명제와는 구별한다. 명제는 보통 p, q, r, $\cdots$의 문자로 나타내고, 명제함수는 $p(x)$, $q(x)$, $\cdots$으로 나타낸다.

2. 명제의 합성

몇 개의 명제로부터 새로운 명제를 만들 수 있다. 두 명제 '6은 2의 배수이다.' 와 '6은 3의 배수이다.' 로부터 '6은 2의 배수이다. 그리고 6은 3의 배수이다.' 를 만들 수 있다. 이와 같이, 주어진 명제들로부터 새로운 명제

를 만드는 것을 처음 명제들을 합성한다고 말한다.
이때, 새로 만들어진 명제를 처음 명제들의 합성명제 (compound proposition)라고 한다.
이에 대하여 '6은 2의 배수이다.' 와 같이 더 이상 간단한 명제로 분해할 수 없는 것을 단순명제 (simple proposition)라고 한다.

(1) 합접문(논리곱 : conjunction)
두 명제 p, q에 '그리고' 를 써서 만든 명제 'p 그리고 q(p and q)' 를 p와 q의 논리곱이라 하며, 기호로 '$p \wedge q$' 와 같이 나타낸다. 이것을 'p이고 q' 라고도 읽는다.

(2) 이접문(논리합 : disjunction)
두 명제 p, q에 '또는' 을 써서 만든 명제 'p 또는 q(p or q)' 를 p와 q의 논리합이라 하며, 기호로 '$p \vee q$' 와 같이 나타낸다. 이것을 'p이거나 q' 라고도 읽는다.

(3) 부정문(negation)
명제 p에 '아니다' 를 붙여 만든 명제 'p가 아니다.(not p)' 를 p의 부정이라 하며, 기호로 '$\sim p$' 와 같이 나타낸다.

(4) 조건문(conditional)
두 명제 p, q를 '…이면 …이다.' 를 써서 만든 명제 'p이면 q이다.(if p then q)' 를 조건문이라 하며, 기호로 '$p \longrightarrow q$' 와 같이 나타낸다.

(5) 쌍조건문(biconditional)
두 명제 p, q가 있을 때, 합성명제 'p이면 q이고, q이면 p이다.(p if and only if q)' 를 쌍조건문이라 하고, 이것을 기호로 '$p \longleftrightarrow q$' 와 같이 나타낸다.

3. 명제의 진릿값

명제의 참, 거짓을 그 명제의 진릿값이라고 하며, 참인 것을 기호 T로, 거짓인 것을 기호 F로 나타내면 합성명제 $p \wedge q$, $p \vee q$, $\sim p$의 진릿값은 다음 표와 같이 정의된다. 이 표를 합성명제의 진리표라고 한다.

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$
T	T	T	T
T	F	F	T
F	T	F	T
F	F	F	F

p	$\sim p$
T	F
F	T

조건문 $p \longrightarrow q$의 진릿값은 다음 진리표와 같이 정의한다.

p	q	$p \longrightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

4. 명제 사이의 관계

(1) 함의 관계(implication)
두 명제 p, q에 대하여 p가 참일 때 q가 반드시 참이면 p는 q를 함의(含意)한다고 하고 '$p \Longrightarrow q$' 로 나타낸다.
p가 q를 함의하게 되면 p의 주장은 q의 주장을 포함하게 된다. 예를 들면, 삼각형에서 '두 변의 길이가 같다.' 는 '두 내각의 크기가 같다.' 를 함의한다. 왜냐하면, 삼각형에서는 '두 변의 길이가 같다.' 는 뜻 속에 '두 내각의 크기가 같다.' 는 사실이 내포되어 있기 때문이다.

(2) 동치 관계(equivalence relation)
두 명제 p, q에 대하여 p와 q의 진릿값이 같을 때 p와 q는 동치(同値)라고 한다. 이를 기호로 '$p \equiv q$' 와 같이 나타낸다.
명제 $p \longrightarrow q$와 $\sim p \vee q$의 진리표에서 보면, 두 명제의 진릿값이 서로 같다. 그러므로 $p \longrightarrow q$는 $\sim p \vee q$와 동치이다. 따라서

$$(p \longrightarrow q) \equiv (\sim p \vee q)$$

이다.

(3) 관계의 성질

함의 관계는 다음의 성질을 갖는다.

- $p \Longrightarrow p$ (반사율, reflexive law)
- $(p \Longrightarrow q) \wedge (q \Longrightarrow p)$이면 $p \equiv q$
  (반대칭률, asymmetric law)
- $(p \Longrightarrow q) \wedge (q \Longrightarrow r)$이면 $p \Longrightarrow r$
  (추이율, transitive law)

동치 관계는 다음의 성질을 갖는다.

- $p \equiv p$ (반사율, reflexive law)
- $p \equiv q$이면 $q \equiv p$
  (대칭률, symmetric law)
- $(p \equiv q) \wedge (q \equiv r)$이면 $p \equiv r$
  (추이율, transitive law)

Ⅱ. 지수와 로그

01 단원의 목차

1. 지수와 로그

1. 지수
   - 01 거듭제곱근의 뜻과 지수법칙
   - 02 거듭제곱근
   - 03 정수 지수의 정의
   - 04 유리수 지수의 정의
   - 05 실수 지수의 정의
2. 로그
   - 01 로그의 뜻
   - 02 로그의 성질
   - 03 로그의 밑의 변환
   - 04 상용로그
   - 05 상용로그의 지표와 가수

2. 지수함수와 로그함수

1. 지수함수와 그 그래프
   - 01 지수함수의 뜻
   - 02 지수함수의 그래프와 그 성질
2. 로그함수와 그 그래프
   - 01 로그함수의 뜻
   - 02 로그함수의 그래프와 성질

02 단원의 지도 목표

1. 지수와 로그

① 거듭제곱과 거듭제곱근의 뜻을 알게 하고, 그 성질을 이해하게 한다.

② 지수가 유리수까지 확장될 수 있음을 이해하게 한다.

③ 지수가 실수까지 확장될 수 있음을 직관적으로 이해하게 한다.

④ 로그의 뜻을 알게 하고, 그 성질을 이해하게 한다.

⑤ 밑의 변환 공식에 의하여 여러 가지 로그식의 계산을 할 수 있게 한다.

⑥ 상용로그의 뜻을 알게 하고, 지표와 가수의 성질을 이해하게 한다.

⑦ 상용로그의 지표와 가수의 성질을 활용할 수 있게 한다.

2. 지수함수와 로그함수

① 실생활 상황을 통해 지수함수의 뜻을 알게 한다.

② 지수함수의 그래프를 그릴 수 있게 하며, 그 성질을 이해하게 한다.

③ 실생활 상황을 통해 로그함수의 뜻을 알게 한다.

④ 로그함수의 그래프를 그릴 수 있게 하며, 그 성질을 이해하게 한다.

03 단원 지도상의 유의점

① 자연수인 지수에 대하여 성립하는 지수법칙이 지수가 정수, 유리수, 실수로 확장되어도 성립함을 강조한다.

② 로그의 정의와 로그의 계산에서는 지수와 로그 사이의 관계를 이용하게 하고, 지수의 성질을 이용하여 로그의 성질을 유도하도록 한다.

③ 상용로그표를 정확하게 이용할 수 있게 하고, 상용로그의 계산에서는 계산기를 적극 활용하게 한다.

④ 실수 x에 대하여 a^x $(a>0, a\neq1)$의 값은 단 하나로 정해지므로 $y=a^x$은 x의 함수임을 이해하게 하고, $y=a^x$을 a를 밑으로 하는 지수함수라고 정의함을 알게 한다.

⑤ 지수함수의 그래프를 순서쌍을 이용하여 매끄러운 곡선이 되도록 그리게 한다.

⑥ 지수함수의 성질은 그래프를 통하여 지도한다.

⑦ 로그함수의 그래프는 지수함수의 그래프를 이용하여 그릴 수 있도록 지도한다.

⑧ 로그함수의 성질은 그래프를 통하여 지도한다.

04 단원의 이론적 배경

1. 지수의 확장

양의 실수 a와 자연수 n에 대하여 $\underbrace{a\times a\times a\times\cdots\times a}_{n\text{개}}$를 a^n으로 나타내고, $a^0=1$, $a^{-n}=\dfrac{1}{a^n}$을 정의하여 지수가 정수인 경우로 확장한다. 또한 m, n이 정수이며 $n\geq2$일 때, $a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$과 같이 유리수 지수를 정의한다.

그러나 실수 지수를 정의하기 위해서는 많은 수학적 기초 이론이 필요하다. 실수의 집합은 유리수의 집합과 무리수의 집합의 합집합이며, 수직선은 실수와 일대일 대응 관계가 있다. 즉, 실수의 집합은 직선을 채울 수 있으며 이것은 실수가 연속적임을 뜻한다. 유리수의 집합은 비록 연속적이지는 않지만 매우 조밀하다. 이것은 임의의 두 유리수 사이에는 반드시 유리수가 존재함을 뜻하며, 임의의 실수 x에 대하여 x에 한없이 가까워지는 유리수의 수열을 항상 잡을 수 있음이 알려져 있다.

예를 들면, 무리수 $\sqrt{2}$는 $\sqrt{2}=1.41421356\cdots$이므로

$$1,\ 1.4,\ 1.41,\ 1.414,\ 1.4142,\ 1.41421,\ \cdots$$

과 같이 $\sqrt{2}$에 한없이 가까워지는 유리수들을 선택할 수 있으며, 다음과 같이 유리수를 지수로 가지는 수를 계산기로 계산해 보면 어떤 일정한 수에 한없이 가까워짐을 알 수 있다.

$$3^1,\ 3^{1.4},\ 3^{1.414},\ 3^{1.4142},\ 3^{1.41421},\ \cdots$$

이때, 이 수들이 가까워지는 수를 $3^{\sqrt{2}}$이라고 정의한다.

따라서 임의의 실수 x에 대하여 실수 지수 a^x이 정의된다.

2. 네이피어 로그

17세기에 네이피어(Napier, J.; 1550~1617)는 로그를 발견하였으며, 거듭제곱을 지수로 표현하는 것이 일상화되기 전이기 때문에 로그의 발견은 매우 독창적인 것이었고, 수학사에는 매우 획기적인 일이었다.

오른쪽 그림과 같이 선분 AB와 반직선 CD에서 점 P와 점 Q가 동시에 점 A와 점 C를 각각 출발하여 움직일 때, 네이피어는 점 P가 항상 $\overline{\text{PB}}$와 같은 속도로 움직이고 점 Q는 일정한 속도로 움직인다고 가정하여, $\overline{\text{CQ}}$를 $\overline{\text{PB}}$의 로그라고 정의하였다.

즉, 위의 그림에서 $y=\text{Naplog}\,x$이다. (단, Naplog는 네이피어 로그의 기호이다.)

네이피어는 7자리 사인표를 사용했기 때문에 $\overline{\text{AB}}=10^7$으로 주었다.

네이피어 로그는 자연로그와는 반대로 진수가 증가하면 로그값이 감소하는 로그이며, 로그 체계의 기본 원리인 등비수열과 등차수열의 관계를 보여 준다.

예를 들면, $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$일 때 다음이 성립한다.

$$\text{Naplog}\,a-\text{Naplog}\,b=\text{Naplog}\,c-\text{Naplog}\,d$$

3. 로그표의 역사

(1) 네이피어의 로그표

네이피어 로그는 자연로그와 비슷하며 밑이 $\dfrac{1}{e}$인 로그이다.

(2) 뷔르기(Bürgi; 1552～1632)의 로그표
네이피어의 로그표를 개선한 로그표이다.
(3) 브리그스(Briggs, H.; 1556?～1631)의 로그표
밑이 10인 로그표로, 1617년부터 1624년까지 7년에 걸쳐서 만들었으며 '로그산술' 에 실려 있다.
(4) 스파이델(Speidell, J.; 1619경)의 로그표
삼각함수의 자연로그를 계산한 로그표이며, 1619년에 쓴 '새로운 로그' 에 실려 있다.
(5) 블라크(Vlacq, A.; 1600～1666)의 로그표
브리그스의 로그표의 공백을 채운 로그표이다.
(6) 건터(Gunter, E.; 1581～1626)의 로그표
sin과 tan의 1분의 각에 대한 7자리 상용로그표이며, '건터의 사슬' 에 실려 있다.
(7) 영국의 로그표
1924년과 1949년에 영국에서 로그 발견 300주년 기념 사업으로 20자리 수의 로그를 계산한 로그표이다.

4. 함수의 발달

함수는 독립변수와 종속변수 사이의 종속 관계를 기술하기 위하여 생겨났다. 역학에서 두 변량 사이의 관계를 연구한 갈릴레이 등에 의하여 개념화된 함수는 17세기에 이르러 물체의 운동을 나타내는 곡선을 연구하는 가운데 도입되었고 곡선과 결합된 함수를 나타내는 방정식이 연구되면서 17세기말경 대수적인 함수가 등장하였다.
데카르트(Descartes, R.; 1596～1650)는 함수의 본질은 '따라 변하는 두 변량 사이의 대응 관계' 라고 주장하였으므로 데카르트를 함수의 창시자로 보기도 한다. 함수(function)란 용어는 1692년 독일의 라이프니츠(Leibniz, G.W,; 1646～1716)가 처음 사용하였고, 함수 기호 f는 18세기에 오일러
(Euler, L.; 1707～1783)가 처음 사용하였다.
해석기하학의 발달과 함께 여러 곡선이 방정식으로 표현되면서 오일러는 '일변수 함수란 그 변수와 몇 개의 상수로 이루어진 해석적인 식' 이라고 정의하였다.
18세기 후반에는 하나의 식으로 표현되지 않는 함수가 발견되었고, 푸리에(Fourier, J.B.J,; 1768～1830), 코시(Cauchy, A.L,; 1789～1857), 디리클레(Dirichlet, J.P.G.L.; 1805～1859) 등에 의하여 주어진 구간의 변량 x에 대하여 y의 값이 각각 정해질 때, y는 x의 함수라고 정의하였다. 한편, 칸토어(Cantor, G.; 1845～1918)에 의하여 집합론이 정립된 후, 20세기에는 디리클레의 정의에 의한 '대응' 이라는 함수 개념이 보편화되었으며, 바이어슈트라스(Weierstrass, K.T.W.; 1815～1897), 데데킨트(Dedekind, J.W.R.; 1831～1916) 등의 연구로 오늘의 함수 이론이 완성되었다.
오늘날 우리는 두 집합 A와 B에 대하여 함수 $f: A \to B$를 'A의 각 원소에 B의 한 원소가 대응되는 관계' 로 정의하고, 함수 f의 그래프는 순서쌍의 집합

$$G(f)=\{(a,\ b)\,|\,a\in A,\ b=f(a)\}$$

로 정의되므로 곱집합 $A\times B$의 부분집합이다.

5. 지수함수와 로그함수

$a>0$이고 $a\neq1$인 실수 a와 임의의 실수 x에 대하여 실수 지수 a^x의 값은 단 하나 존재하고, x의 값이 연속적으로 변하면 a^x의 값도 연속적으로 변하게 된다. 따라서 x의 값이 변함에 따라 a^x의 값도 변하므로 $y=a^x$은 함수가 되며, 이 함수를 a를 밑으로 하는 지수함수라고 한다.
실제로 $y=a^x$의 순서쌍을 좌표평면에 나타내고 매끄러운 곡선으로 연결하면 지수함수의 그래프가 되며, $a>1$이면 증가하는 그래프이고 $0<a<1$이면 감소하는 그래프가 되므로 지수함수 $y=a^x$은 역함수가 존재하게 된다.
지수함수 $y=a^x$의 역함수는 로그의 정의에 의하여 $y=\log_a x$ ($a>0$이고 $a\neq1$)이며, 이 함수를 a를 밑으로 하는 로그함수라고 한다. 로그함수 $y=\log_a x$는 지수함수의 역함수로 정의하였으므로 로그함수의 그래프는 지수함수의 그래프를 이용하여 그린다.

〈참고 자료〉

1. 정동명 · 조승제(1991), 실해석학개론, 경문사
2. 석용징 · 신현성 · 이준열(2000), 수학과 교재론, 경문사
3. Lin, Y.Lin, S.; 이흥천 역(1992), 집합론, 경문사
4. Eves, H.; 이우영 · 신항균 역(1997), 수학사, 경문사

Ⅲ. 수열

01 단원의 목차

1. 등차수열과 등비수열

1. 등차수열
   - 01 수열의 뜻
   - 02 등차수열의 뜻
   - 03 등차수열의 일반항
   - 04 등차수열의 합
2. 등비수열
   - 01 등비수열의 뜻
   - 02 등비수열의 일반항
   - 03 등비수열의 합

2. 수열의 합

1. 수열의 합과 그 활용
   - 01 합의 기호 ∑
   - 02 자연수의 거듭제곱의 합
   - 03 계차수열의 뜻과 활용
   - 04 원리합계

02 단원의 지도 목표

1. 등차수열과 등비수열

① 수열의 뜻을 알게 한다.

② 등차수열과 공차의 뜻을 알게 하고, 일반항을 구할 수 있게 한다.

③ 등차중항의 뜻을 알게 하고, 이를 이용하여 등차수열의 임의의 두 항을 알 때 다른 항을 구할 수 있게 한다.

④ 등차수열에서 첫째항부터 제n항까지의 합을 구할 수 있게 한다.

⑤ 등비수열과 공비의 뜻을 알게 하고, 일반항을 구할 수 있게 한다.

⑥ 등비중항의 뜻을 알게 하고, 이를 이용하여 등비수열의 임의의 두 항을 알 때 다른 항을 구할 수 있게 한다.

⑦ 등비수열에서 첫째항부터 제n항까지의 합을 구할 수 있게 한다.

2. 수열의 합

① ∑의 뜻과 성질을 이해하게 하고, 이를 사용하여 수열의 합을 나타낼 수 있게 한다.

② 자연수의 거듭제곱의 합을 구하는 공식을 이해하게 하고, 이를 활용할 수 있게 한다.

③ 계차수열의 뜻을 알게 하고, 계차수열을 이용하여 수열의 일반항을 구할 수 있게 한다.

④ 수열을 활용하여 실생활에 관련된 문제를 해결할 수 있게 한다.

03 단원 지도상의 유의점

① 등차수열의 합의 공식을 유도하는 과정을 이해시키고, 이를 활용할 수 있도록 지도한다.

② $a_n=S_n-S_{n-1}$은 $n\geq2$일 때에만 의미를 가짐을 주의시킨다.

③ 복잡한 수열의 합은 ∑를 이용하여 간편하게 나타낼 수 있도록 지도한다.

④ 계차수열은 등차수열이나 등비수열이 되는 경우만 다룬다.

⑤ 계차수열의 일반항을 구하는 것을 충분히 이해시켜 활용할 수 있도록 지도한다.

⑥ 적립금, 할부금의 계산공식은 유도하지 않는다.

04 단원의 이론적 배경

수열에 대한 연구는 일찍이 고대 그리스의 수학으로부터 비롯되었다. 여기서는 수열과 관련된 피타고라스 학파의 업적에 대하여 알아보자.

1. 피타고라스 학파의 업적

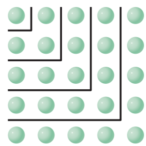
피타고라스 학파는 [그림 1]을 이용하여 1부터 $2n-1$까지의 홀수를 더한 합이 다음과 같음을 증명하였다.

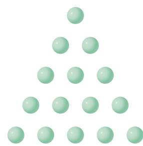
$$1+3+5+7+\cdots+(2n-1)=n^2$$

또, [그림 2]를 이용하여 1부터 n까지 더한 합이 다음과 같음을 증명하였다.

$$1+2+3+\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1)$$

특히, 이와 같은 꼴의 수를 삼각수라고 불렀다.


[그림 1]


[그림 2]

또한, 그들은 3개의 수 $a,\ b,\ c$에 대하여

$$a-b=b-c$$

가 성립하면 $a,\ b,\ c$는 등차수열이고,

$$a:b=b:c$$

가 성립하면 $a,\ b,\ c$는 등비수열이며,

$$(a-b):(b-c)=a:c$$

가 성립하면 조화수열이라고 하였다.

한편, 조화수열에서는 비례식을 변형하여

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{c}=\frac{2}{b} \text{ 또는 } \frac{1}{a}-\frac{1}{b}=\frac{1}{b}-\frac{1}{c}$$

이라는 관계식으로부터 그 역수 $\frac{1}{a},\ \frac{1}{b},\ \frac{1}{c}$이 등차수열을 이룬다는 사실을 발견하였다.

2. 이자와 이자율

이자란 신용, 화폐를 사용한 대가로 지불되는 가격을 말하며, 이자율은 계약 기간 중의 자본의 총 성장률로서 정의된다. 고전학파 이전의 중세의 학자들은 이자를 받는다는 것을 비윤리적인 것으로 여겼다. 이자 이론에 대한 고전학파의 관심은 윤리적인 정당화가 아니라 균형 이자율의 존재 및 현실 이자율과의 관계를 연구하는 것이었고 이와 대조적으로 J.M. 케인즈는 이자를 채권 대신 화폐를 보유하려는 경향을 억제하는 유인 도구로서 이해하는 '유동선호설'이라는 새로운 이자 이론을 발표하였다. 만일 사람들이 화폐의 형태로 자산을 보유하기를 원하면 유가증권을 매각하려 할 것이고 따라서 증권 가격은 하락할 것이다. 그런데 증권 가격의 하락은 이자율의 상승을 의미한다. 반대로 사람들이 화폐를 처분하려 하면 증권 가격은 상승할 것이고 이자율은 하락할 것이다.

현대에 있어서 이자는 전문 경영자들이 그들이 소유하지 않은 자본을 통제하고 동시에 자본 소유자들이 자신의 권리를 양도하는 데 용이하고도 편리한 수단을 제공하게 한다. 이때, 사회적으로 최적 수준의 이자율을 결정하는 문제가 제기된다. 이자율은 필요 이상 높게 책정되지 말아야 하며, 금융 시장이 원활히 기능하는 데 장애가 되지 않는 수준에서 결정되어야 한다.

이자율의 결정은 원금을 이용한 생산 기회에서 얻은 수익, 소비의 시간 선호, 인플레이션, 생산 기회로부터 얻게 되는 미래 수익의 불확실성에 대한 위험성 등의 요소에 의해 결정된다.

Ⅳ. 확률과 통계

01 단원의 목차

1. 확률과 그 활용

2. 통계와 그 활용

1. 확률변수와 확률분포
    01 확률변수의 뜻
    02 확률분포
    03 평균, 분산 및 표준편차
2. 이항분포
    01 이항분포의 뜻
    02 이항분포의 평균과 표준편차
    03 이항분포의 활용
3. 정규분포
    01 정규분포의 뜻
    02 표준정규분포
4. 통계 조사와 그 활용
    01 표본조사
    02 표본평균의 뜻과 그 분포
    03 모평균의 추정
    04 표본비율의 분포

02 단원의 지도 목표

1. 확률과 그 활용

① 수학적 확률과 통계적 확률의 뜻을 이해하게 한다.

② 확률의 기본 성질을 이해하게 하고, 이를 활용할 수 있게 한다.

③ 임의의 사건의 여사건을 구하고, 이를 활용할 수 있게 한다.

2. 통계와 그 활용

① 확률변수와 확률분포의 뜻을 이해하게 한다.

② 확률변수의 기댓값과 분산 및 표준편차의 뜻을 알고, 이를 구할 수 있게 한다.

③ 이항분포의 뜻을 이해하게 하고, 이항분포의 평균과 표준편차를 구할 수 있게 한다.

④ 이항분포를 실생활 문제 해결에 활용하도록 지도한다.

⑤ 정규분포의 뜻과 그 성질을 이해하게 한다.

⑥ 표준정규분포의 뜻을 알게 하고, 표준정규분포표를 활용할 수 있게 한다.

⑦ 표준화의 뜻을 알게 하고, 이를 활용할 수 있게 한다.

⑧ 전수조사와 표본조사, 모집단과 표본의 뜻을 이해하게 한다.

⑨ 임의추출의 뜻과 방법을 알게 한다.

⑩ 모평균 및 표본평균의 뜻을 알게 하고, 표본평균의 분포를 이해하게 한다.

⑪ 모평균을 추정하고, 그 결과를 해석할 수 있게 한다.

⑫ 모비율 및 표본비율의 뜻을 알고, 표본비율의 분포를 이해하게 한다.

⑬ 모비율을 추정하고, 그 결과를 해석할 수 있게 한다.

03 단원 지도상의 유의점

① 확률의 계산에서 복잡한 경우는 다루지 않는다.

② 이항분포의 계산은 이항분포표 또는 계산기를 이용하도록 한다.

③ 통계의 활용에서는 이론적 전개보다는 실생활의 소재를 도입하여 문제를 해결함으로써 개념을 이해할 수 있게 지도한다.

④ 모평균의 추정은 모집단이 정규분포인 경우만 다루도록 한다.

⑤ 모비율의 추정은 표본의 크기가 큰 경우에만 다루도록 한다.

04 단원의 이론적 배경

확률을 실제적으로 결정하는 것은 확률론의 문제뿐만 아니라 통계학의 문제이다. 여기서는 고전적 확률 개념에 관련하여 소개하고자 한다.

1. 미제스(Mises, L.; 1883~1953)의 이론

확률을 응용하는 데 있어서는 수학적 확률과 통계적 확

률이 일치할 때 비로소 그 의미가 있다. 미제스는 시행을 무한히 반복한다고 하는 이상적 실험을 생각하고, 이것에 집단이라는 개념을 도입해서 확률론을 조직했다.
이를테면, 동전을 던져서 앞면이 나오면 0, 뒷면이 나오면 1을 대응시키고, 같은 동전을 반복하여 계속 던지면, 0과 1로 이루어진 무한수열

$$e_1,\ e_2,\ \cdots,\ e_n,\ \cdots$$

을 얻는다.
여기서 처음의 n항 중 0인 항의 개수를 n_0, 1인 항의 개수를 n_1이라고 할 때

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n_0}{n}=\frac{1}{2},\ \lim_{n\to\infty}\frac{n_1}{n}=\frac{1}{2}$$

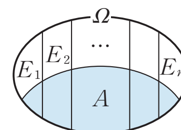
이며, 이 수열에서 적당한 부분수열을 택해도 같은 성질을 갖는다고 생각한다.
미제스는 이와 같은 무규칙성을 갖는 수열을 생각하고, 집단(단순집단과 일반집단)이라는 개념을 바탕으로 하여 확률론의 공리에 의한 구성에 성공했다.
미제스의 이론에서는 집단에 대하여 확률이 정의되고, 집단에서 새로운 집단을 유도하고, 본시의 집단에 있어서의 확률에서 새 집단에서의 확률을 구한다.
그 방법은 선출, 혼성, 분할, 결합이 있는데 선출에 의해서는 확률은 변하지 않음을, 혼성에 의해서는 확률의 덧셈정리를, 분할에 의해서는 베이스의 정리를, 결합에 의해서는 곱셈정리를 얻는다.
미제스의 이론에서는 집단의 조건을 만족시키는 것에 대하여 확률을 생각하므로, 반복할 수 없는 것은 확률의 대상이 될 수 없다.

2. 무이유의 이유(reason of no reason)

확률의 수학적 정의에서 '같은 정도로 기대된다.' 고 하는 것을 가정했는데, 이것은 직관적으로 생각하면 쉬우나 따지고 보면 문제가 달라진다. 이 수학적 정의를 최초로 한 사람은 라플라스(Laplace, P.S.; 1749~1827)이다.
당시 라플라스의 확률론을 반대하는 학자들이 이것을 따지고 들었다. 그래서 라플라스 쪽에서 이에 대한 대답을 못하게 되자, 거꾸로 같은 정도로 기대할 수 없는 이유를 말해 보라고 하였다. 그러자 반대하는 사람들도 그 이유를 말하지 못하고 우물쭈물하고 있을 때, 라플라스 쪽에서 '이유를 말하지 못하는 것이 바로 같은 정도로 기대할 수 있는 이유다.' 라고 했다.
이것을 '무이유의 이유' 라고 한다.

3. 원인의 확률-베이스(Bayes)의 정리

일반적으로 확률론에서는 연역형의 확률, 즉 원인을 알고 사건이 일어날 확률을 생각한다. 그러나 여기서는 이미 일어난 사건에 대하여 결과를 알고 원인의 확률을 구하는 문제, 즉 귀납형의 확률을 생각한다.
전사건 Ω를 서로 배반인 n개의 사건 $E_1,\ E_2,\ \cdots,\ E_n$으로 분할한다. 즉,



$E_i\cap E_j=\phi$
$(i\neq j,\ i,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$
$E_1\cup E_2\cup\cdots\cup E_n=\Omega$
이때, 사건 A에 대하여 $A\cap E_1,\ A\cap E_2,\ \cdots,$ $A\cap E_n$은 서로 배반이고, 그 합집합은 A가 된다.
여기서 확률의 덧셈정리와 곱셈정리를 이용하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A)&=\mathrm{P}(A\cap E_1)+\mathrm{P}(A\cap E_2)+\cdots+\mathrm{P}(A\cap E_n)\\&=\mathrm{P}(E_1)\mathrm{P}(A|E_1)+\mathrm{P}(E_2)\mathrm{P}(A|E_2)+\cdots\\&\quad+\mathrm{P}(E_n)\mathrm{P}(A|E_n)\end{aligned}$$

그런데

$$\mathrm{P}(E_i|A)=\frac{\mathrm{P}(A|E_i)}{\mathrm{P}(A)}\mathrm{P}(E_i)\ (i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

이므로 다음과 같은 관계를 얻을 수 있다.

$$\mathrm{P}(E_i|A)=\frac{\mathrm{P}(A|E_i)\mathrm{P}(E_i)}{\mathrm{P}(E_1)\mathrm{P}(A|E_1)+\cdots+\mathrm{P}(E_n)\mathrm{P}(A|E_n)}$$

이것을 베이스의 정리라고 한다.
위의 베이스의 정리에서 사건 $E_1,\ E_2,\ \cdots,\ E_n$들을 n가지의 '원인' 이라고 한다면 $\mathrm{P}(E_i)$는 원인의 가능성으로서 사전확률(prior probability)이라 할 수 있고, $\mathrm{P}(A|E_i)$는 원인 E_i의 결과로서 A가 관측될 확률이다. 또한 $\mathrm{P}(E_i|A)$는 A가 관측된 후에 원인 E_i의 가

능성으로서 사후확률(posterior probability)이라고 할 수 있다. 따라서 베이스의 정리가 뜻하는 것은 관측 결과(정보)를 바탕으로 하여 원인의 확률을 계산하는 것이다.

4. 확률의 공리적 구성

확률의 수학적 정의에서 '같은 정도로 기대된다.' 라는 가정은 따지고 보면 문제가 있다.

이런 문제를 피하기 위하여 콜모고로프(Kolmogorov, A,N; 1903∼1987)는 '확률론의 기초 개념' 의 제1장에서 다음과 같은 확률공간의 공리를 두고 있다.

(1) 임의의 사건 A에 대하여 $\quad P(A) \geq 0$
(2) 전체 표본공간 E에 대하여 $\quad P(E) = 1$
(3) $A_1, A_2, \cdots, A_n$이 서로 배반사건일 때
$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n)$$

그러나 사건 A의 확률 $P(A)$의 값을 어떻게 정할 것인가에 대해서는 언급하고 있지 않다.

5. 학문으로서의 통계학

통계학(statistics)의 어원은 라틴어의 status(상태)에서 유래한다. 이 status가 중세 이후 정치적인 의미로서 state(국가)를 가리키게 되었다.

따라서 '통계학(statistics)' 은 원래의 의미가 '국가의 상태를 조사, 연구하는 것' 임을 알 수 있다. 학문으로서의 통계학의 성립은 17∼18세기 계몽주의 시대에 다음과 같이 2개의 큰 줄기로서 이루어졌다.

(1) 국세학(國勢學, Staaten Kunde)

국세학은 주로 독일에서 발전하였는데 이의 어원은 콘링(Conring, H.; 1606∼1681)이 1660년 헤르스타트 대학에서 'Staatskunde' 라는 과목을 강의한 것에서 유래한다. 그는 이 강좌에서 '장차 정치가가 되려는 사람은 헌법 및 행정의 지식과 더불어 국가가 어떤 국토, 어떤 국민으로 구성되어 있는가를 올바르게 아는 것이 중요하다.' 고 강조하였다. 콘링의 후계자로는 아헨바알(Achenwall, G.; 1719∼1772), 앤처센(Anchersen, J.P.; 1700∼1765) 등이 있다.

(2) 정치산술학(政治算術學, Political Arithmetic)

정치산술학은 주로 영국에서 발전하였는데 이의 어원은 그랜트(Graunt, J.; 1620∼1674)가 1662년에 발표한 논문 '런던 시민의 생사에 대한 자연적 그리고 정치적 관찰(Natural and Political Observations on the London Bills of Mortalitly)' 에서 유래한다. 그는 이 논문에서 질병 또는 전쟁으로 인한 남녀의 성비(性比)가 어떻게 변화하는가를 발표하고, 인구의 발전에 법칙이 있음을 찾았다.

정치산술학파에 속하는 통계학자로는 1670년에 '정치산술에 대한 에세이(Essays on Political Arithmetic)' 를 발표한 페티(Petty, W.; 1623∼1687), 사망표를 산정한 천문학자 할리(Halley, E.; 1656∼1742), 대량 관찰을 바탕으로 인구법칙의 규칙성을 발견한 슈스밀히(Süssmilch, J.P.; 1707∼1767) 등이 있다.

6. 근대통계학과 현대통계학의 발달 과정

17∼18세기 프랑스에서 발달한 확률론과 영국에서 발달한 정치산술학의 결합으로 근대통계학은 태동하였다. 즉, 벨기에의 케틀레(Quételet, L.A.J.; 1796∼1874)는 정치산술학파가 사용하는 자료에 확률론적으로 논리를 정돈 종합하여 근대통계학의 형태를 완성시켰다.

케틀레 이후에 근대통계학의 발전에 공헌한 사람은 유전현상을 수학적으로 해설하는 데 성공한 갈톤(Galton, F.; 1822∼1911)이 있다.

피어슨(Pearson, K.; 1857∼1936)은 생물측정학, 우생학, 유전학을 통하여 통계적 연구 방법의 확립에 일생을 바쳤는데 1901년 세계 최초의 통계학 잡지인 Biometrika를 갈톤 등과 함께 창간하였다.

현대통계학은 피어슨의 제자인 고셋(Gosset, W.S.; 1876∼1936)에 의하여 시작되었다. 그는 피어슨이 '대량 관찰' 을 토대로 연구를 한 것과는 달리 '소표본'

인 경우에도 통계적 처리가 가능한 이론을 발표하였다. 즉, 1908년에 'Student' 라는 이름으로 Biometrika 에 발표한 논문 'The Probable Error of a Mean' 은 현대통계학의 기초가 되었다. 고셋의 결과를 계승한 피셔(Fisher, R.A.; 1890～1962)는 새로운 분포법칙을 유도하고 여러 가지 검정법을 고안하여 현대통계학을 완성하였다.

〈참고 자료〉

1. 박한식 · 이강섭(1985). 수리통계학, 교학연구사.
2. 이강섭 외 6인(2003). 고등학교 수학 I 교사용지도서, (주)지학사.
3. 정한영(1995). 통계학사 개론, 한림대학교 출판부.
4. 허명회(1991). 통계학사 콜로키움, 자유아카데미.
5. Eves, H.; 이우영 · 신항균 역(1999). 수학사, 경문사.

Ⅴ. 도형과 그래프

01 단원의 목차

1. 도형과 그래프

1. 연결 상태가 같은 도형
   - 01 연결 상태가 같은 평면도형
   - 02 연결 상태가 같은 입체도형
2. 그래프
   - 01 그래프의 뜻
   - 02 한붓그리기
   - 03 평면그래프와 정다면체
   - 04 연결된 평면그래프에서의 꼭짓점, 변, 면의 개수
   - 05입체도형에서의 꼭짓점, 모서리, 면의 개수
3. 그래프와 최적화
   - 01 그래프를 이용한 의사 결정 최적화

02 단원의 지도 목표

1. 도형과 그래프

① 연결 상태가 같은 평면도형에 대하여 알게 한다.

② 연결 상태가 같은 입체도형에 대하여 알게 한다.

③ 그래프의 뜻과 한붓그리기를 할 수 있는 그래프의 특징을 알게 한다.

④ 정다면체를 평면그래프로 나타낼 수 있게 한다.

⑤ 연결된 평면그래프에서 꼭짓점, 변, 면의 개수 사이의 관계를 알게 한다.

⑥ 입체도형에서 꼭짓점, 모서리, 면의 개수 사이의 관계를 알게 한다.

⑦ 그래프를 이용하여 의사 결정을 할 수 있게 한다.

⑧ 단일폐곡선이 없는 연결된 그래프를 이용하여 의사 결정을 할 수 있다.

⑨ 그래프의 꼭짓점의 색칠 문제를 이용하여 의사 결정을 할 수 있게 한다.

03 단원 지도상의 유의점

① 다양한 소재를 통해 평면도형을 탐구하도록 지도한다.

② 입체도형의 성질은 관찰과 직관에 의해 이해하도록 지도한다.

③ 한 꼭짓점에서 자기 자신으로 가는 변이 없고, 한 쌍의 꼭짓점 사이에 많아야 한 변이 있는 그래프를 주로 다룬다.

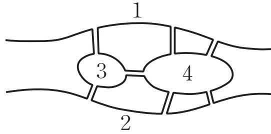
04 단원의 이론적 배경

1. 그래프

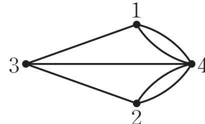
문제해결에 그래프 이론(graph theory)을 최초로 도입한 사람은 스위스의 수학자 Leonard Euler (1707～1783)이다.

러시아 Konigsberg의 Pergel 강에는 [그림 1]과 같이 두 개의 섬과 일곱 개의 다리로 구성된 공원이 있었다. 이 공원을 산책하는 시민들은 집에서 출발하여 일곱 개의 다리를 오직 한 번만 지나는 산책 경로가 존재하는지 궁금하게 생각했었다.

Euler는 [그림 2]의 단순화된 그래프 이론을 이용하여 이 문제를 쉽게 해결하였다.



[그림 1]



[그림 2]

〈Konigsberg의 한 다리 위에서 한 섬을 찍은 사진〉

[그림 2]의 점 1과 2는 강의 양쪽 기슭을 의미하며, 점 3과 4는 2개의 섬을 나타낸다. 이 점들을 연결하는 7개의 선들은 7개의 다리를 나타낸다.

위의 [그림 2]와 같이 점과 그것을 잇는 선들의 집합을 그래프(graph)라고 부르며, 각 점들을 꼭짓점(vertex) V로, 다리와 도로를 변(edge) E로 표현되는 그래프 $G=(V, E)$라고 한다. Euler는 주어진 그래프에서 꼭짓점의 차수(degree)가 모두 짝수일 때 '각 다리를 정확하게 한 번만 지나 출발했던 위치로 되돌아오는 것'이 가능함을 수학적으로 증명하였다. 이러한 그래프 이론은 1736년 Euler의 논문에서 처음 발표되었다.

그래프 이론은 오늘날 가장 많이 응용되는 수학의 한 부분으로, 전산학, 물리학, 화학, 공학, 의학, 생물학, 심리학, 경제학, 도시계획, 인공지능학, 언어학 등의 여러 분야에서 중요하게 응용된다.

V를 공집합이 아닌 꼭짓점(vertex)들의 집합이라고 하고 변(Edge)들의 집합을 $E \subseteq V \times V$라고 하자. 이때, $G=<V, E>$를 방향그래프(digraph 또는 directed graph)라고 하며, 방향이 없는 그래프(undirected graph: 무향 그래프)는 단순히 $G=(V, E)$로 표시한다. 그래프 G에서 다른 꼭짓점들과 연결되지 않은 꼭짓점 v를 고립된 꼭짓점이라고 하고, 고립된 꼭짓점으로만 이루어진 그래프를 공 그래프(null graph)라고 한다.

그래프 $G=(V, E)$에서 V와 E는 유한한 원소들의 집합으로 가정한다.

임의의 변 $x \in E$가 V의 순서쌍 $<u, v>$ 혹은 무순서쌍 (u, v)와 연관이 있을 때, 두 꼭짓점 u와 v는 인접(connect)되어 있다고 말한다. 그래프의 변의 집합은 중복된 원소를 가질 수 있다는 점에서 일반적인 집합의 개념과 다르므로 영어에서는 set와 multiset으로 구분한다. 이때 중복된 원소들을 다변 또는 평행변이라고 부른다. 특히, 두 끝 점이 같은 변을 고리라고 부르며, 평행변(다변)이나 고리가 없는 그래프를 단순 그래프(simple graph)라고 한다. 평행변이 존재하는 그래프는 다중 그래프(multigraph)라고 한다.

(1) 단순 그래프(simple graph)

꼭짓점의 집합 V와 변의 집합인 E로 이루어지는 단순 그래프 $G=(V, E)$는 두 개의 꼭짓점 v_1과 v_2 사이에 최대 한 개의 변만을 허용하고 각 변은 서로 다른 두 꼭짓점에 접하여야 하는 무향 그래프이다.

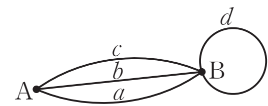
예 $G=(V, E)$가 단순 그래프이고, $e_1=(v_1, v_2)$, $e_2=(v_1, v_2)$일 때, $e_1 \in E$라면 $e_2 \notin E$이다.

(2) 다중 그래프(multigraph)

다중 그래프는 단순 그래프와 비슷하지만, 두 개의 꼭짓점 사이에 여러 개의 변이 있을 수 있다.

예 $e_1=(v_1, v_2)$, $e_2=(v_1, v_2)$일 때, $e_1 \in E$, $e_2 \in E$

오른쪽 그림에서 변 a, b, c는 평행변이고 d는 고리이다.



[그림 3]

그래프의 한 꼭짓점에 모이는 변의 개수를 그 꼭짓점의 차수라고 한다. 위의 그림에서 꼭짓점 A의 차수는 3, 꼭짓점 B의 차수는 5이다. 그런데 각 변은 두 개의 끝 점을 가지고 있으므로 각 꼭짓점의 차수의 합은 변의 개수의 두 배이다. 이것을 Handshaking Lemma라고 하며 이 보조 정리에 의하면 모든 그래프에서 차수가 홀수인 꼭짓점은 반

드시 짝수 개 존재한다는 사실을 알 수 있다.

위 [그림 3]의 그래프 G에 대하여 꼭짓점의 집합을 $V(G)$, 변의 집합을 $E(G)$, 그것의 결합 함수를 ψ_G라고 하면 $V(G)=\{A, B\}, E(G)=\{a, b, c, d\}$이고 $\psi_G(a)=\psi_G(b)=\psi_G(c)=AB, \psi_G(d)=BB$와 같이 표현 한다.

(3) Handshaking Lemma

어떤 그래프에서도 모든 꼭짓점의 차수의 합은 변의 개수의 두 배이다.

Handshaking Lemma로부터 곧바로 다음과 같은 결과를 얻을 수 있다.

① 그래프에서 모든 차수의 합은 항상 짝수이다.

② 그래프에서 홀수 차수를 갖는 꼭짓점은 짝수개 존재한다.

③ n개의 꼭짓점의 차수가 모두 r인 그래프(정규그래프)는 정확하게 $\frac{1}{2}nr$개의 변을 갖는다.

(4) 부분그래프

두 그래프 G, H에 대하여,

① $V(G)$에서 $V(H)$로의 일대일 대응 f가 존재

② $E(G)$에서 $E(H)$로의 일대일 대응 g가 존재

③ $\psi_G(e)=AB$일 때, $\psi_H(f(e))=g(A)g(B)$

가 성립할 때, 두 그래프는 동형(연결 상태가 같다)이라고 말한다.

특히, 두 개의 그래프 $G=(V, E)$와 $H=(W, F)$에 대하여

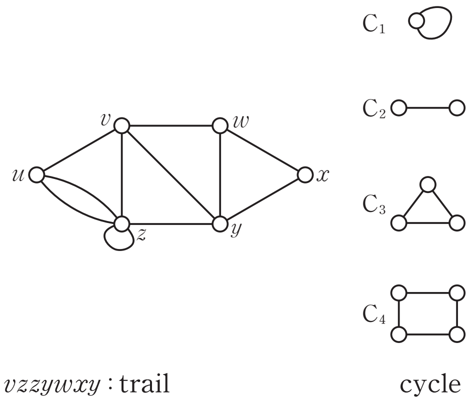
$$W \subset V, \quad F \subset E, \quad \psi_{G|E(H)}=\psi_H$$

를 만족할 때 H를 G의 부분그래프(Subgraph)라고 한다.

(5) 경로(walk), trail, 회로(closed walk), path, 사이클(cycle)

그래프의 꼭짓점과 변을 교대로 나열한 것을 $W=v_0e_1v_1e_2v_2\cdots e_kv_k$라 할 때, $1 \le i \le k$인 모든 i에 대하여 변 e_i의 두 꼭짓점이 v_{i-1}, v_i이면 W를 경로(walk)라고 한다.

특히, 변이 반복되지 않는 경로를 'trail'이라 하고, 꼭짓점이 반복되지 않는 경로를 'path'라고 한다. 시작점과 종착점이 같은 경로를 회로(closed walk)라 하고 시작점과 종착점이 같은 'trail'을 'closed trail'이라고 한다. 시작점과 종착점 외에는 어떤 꼭짓점도 반복되지 않는 closed trail을 사이클(cycle)이라고 한다.



예) $vzzywxy$: trail　　　　cycle

$vwxyz$: path

경로가 가지는 변의 개수를 그 경로의 길이라고 하며, 꼭짓점 x를 시작점, 꼭짓점 y를 종착점으로 갖는 경로가 존재하면 x와 y는 연결되어 있다고 말한다.

(6) 그래프의 종류

① 평면 그래프(planar graph)

평면상에 꼭짓점과 변을 그리되 변과 변이 꼭짓점이 아닌 곳에서는 교차하지 않도록 그릴 수 있는 그래프를 평면 그래프라고 한다.

평면 그래프는 평면을 몇 개의 연속된 영역으로 분할하는데 이 영역과 그것의 경계를 합쳐 면이라고 한다.

어떤 평면 그래프의 꼭짓점의 개수를 p, 변의 개수를 q, 면의 개수를 r라고 나타내면 $p-q+r=2$가 성립함을 증명할 수 있다. 또 어떤 그래프가 연결된 평면 그래프이기 위해서는 $q \le 3p-6$을 만족하여야 한다.

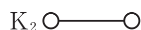
② 정규 그래프(regular graph)

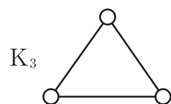
모든 꼭짓점(vertex)이 동일한 수의 이웃(즉, 동일한 차수)을 가지는 그래프이다.

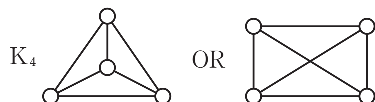
③ 완전 그래프(complete graph)

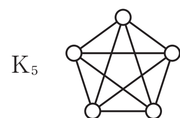
완전 그래프는 그래프에 속하는 모든 꼭짓점이 다른 꼭짓점과 인접해 있는 그래프이다. n개의 꼭짓점을 가진 완전 그래프의 각 점의 차수는 $n-1$이고 $\frac{n(n-1)}{2}$개의 변을 가지고 있다. n개의 꼭짓점을 갖는 완전그래프를 K_n으로 나타낸다.

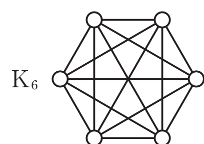
예 K_1 ○







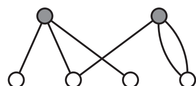


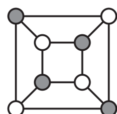


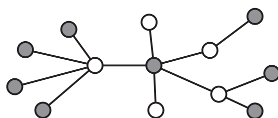
④ 이분 그래프(bipartite graph)

그래프 $G=(V, E)$에서 꼭짓점의 집합 V를 두 개의 집합 V_1과 V_2로 나누되 모든 변은 V_1의 꼭짓점과 V_2의 꼭짓점에 동시에 접하도록 할 수 있는 경우의 G를 이분 그래프라고 한다.

예







어떤 그래프의 꼭짓점의 개수를 p, 변의 개수를 q라고 하면 어떤 이분 그래프가 평면 그래프이기 위해서는 $q \leq 2p-4$를 만족하여야 한다.

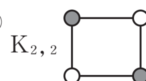
> 정리 1_ 어떤 그래프가 이분 그래프이기 위한 필요충분조건은 그것이 홀수 길이를 갖는 사이클을 갖지 않는 것이다.

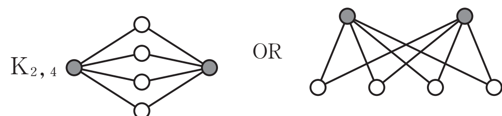
⑤ 완전 이분 그래프(complete bipartite graph)

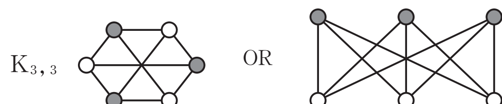
꼭짓점의 집합이 V_1과 V_2의 합집합이고, 모든 V_1의 꼭짓점이 V_2의 꼭짓점 각각과 변으로 연결되어 있는 경우(인접한 경우) 완전 이분 그래프라 한다. 이때, V_1에 있는 꼭짓점의 개수가 m이고 V_2에 있는 꼭짓점의 개수가 n일 때, $K_{m,n}$으로 나타낸다. $K_{m,n}$은 $m+n$개의 꼭짓점을 갖고 mn개의 변을 갖는다.

또 $K_{m,n}=K_{n,m}$이다.

예







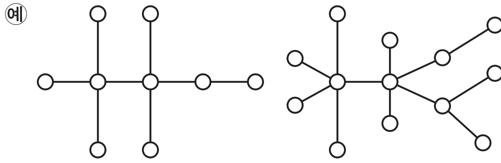
> 정리(Kuratowski) _ 어떤 그래프가 평면그래프이기 위한 필요충분조건은 그것이 K_5와 $K_{3,3}$의 세분을 부분 그래프로 갖지 않는 것이다.

위의 정리에서 그래프 G의 세분(subdivision)이란 G의 변에 유한 개의 꼭짓점을 첨가하여 얻어지는 그래프를 의미한다.

2. 수형도

수형도란 회로가 없는 연결된 그래프를 뜻한다. 회로가 없기 때문에 두 점을 잇는 경로가 하나밖에 없다. 수형도의 꼭짓점의 개수를 p, 변의 개수를 q라고 하면 $q=p-1$을 만족한다.

예



수형도의 성질

① 꼭짓점이 n개이면 변은 $n-1$개이다.

② 꼭짓점이 두 개 이상인 수형도는 항상 차수가 1인 꼭짓점이 두 개 이상 있다.

③ 이분 그래프이다.

④ 평면 그래프이다.

⑤ 어떤 두 꼭짓점을 택하여도 그 둘 사이를 잇는 경로는 단 하나밖에 없다.

⑥ 변을 하나라도 지우면 그래프가 더는 연결되어 있지 않다.

⑦ 꼭짓점의 집합이 $\{1, 2, 3, \cdots, n\}$인 트리는 n^{n-2}개가 존재한다. (케일리의 정리)

3. 오일러 회로와 해밀턴 회로

(1) 오일러 회로

연결된 그래프에서 한 꼭짓점에서 출발하여 모든 변을 한 번씩만 지나고 시작점으로 되돌아 올 수 있는 회로를 오일러 회로(Eulerian circuit)라고 한다. 오일러 회로가 존재할 필요충분조건은 '그래프가 연결되어 있고 모든 꼭짓점의 차수가 짝수' 이다.

(2) 해밀턴 회로

연결된 그래프에서 한 꼭짓점에서 출발하여 모든 꼭짓점을 오직 한 번씩만 지나고 출발점으로 되돌아 올 수 있는 회로를 해밀턴 회로라고 한다. 해밀턴 회로가 존재할 필요충분조건은 아직 발견되지 않았다. 해밀턴 회로와 관련된 유명한 정리 중 하나는 다음과 같다. '꼭짓점의 개수가 p인 연결된 그래프 G에서 인접하지 않은 임의의 두 꼭짓점의 차수의 합이 p보다 크거나 같으면 이 그래프는 해밀턴 회로이다.'

(3) 한붓그리기

그래프에서 모든 변을 한 번씩만 빠짐없이 지나가는 경로를 그리는 것을 한붓그리기라고 한다.

① 각 꼭짓점에 연결되어 있는 변이 짝수 개인 그래프 즉, 오일러 회로인 경우에는 어느 꼭짓점에서 출발하더라도 그 출발점에서 끝나는 한붓그리기가 가능하다.

② 두 개의 꼭짓점을 제외한 모든 꼭짓점의 차수가 짝수인 경우 즉, 꼭짓점에 연결되어 있는 변이 홀수 개인 점이 2개인 그래프는 한 홀수점에서 출발하여 다른 홀수점에서 끝나는 한붓그리기가 가능하다.

4. 그래프와 행렬

그래프를 행렬로 표현하는 대표적인 방법으로 '인접행렬' 과 '달림(연결)행렬' 이 있다.

(1) 인접행렬

이 행렬은 꼭짓점과 꼭짓점의 연결 관계를 나타내는 행렬이다. (p, q) 그래프 G의 꼭짓점의 집합이

$V(G)=\{v_1, \cdots, v_p\}$

인 경우 $p\times p$ 인접행렬 (Adjacent matrix)

$A(G)=(a_{ij})$를 다음과 같이 정의한다.

$$a_{ij}=\begin{cases} 1, & v_iv_j\in V(G) \\ 0, & v_iv_j\notin V(G) \end{cases}$$

즉, 두 꼭짓점 v_i와 v_j가 인접해(연결되어) 있으면 i행 j열의 값이 1이고 그렇지 않으면 0이다.

이 방법을 이용하면 그래프를 행렬로 나타낼 수 있어서 그래프의 여러 가지 성질을 행렬을 이용하여 나타내고 확인할 수 있다. 실제로 조합행렬 이론에서는 행렬을 이용하여 그래프의 많은 성질을 연구하고 있다.

(2) 달림(연결)행렬

이 행렬은 꼭짓점과 모서리의 연결 관계를 나타내는 행렬로써 (p, q) 그래프 G의 꼭짓점과 모서리의 집합이

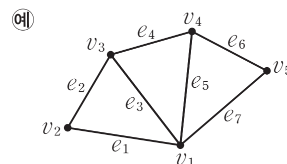
$V(G)=\{v_1, \cdots, v_p\}$, $E(G)=\{e_1, \cdots, e_q\}$

인 경우 $p\times q$ 달림행렬(incident matrix)

$B(G)=(a_{ij})$를 다음과 같이 정의한다.

꼭짓점 v_i가 모서리 e_j와 연결되었으면 $a_{ij}=1$이고 그렇지 않으면 0이다.

예



$$\begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{array} \begin{array}{c} e_1\,e_2\,e_3\,e_4\,e_5\,e_6\,e_7 \\ \begin{bmatrix} 1&0&1&0&1&0&1 \\ 1&1&0&0&0&0&0 \\ 0&1&1&1&0&0&0 \\ 0&0&0&1&1&1&0 \\ 0&0&0&0&0&1&1 \end{bmatrix} \end{array}$$

5. 최적화

19세기 말에 테일러(Taylor. F. W.)는 과학적 관리법을 주창하여 관리 문제에 과학의 사용을 촉진하였다. 그는 어떤 일을 수행하는 데에는 여러 가지 방법이 있지만 이 중에서 최선의 방법이 존재하며 이를 찾아서 그에 따라 업무를 수행하여야 한다고 주장했다.

또한 제2차 세계대전의 발발로 의사 결정에 있어서 더욱 과학적이고 체계적인 분석이 필요하게 되었다.

우리는 살아가면서 겪게 되는 수많은 의사 결정 과정 중에서 미래에 끼칠 영향을 고려하며 가장 합리적이면서 최적의 의사 결정을 하려고 한다.

이를테면 어떤 과목부터 공부를 해야 시간을 효율적으로 이용할 수 있는지, 어떤 업무부터 처리해야 일에 차질이 생기지 않는지, 중간에 일어날 변수는 없는지 등을 고려하면 의사 결정을 한다.

전산 관련 분야에서도 정보를 정확하면서 보다 빨리 찾아낼 수 있도록 프로그램을 만든다. 예를 들면 인터넷으로 물건을 주문했던 고객들의 정보가 담겨 있는 파일에서 특정한 고객의 전화번호를 찾거나 특정한 물건에 대한 주문 기로고을 찾아내기 쉽도록 최적의 프로그램을 만든다.

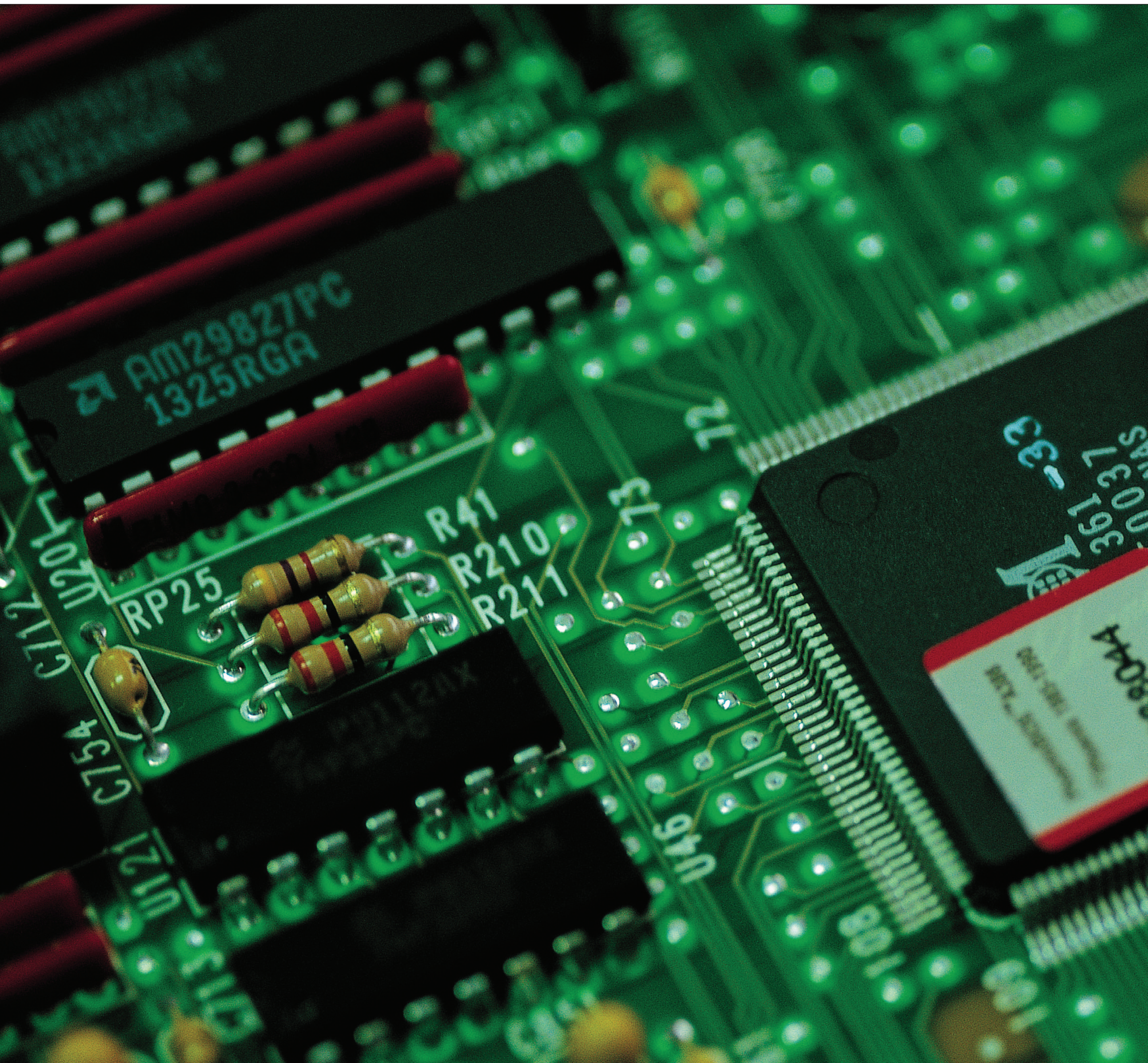
최근 수학은 우주 로켓이나 미세 로봇의 개발 등 물질적인 첨단 과학의 발전에 크게 기여할 뿐만 아니라 우리 인간의 행동 양식이나 가치, 상호작용, 갈등과 같은 연구에도 깊은 관련이 있다. 계획 세우거나 영업사원 방문 문제 등 다양한 의사 결정 과정에서 합리적이고 최적의 문제 해결을 위하여 그래프를 이용한 방법이 연구되어 활용되고 있다. 이때, 생성수형도, Greedy 알고리즘, Kruskal 알고리즘 등을 이용하면 최적의 의사 결정을 하는데 도움이 된다.

〈참고자료〉

http://ko.wikipedia.org/
http://www.personal.kent.edu/~rmuhamma/GraphTheory/MyGraphTheory/defEx.htm
7차 이산수학 교사용 지도서

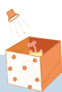
I 명제와 논리

1 합성명제와 논리 회로



컴퓨터의 중앙 처리 장치와 기억 장치는 게이트라는 기본적인 논리 회로로 구성되어 있다. 이것을 이용하여 컴퓨터는 사칙 연산과 논리 연산을 하고, 자료를 저장한다. 컴퓨터의 기본인 논리 회로는 수학의 합성명제인 논리합, 논리곱, 논리 부정을 바탕으로 한 것이다.

단원의 흐름



이미 배운 내용

▶**중학교 2학년**
- 명제의 뜻과 증명

▶**고등학교 1학년**
- 명제와 조건
- 명제의 역, 이, 대우
- 필요조건과 충분조건

이번에 배울 내용

- 합성명제
- 진릿값과 진리표
- 조건문과 쌍조건문
- 논리 연산과 논리 회로

이 단원의 학습 목표

1. 명제와 논리 연산을 사용하여 합성명제를 만들 수 있다.
2. 합성명제의 진릿값을 구할 수 있다.
3. 조건문과 쌍조건문의 진릿값을 구할 수 있고, 이를 논리 연산으로 나타낼 수 있다.
4. 논리 회로의 뜻을 알고, 논리 연산과 기호를 논리 회로에 활용할 수 있다.

10

단원을 시작하기 전에 …

명제의 참과 거짓

1 다음 중 명제인 것을 모두 찾고, 그것의 참, 거짓을 판별하여라.

(1) $x\le 3$

(2) $x+3=2$이면 $x=-2$이다.

(3) 내일까지 과제를 제출하시오.

(4) 모든 정삼각형은 이등변삼각형이다.

명제의 부정

2 다음 명제의 부정을 말하고, 부정인 명제의 참, 거짓을 말하여라.

(1) 사자는 식물이 아니다.

(2) 모든 평행사변형은 직사각형이다.

명제의 역, 이, 대우

3 다음 명제의 역, 이, 대우를 각각 말하여라.

(1) $x^2=1$이면 $x=1$이다.

(2) n이 짝수이면 n^2도 짝수이다.

필요조건과 충분조건

4 다음에서 조건 p는 조건 q이기 위한 어떤 조건인지 말하여라.

(1) p: 찬호는 서울에 산다.
　q: 찬호는 대한민국에 산다.

(2) p: 사각형 ABCD는 마름모이다.
　q: 사각형 ABCD는 정사각형이다.

(3) p: 삼각형 ABC는 이등변삼각형이다.
　q: 삼각형 ABC는 두 각의 크기가 같다.

단원을 시작하기 전에 ……………………● 풀이

1 참, 거짓을 분명하게 판단할 수 있는 문장이나 식을 명제라고 한다.

(1) $x\le 3$은 조건이므로 **명제가 아니다.**

(2) $x+3=2$이면 $x=-1$이므로 '$x+3=2$이면 $x=-2$이다.'는 **거짓인 명제이다.**

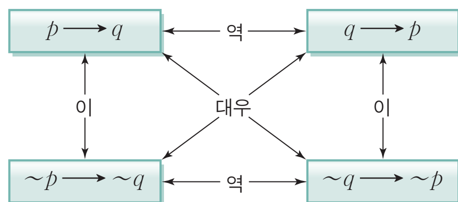
(3) 명령문은 **명제가 아니다.**

(4) 정삼각형이면 이등변삼각형이므로 **참인 명제이다.**

2 (1) 부정: **사자는 식물이다.**
　사자는 동물이므로 **거짓이다.**

(2) 부정: **어떤 평행사변형은 직사각형이 아니다.**
　평행사변형 중에는 직사각형이 아닌 것이 있으므로 **참이다.**

3 명제 $p \longrightarrow q$와 그 역, 이, 대우 사이의 관계를 그림으로 나타내면 다음과 같다.



(1) 역: $\boldsymbol{x=1}$**이면** $\boldsymbol{x^2=1}$**이다.**
　이: $\boldsymbol{x^2\ne 1}$**이면** $\boldsymbol{x\ne 1}$**이다.**
　대우: $\boldsymbol{x\ne 1}$**이면** $\boldsymbol{x^2\ne 1}$**이다.**

(2) 역: $\boldsymbol{n^2}$**이 짝수이면** $\boldsymbol{n}$**도 짝수이다.**
　이: $\boldsymbol{n}$**이 짝수가 아니면** $\boldsymbol{n^2}$**도 짝수가 아니다.**
　대우: $\boldsymbol{n^2}$**이 짝수가 아니면** $\boldsymbol{n}$**도 짝수가 아니다.**

4 $p \Longrightarrow q$일 때 p는 q이기 위한 충분조건, q는 p이기 위한 필요조건이라고 한다.
특히, $p \Longrightarrow q$이고 $q \Longrightarrow p$일 때, 즉 $p \Longleftrightarrow q$일 때 p는 q이기 위한 필요충분조건이라고 한다.

(1) $p \Longrightarrow q$이므로　**충분조건**

(2) $q \Longrightarrow p$이므로　**필요조건**

(3) $p \Longleftrightarrow q$이므로　**필요충분조건**

1 합성명제와 논리 회로

이 단원을 배우면

- 명제와 논리 연산을 사용하여 합성명제를 만들 수 있다.
- 실생활의 사례를 통해 합성명제의 참과 거짓을 판별할 수 있다.
- 합성명제의 진릿값을 진리표를 통해 구할 수 있다.
- 조건문과 쌍조건문의 참과 거짓을 판별할 수 있고, 이를 논리 연산으로 나타낼 수 있다.
- 논리 회로의 뜻을 알고, 논리 연산과 기호를 논리 회로에 활용할 수 있다.

1 합성명제
2 쌍조건문
3 논리 회로

소단원의 학습 목표

1. 진릿값의 뜻을 알고, 명제의 진릿값을 구할 수 있다.
2. 논리곱, 논리합, 부정의 뜻과 그것의 진릿값을 알고, 진리표를 만들 수 있다.

여기서 배우는 용어 및 기호

진릿값, 논리곱, $p \wedge q$, 진리표, 논리합, $p \vee q$

12

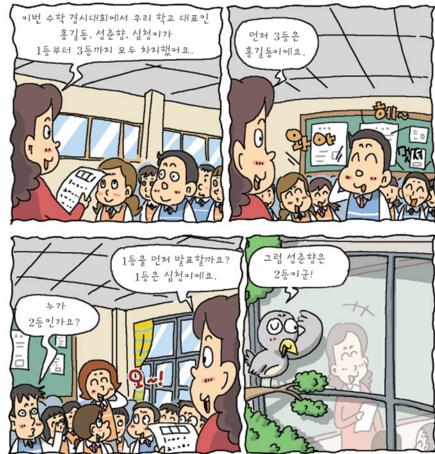
1 합성명제와 논리 회로

1 합성명제

학습 목표

- 진릿값의 뜻을 안다.
- 논리곱, 논리합, 부정의 뜻과 그것의 진릿값을 알고, 진리표를 만들 수 있다.

다 가 서 기 / 수학 경시대회의 순위



위에서 성춘향의 등수는 발표되지 않았지만 홍길동과 심청이의 등수가 발표되었으므로 성춘향의 등수를 알 수 있다.

또 시험 응시자 중에서 합격자를 발표하면 불합격자는 발표하지 않아도 자연히 알 수 있다.

이와 같이 정보의 일부를 가지고 전체를 알 수 있는 경우가 있다.

참고 | 탐정의 추리와 수학적 증명

명탐정 코난은 검은 조직에 의해 어린아이가 되어버린 고등학생 명탐정의 이야기를 그린 만화이다.

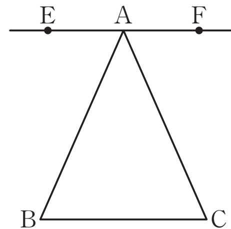
주인공인 코난은 자신을 어린아이로 만들어 버린 검은 조직의 실체를 파헤치며, 추리라곤 전혀 못하는 유명한 탐정 대신 어려운 사건을 척척 해결해 나간다. 코난은 범죄가 일어난 상황을 면밀히 따져 보고 부지런히 증거를 모아 논리적으로 밝혀내어 범인을 꼼짝 못하게 한다.

이 만화의 재미는 이런 코난의 명쾌한 논리적 추리력으로부터 나오는 것이 아닐까?

중학교 수학에서 배웠던 도형의 성질 또는 그 외 수학적 사실을 밝히는 데 사용되었던 증명법도 이런 명탐정 코난의 수사처럼 논리적으로 어떤 사실을 밝혀낸다는 점이 비슷하다.

예를 들어 삼각형의 내각의 크기의 합이 180°임을 보이기 위해 삼각형을 가위로 오려서 재배치하는 방법을 사용하는 대신 180°가 될 수 밖에 없는 이유를 다음과 같이 논리적으로 밝혀 누구나 인정하게 할 수 있다.

$\triangle ABC$에서 변 BC와 평행한 직선 EF를 긋는다.



$\angle EAB = \angle ABC$(엇각)

$\angle CAF = \angle ACB$(엇각)

$\therefore \angle ABC + \angle BAC + \angle ACB$

$= \angle EAB + \angle BAC + \angle CAF = 180^\circ$

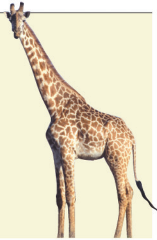
13

01 진릿값

탐구하기 / 명제의 참과 거짓

다음 명제의 참, 거짓을 판별하여 보자.

1. 박쥐는 어류이다.
2. 모든 사람은 죽는다.
3. 기린은 초식 동물이다.
4. 고구려의 첫 임금은 동명 성왕이다.



알아보기 / 진릿값에 대하여 알아보자.

명제 '6은 18의 약수이다.'는 참인 명제이다.
한편 명제 '새는 포유류이다.'는 거짓인 명제이다.
이와 같이 모든 명제는 참과 거짓을 판별할 수 있다. 이때, 명제의 참 또는 거짓을 그 명제의 **진릿값**이라 하고, 진릿값이 참일 때에는 기호로 T, 거짓일 때에는 기호로 F와 같이 나타낸다.

T는 영어의 True, F는 영어의 False에서 첫 글자를 따온 것이다.

| 보기 | (1) 명제 '서울은 대한민국의 수도이다.'의 진릿값은 참(T)이다.
(2) 명제 '지구는 태양과 가장 가까운 행성이다.'의 진릿값은 거짓(F)이다.

스스로 하기 / 익힘책 13쪽 | 익힘책 14쪽 | 익힘책 15쪽

1 다음 명제의 진릿값을 구하여라.
(1) 2는 짝수이다.
(2) 호랑이는 초식 동물이다.
(3) 모든 삼각형은 서로 합동이다.
(4) 백두산 정상에 있는 호수의 이름은 천지이다.

알아보기 / 해설

문장에는 일반적인 언어로 나타낸 것과 수학적인 언어로 나타낸 것이 있다. 이러한 문장의 내용은 참인 것, 거짓인 것, 참이라고도 거짓이라고도 말할 수 없는 것 중 어느 하나가 된다.

이때, 그 내용이 참인지 거짓인지를 판별할 수 있는 문장을 명제라고 하며 참 또는 거짓을 명제의 진릿값이라고 한다. 즉, 명제의 진릿값에는 참과 거짓 둘뿐이며, 참이라고도 거짓이라고도 말할 수 없는 문장은 명제가 아니다.

탐구하기 / 풀이

1. 박쥐는 포유류이다.
따라서 주어진 명제는 거짓이다.

2. 모든 사람은 죽는다.
따라서 주어진 명제는 참이다.

3. 기린은 초식 동물이다.
따라서 주어진 명제는 참이다.

4. 고구려의 첫 임금은 주몽, 즉 동명 성왕이다.
따라서 주어진 명제는 참이다.

스스로 하기 / 풀이

1 (1) 2는 짝수이므로 주어진 명제의 진릿값은 참(**T**)이다.
(2) 호랑이는 육식 동물이므로 주어진 명제의 진릿값은 거짓(**F**)이다.
(3) 서로 합동이 아닌 삼각형이 존재하므로 주어진 명제의 진릿값은 거짓(**F**)이다.
(4) 백두산 정상에 있는 호수의 이름은 천지이므로 주어진 명제의 진릿값은 참(**T**)이다.

14

02 논리곱

알 아 보 기 / 논리곱의 뜻, 진릿값과 진리표에 대하여 알아보자.

명제 '사슴은 동물이고, 은행나무는 식물이다.' 는 두 명제 '사슴은 동물이다.' 와 '은행나무는 식물이다.' 가 연결되어 있다. 이와 같이 두 개 이상의 명제가 연결된 명제를 합성명제라고 한다.

'의회는 입법부이고, 법원은 사법부이다.' 와 같이 두 개 이상의 명제를 '그리고' 로 연결한 합성명제를 그 명제들의 **논리곱**이라고 한다. 또 두 명제 p와 q의 논리곱 'p 그리고 q' 를 기호로

$$p \wedge q$$

와 같이 나타낸다.

'그리고' 와 '~이고' 는 같은 뜻이다.

| **보기** | (1) p: 대전은 광역시이다. q: 제주는 특별자치도이다.
에서 두 명제 p와 q의 논리곱 $p \wedge q$는
$p \wedge q$: 대전은 광역시이고, 제주는 특별자치도이다.
이때, 두 명제 p와 q는 각각 참이고, 논리곱 $p \wedge q$도 참이다.

(2) p: 비둘기는 조류이다. q: 돌고래는 어류이다.
에서 두 명제 p와 q의 논리곱 $p \wedge q$는
$p \wedge q$: 비둘기는 조류이고, 돌고래는 어류이다.
이때, 명제 p는 참이고, 명제 q는 거짓이며, 논리곱 $p \wedge q$는 거짓이다.

(3) p: 한라산은 울릉도에 있다. q: 지리산은 제주도에 있다.
에서 두 명제 p와 q의 논리곱 $p \wedge q$는
$p \wedge q$: 한라산은 울릉도에 있고, 지리산은 제주도에 있다.
이때, 두 명제 p와 q는 각각 거짓이고, 논리곱 $p \wedge q$도 거짓이다.

일반적으로 논리곱의 진릿값은 다음과 같이 정한다.

논리곱의 진릿값

두 명제 p와 q에 대하여 논리곱 $p \wedge q$의 진릿값은 p와 q의 진릿값이 모두 참일 때만 참이고, 그 밖의 경우에는 모두 거짓이다.

알아보기 / 해설

• 몇 개의 명제로부터 새로운 명제를 만들 수 있다.
예를 들어 두 명제 '6은 2의 배수이다.' 와 '6은 3의 배수이다.' 로부터 '6은 2의 배수이다. 그리고 6은 3의 배수이다.' 를 만들 수 있다.
이와 같이 주어진 명제들로부터 새로운 명제를 만드는 것을 처음 명제들을 합성한다고 말한다. 이때, 새로 만들어진 명제를 처음 명제들의 합성명제(compound statement)라고 한다.
한편 '6은 2의 배수이다.' 와 같이 더 이상 간단한 명제로 분해할 수 없는 명제를 단순명제(simple statement)라고 한다.
다음 명제는 모두 합성명제이다.
'$3 \times 4 = 12$이면 $12 \div 4 = 3$이다.'
'나비는 곤충이고, 제비는 새이다.'

• 두 가지 이상의 단순명제를 연결시켜 합성명제를 만드는 말을 연결사라고 한다.
p, q를 두 명제라고 할 때, 이를 합성명제로 만드는 연결사에는 다음과 같은 5가지가 있다.
(1) p 그리고 q
(2) p가 아니다.
(3) p 또는 q
(4) p이면 q
(5) p이면 q 그리고 q이면 p

• 논리곱을 영어로 conjunction이라고 한다.

참고 | 기호 논리학

명제나 논리 개념을 언어가 아닌 기호로 나타내어 추론을 수학의 형식적 방법에 의해서 전개하는 논리학을 기호 논리학이라고 한다.
아리스토텔레스(Aristoteles ; B.C. 384~B.C. 322)의 고전적 형식논리학은 삼단논법이 중심이 되어 그 적용 범위가 한정되어 있지만, 기호 논리학에서는 접속사를 기호로 나타냄으로써 단순명제들을 결합하여 합성명제로 만들고 그 명제들을 계산할 수 있다. 따라서 삼단논법에서는 불가능했던 넓은 범위의 문제까지 다루고 계산할 수 있게 되었다.
이러한 시도는 17세기에 기호 논리학의 창시자라고 할 수 있는 라이프니츠(Leibniz, G. W. ; 1646~1716)가 시작하였고, 19세기 수학자 불(Boole, G. ; 1815~1864)에 의해 논리 대수(불 대수)가 나와 수학적 연산들이 논리학에 체계적으로 적용되었다.

한 명제의 진릿값은 참 또는 거짓 중 어느 하나이다. 그런데 두 명제 p와 q에 대하여 논리곱 $p \wedge q$의 진릿값은 p와 q의 진릿값이 각각 참인지 거짓인지에 따라 결정된다.

즉, 두 명제 p와 q의 논리곱 $p \wedge q$의 진릿값을 표로 나타내면 오른쪽과 같다.

이와 같이 어떤 명제의 진릿값을 표로 나타낸 것을 **진리표**라고 한다.

논리곱의 진리표

p	q	$p \wedge q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

| 보기 | (1) 명제 'p: 2는 10의 배수이다.' 의 진릿값은 거짓(F)이고, 명제 'q: 5는 20의 약수이다.' 의 진릿값은 참(T)이다. 따라서 논리곱 $p \wedge q$의 진릿값은 오른쪽 표에서 거짓(F)이다.

p	q	$p \wedge q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

즉, '2는 10의 배수이고, 5는 20의 약수이다.' 의 진릿값은 거짓(F)이다.

(2) 명제 'p: 은행은 금융 기관이다.' 의 진릿값은 참(T)이고, 명제 'q: 학교는 교육 기관이다.' 의 진릿값도 참(T)이다. 따라서 논리곱 $p \wedge q$의 진릿값은 오른쪽 표에서 참(T)이다.

p	q	$p \wedge q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

즉, '은행은 금융 기관이고, 학교는 교육 기관이다.' 의 진릿값은 참(T)이다.

스스로 하기 / 익힘책 13쪽 | 익힘책 14쪽 | 익힘책 15쪽

1 다음 두 명제의 논리곱을 말하고, 그것의 진릿값을 구하여라.
(1) p: 사슴은 동물이다. q: 장미는 식물이다.
(2) p: 독도는 동해에 있다. q: 백령도는 서해에 있다.
(3) p: 0은 정수가 아니다. q: 2는 소수이다.

알아보기 / 해설

연결사 '그리고' 와 '~이고' 는 같은 뜻이다. 그러므로 |보기|의 명제 '2는 10의 배수이고, 5는 20의 약수이다.' 를 '2는 10의 배수이다. 그리고 5는 20의 약수이다.' 와 같이 나타낼 수도 있다.

스스로 하기 / 풀이

1 (1) 논리곱: **사슴은 동물이고, 장미는 식물이다.**

명제 'p: 사슴은 동물이다.' 의 진릿값은 참(T)이고, 명제 'q: 장미는 식물이다.' 의 진릿값도 참(T)이다.

따라서 논리곱 $p \wedge q$의 진릿값은 다음 표에서 **참(T)**이다.

p	q	$p \wedge q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

(2) 논리곱: **독도는 동해에 있고, 백령도는 서해에 있다.**

명제 'p: 독도는 동해에 있다.' 의 진릿값은 참(T)이고, 명제 'q: 백령도는 서해에 있다.' 의 진릿값도 참(T)이다.

따라서 논리곱 $p \wedge q$의 진릿값은 다음 표에서 **참(T)**이다.

p	q	$p \wedge q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

(3) 논리곱: **0은 정수가 아니고, 2는 소수이다.**

명제 'p: 0은 정수가 아니다.' 의 진릿값은 거짓(F)이고, 명제 'q: 2는 소수이다.' 의 진릿값은 참(T)이다.

따라서 논리곱 $p \wedge q$의 진릿값은 다음 표에서 **거짓(F)**이다.

p	q	$p \wedge q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

탐구하기 / 풀이

문장의 참 또는 거짓에 관계없이 두 문장을 한 문장으로 표현하는 문제이다.

주어진 두 문장 '달은 낮에 볼 수 있다. 또는 달은 밤에 볼 수 있다.' 는 '달은 낮이나 밤에 볼 수 있다.' 와 같이 한 문장으로 표현할 수 있다.

알아보기 / 해설

- 논리합을 영어로 disjunction이라고 한다.
- 연결사 '또는' 과 '~이거나' 는 같은 뜻이다.

  그러므로 |보기|의 명제 '일본은 섬나라이거나, 중국은 대륙에 있는 나라이다.' 를 '일본은 섬나라이다. 또는 중국은 대륙에 있는 나라이다.' 와 같이 나타낼 수 있다.

03 논리합

탐구하기 / 문장 바꾸기

'지구의 공전 궤도는 원이다. 또는 지구의 공전 궤도는 타원이다.' 는 '지구의 공전 궤도는 원이거나 타원이다.' 와 같이 한 문장으로 표현하면 간편하다. 다음 문장을 한 문장으로 표현하여 보자.

> 달은 낮에 볼 수 있다. 또는 달은 밤에 볼 수 있다.

알아보기 / 논리합의 뜻, 진릿값과 진리표에 대하여 알아보자.

'또는' 과 '~이거나' 는 같은 뜻이다.

'충무공 이순신은 조선 시대의 장군이거나 고려 시대의 장군이다.' 와 같이 두 개 이상의 명제를 '또는' 으로 연결한 합성명제를 그 명제들의 **논리합**이라고 한다. 또 두 명제 p와 q의 논리합 'p 또는 q' 를 기호로

$$p \vee q$$

와 같이 나타낸다.

|보기| (1) p: 일본은 섬나라이다. q: 중국은 대륙에 있는 나라이다.
에서 두 명제 p와 q의 논리합 $p \vee q$는
$p \vee q$: 일본은 섬나라이거나, 중국은 대륙에 있는 나라이다.
이때, 두 명제 p와 q는 각각 참이고, 논리합 $p \vee q$도 참이다.
(2) p: 성조기는 미국의 국기이다. q: 성조기는 영국의 국기이다.
에서 두 명제 p와 q의 논리합 $p \vee q$는
$p \vee q$: 성조기는 미국의 국기이거나 영국의 국기이다.
이때, 명제 p는 참이고, 명제 q는 거짓이며, 논리합 $p \vee q$는 참이다.
(3) p: 고모는 어머니와 자매 사이이다.
q: 이모는 아버지와 오누이 사이이다.
에서 두 명제 p와 q의 논리합 $p \vee q$는
$p \vee q$: 고모는 어머니와 자매 사이이거나, 이모는 아버지와 오누이 사이이다.
이때, 두 명제 p와 q는 각각 거짓이고, 논리합 $p \vee q$도 거짓이다.

스스로 하기 / 풀이

1 (1) 논리합: **당근은 채소이거나 사과는 과일이다.**

명제 'p: 당근은 채소이다.' 의 진릿값은 참(T)이고, 명제 'q: 사과는 과일이다.' 의 진릿값도 참(T)이다.

따라서 논리합 $p \vee q$의 진릿값은 다음 표에서 참(**T**)이다.

p	q	$p \vee q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

(2) 논리합: **개구리는 포유류이거나 뱀은 파충류이다.**

명제 'p: 개구리는 포유류이다.' 의 진릿값은 거짓(F)이고, 명제 'q: 뱀은 파충류이다.' 의 진릿값은 참(T)이다.

따라서 논리합 $p \vee q$의 진릿값은 다음 표에서 참(T)이다.

p	q	$p \vee q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

17

일반적으로 논리합의 진릿값은 다음과 같이 정한다.

논리합의 진릿값

두 명제 p와 q에 대하여 논리합 $p\vee q$의 진릿값은 p와 q의 진릿값이 모두 거짓일 때만 거짓이고, 그 밖의 경우에는 모두 참이다.

논리곱과 마찬가지로, 두 명제 p와 q에 대하여 논리합 $p\vee q$의 진릿값은 p와 q의 진릿값이 각각 참인지 거짓인지에 따라 정해진다.

즉, 두 명제 p와 q의 논리합 $p\vee q$의 진릿값을 표로 나타내면 오른쪽과 같다.

논리합의 진리표

p	q	$p\vee q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

| 보기 | (1) 명제 'p: 114는 4의 배수이다.'의 진릿값은 거짓(F)이고,
명제 'q: 115는 3의 배수이다.'의 진릿값도 거짓(F)이다.
따라서 논리합 $p\vee q$의 진릿값은 오른쪽 표에서 거짓(F)이다. 즉, '114는 4의 배수이거나 115는 3의 배수이다.'의 진릿값은 거짓(F)이다.

p	q	$p\vee q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

(2) 명제 'p: 개나리는 식물이다.'의 진릿값은 참(T)이고,
명제 'q: 개나리는 동물이다.'의 진릿값은 거짓(F)이다.
따라서 논리합 $p\vee q$의 진릿값은 오른쪽 표에서 참(T)이다. 즉, '개나리는 식물이거나 동물이다.'의 진릿값은 참(T)이다.

p	q	$p\vee q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

스스로 하기 / 익힘책 13쪽 | 익힘책 14쪽 | 익힘책 15쪽

1 다음 두 명제의 논리합을 말하고, 그것의 진릿값을 구하여라.
(1) p: 당근은 채소이다. q: 사과는 과일이다.
(2) p: 개구리는 포유류이다. q: 뱀은 파충류이다.

보충 학습

• 논리합과 논리곱에 대한 교환법칙이 성립한다.

$p\vee q=q\vee p,\ p\wedge q=q\wedge p$

p	q	$p\vee q$	$q\vee p$	$p\wedge q$	$q\wedge p$
T	T	T	T	T	T
T	F	T	T	F	F
F	T	T	T	F	F
F	F	F	F	F	F

• 논리합과 논리곱에 대한 결합법칙이 성립한다.

$(p\vee q)\vee r=p\vee(q\vee r)$

p	q	r	$p\vee q$	$(p\vee q)\vee r$	$q\vee r$	$p\vee(q\vee r)$
T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	T	T	T
T	F	T	T	T	T	T
T	F	F	T	T	F	T
F	T	T	T	T	T	T
F	T	F	T	T	T	T
F	F	T	F	T	T	T
F	F	F	F	F	F	F

$(p\wedge q)\wedge r=p\wedge(q\wedge r)$

p	q	r	$p\wedge q$	$(p\wedge q)\wedge r$	$q\wedge r$	$p\wedge(q\wedge r)$
T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	F	F	F
T	F	T	F	F	F	F
T	F	F	F	F	F	F
F	T	T	F	F	T	F
F	T	F	F	F	F	F
F	F	T	F	F	F	F
F	F	F	F	F	F	F

• 논리합에 대한 논리곱의 분배법칙이 성립한다.

$p\wedge(q\vee r)=(p\wedge q)\vee(p\wedge r)$

p	q	r	$q\vee r$	$p\wedge(q\vee r)$	$p\wedge q$	$p\wedge r$	$(p\wedge q)\vee(p\wedge r)$
T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	T	T	F	T
T	F	T	T	T	F	T	T
T	F	F	F	F	F	F	F
F	T	T	T	F	F	F	F
F	T	F	T	F	F	F	F
F	F	T	T	F	F	F	F
F	F	F	F	F	F	F	F

04 명제의 부정과 진릿값의 관계

탐 구 하 기 / 부정의 부정

어떤 학생이 "너 숙제 안 했지?"라는 친구의 물음에 "아니."라고 대답했다.
이 학생이 숙제를 했는지, 안 했는지를 말하고, 그 이유를 설명하여 보자.

알 아 보 기 / 명제의 부정과 진릿값의 관계를 알아보자.

진릿값이 참(T)인 명제 '포도는 과일이다.' 를 부정하면 '포도는 과일이 아니다.' 이고 그 진릿값은 거짓(F)이다.

이와 같이 어떤 명제를 부정하면 그 진릿값은 참과 거짓이 서로 바뀌게 된다.

일반적으로 명제의 부정의 진릿값은 다음과 같이 정한다.

명제의 부정과 진릿값

명제 p의 진릿값이 참이면 이 명제를 부정한 명제의 진릿값은 거짓이다. 그리고 명제 p의 진릿값이 거짓이면 이 명제를 부정한 명제의 진릿값은 참이다.

$\sim p$를 'p의 부정' 또는 'not p' 라고 읽는다.

명제 p의 부정 $\sim p$의 진릿값을 표로 나타내면 오른쪽과 같다.

부정의 진리표

p	$\sim p$
T	F
F	T

한편 부정이 포함된 합성명제와 같이 복잡한 경우의 진리표는 합성명제를 구성하는 명제들 각각의 진릿값에 대하여 단계별로 진릿값을 구하면 편리하다.

예를 들어 두 명제 p와 q의 논리곱 $p\wedge q$의 부정 $\sim(p\wedge q)$ 의 진리표는 다음 순서에 따라 만들면 편리하다.

1단계 명제 $p\wedge q$의 진리표를 만든다.

2단계 $\sim(p\wedge q)$ 의 진리표, 즉 $p\wedge q$의 부정의 진리표를 만든다.

p	q	$p\wedge q$	$\sim(p\wedge q)$
T	T	T	F
T	F	F	T
F	T	F	T
F	F	F	T

탐구하기 / 풀이

이 학생은 숙제를 했다.

이유: "너 숙제 안 했지?"라는 물음에 "아니."라고 대답했으므로 숙제를 안 하지 않은 것이다. 즉, 부정의 부정이므로 이 학생은 숙제를 했다는 뜻이 된다.

알아보기 / 해설

- 부정을 영어로 negation이라고 한다.
- 어떤 명제 p에 '~이 아니다.' 를 붙여 만든 명제 'p가 아니다. (not p)' 를 명제 p의 부정이라 하고, 기호로 '$\sim p$' 와 같이 나타낸다.

보충 학습

명제에 대한 드모르간의 법칙이 성립함을 진리표로 알아보자.

$\sim(p\wedge q)$

p	q	$p\wedge q$	$\sim(p\wedge q)$
T	T	T	F
T	F	F	T
F	T	F	T
F	F	F	T

$\sim p\vee\sim q$

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p\vee\sim q$
T	T	F	F	F
T	F	F	T	T
F	T	T	F	T
F	F	T	T	T

$\therefore \sim(p\wedge q)=\sim p\vee\sim q$

$\sim(p\vee q)$

p	q	$p\vee q$	$\sim(p\vee q)$
T	T	T	F
T	F	T	F
F	T	T	F
F	F	F	T

$\sim p\wedge\sim q$

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p\wedge\sim q$
T	T	F	F	F
T	F	F	T	F
F	T	T	F	F
F	F	T	T	T

$\therefore \sim(p\vee q)=\sim p\wedge\sim q$

19

함께하기 / 익힘책 13쪽 | 익힘책 14쪽 | 익힘책 15쪽

1 다음 명제의 진리표를 만들어라.
(1) $\sim(\sim p)$ (2) $\sim p \vee \sim q$

풀이
(1) 먼저 $\sim p$의 진릿값을 구하고, $\sim(\sim p)$의 진릿값을 구한다.

p	$\sim p$	$\sim(\sim p)$
T	F	T
F	T	F

(2) 먼저 $\sim p$, $\sim q$의 진릿값을 구하고, $\sim p \vee \sim q$의 진릿값을 구한다.

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \vee \sim q$
T	T	F	F	F
T	F	F	T	T
F	T	T	F	T
F	F	T	T	T

스스로 하기 / 익힘책 13쪽 | 익힘책 14쪽 | 익힘책 15쪽

1 다음 명제의 부정을 말하고, 그것의 진릿값을 구하여라.
(1) $7\times8=56$
(2) 해는 동쪽에서 뜬다.
(3) 외삼촌과 아버지는 형제이다.
(4) 마라톤은 올림픽 종목이 아니다.

2 오른쪽 표는 합성명제 $\sim p \vee q$의 진릿값을 구하는 진리표이다. 빈칸에 알맞은 진릿값을 써넣어라.

p	q	$\sim p$	$\sim p \vee q$
T	T		
T	F		
F	T		
F	F		

참고 | 연극 '불가불가(不可不可)'

이현화 작가의 연극 '불가불가' 에서 부정을 찾아볼 수 있다.
연극 속의 연극이라는 극중극의 형식을 취하는 이 연극은 황산벌 전투를 앞둔 계백 장군의 비장하고 결연한 대사와 을사조약에 대해 '불가불가' 로 우유부단한 태도를 보이는 늙은 신하의 대사가 강렬한 대조를 이룬다. '불가불가' 가 '불가불 가(어쩔 수 없이 허락한다.)' 일 수도 있고 '불가 불가(절대로 허락할 수 없다.)' 일 수도 있음을 암시하며 역사의 소용돌이에서 어떻게 대처를 해야 하는가에 질문을 던진다.
"불가불 가요 아니면 불가 불가요?"
여기에서 불가불(不可不)은 하지 아니할 수 없다는 뜻으로 부정의 부정이다.

함께하기 / 해설

1 명제의 부정은 '-1' 을 곱하는 것에 비유할 수 있다. 양수에 '-1' 을 곱하면 음수가 되고, 음수에 '-1' 을 곱하면 양수가 되는 것처럼 참(T)인 명제를 부정하면 거짓(F)인 명제가 되고, 거짓(F)인 명제를 부정하면 참(T)인 명제가 된다. 따라서 명제의 부정의 부정은 $(-1)\times(-1)$을 곱하는 것으로 생각할 수 있다.

스스로 하기 / 풀이

1 (1) 진릿값이 참(T)인 명제 '$7\times8=56$' 을 부정하면 '**$7\times8\neq56$**' 이고, 그 진릿값은 **거짓(F)**이다.
(2) 진릿값이 참(T)인 명제 '해는 동쪽에서 뜬다.' 를 부정하면 '**해는 동쪽에서 뜨지 않는다.**' 이고, 그 진릿값은 **거짓(F)**이다.
(3) 진릿값이 거짓(F)인 명제 '외삼촌과 아버지는 형제이다.' 를 부정하면 '**외삼촌과 아버지는 형제가 아니다.**' 이고, 그 진릿값은 **참(T)**이다.
(4) 진릿값이 거짓(F)인 명제 '마라톤은 올림픽 종목이 아니다.' 를 부정하면 '**마라톤은 올림픽 종목이다.**' 이고, 그 진릿값은 **참(T)**이다.

2

p	q	$\sim p$	$\sim p \vee q$
T	T	**F**	**T**
T	F	**F**	**F**
F	T	**T**	**T**
F	F	**T**	**T**

소단원의 학습 목표

1. 동치명제의 뜻을 알고, 동치명제임을 보일 수 있다.
2. 조건문과 쌍조건문의 뜻을 알고, 그것의 진릿값을 구할 수 있다.

여기서 배우는 용어 및 기호

동치명제, 쌍조건문, $p \longleftrightarrow q$

참고 | 펠레의 징크스

사람들은 일상생활 속에서 '～하면 ～한다.' 와 같은 징크스를 믿기도 한다. 예를 들면 어떤 운동선수 중에는 경기 전에 손톱을 깎으면 경기에서 진다는 징크스를 믿기도 하고, 물건을 파는 사람 중에는 첫 손님이 물건 값을 깎으면 그날 물건 파는 재미가 없다고 여기기도 한다.

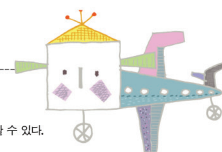
월드컵은 역사가 오래된 만큼 많은 징크스가 존재한다. 그중 '펠레의 징크스' 는 20세기 최고의 축구 선수로 추앙받는 펠레가 월드컵 전에 우승 예상 팀을 언급할 때마다 그 팀이나 선수들에게 불운이 따른다는 징크스이다.

그 예로 1994년 미국 월드컵 개막에 앞서 펠레는 '콜롬비아가 우승 후보이며 브라질은 자격이 없다.' 고 말했다. 이 말이 끝나기가 무섭게 콜롬비아는 조별 리그에서 탈락했다. 반면 브라질은 통산 4번째 우승 트로피를 가져갔다. 펠레의 징크스는 2002년 월드컵에서도 적용되었다. 펠레가 '4년 전보다 더 강해졌다.' 고 평가한 프랑스는 졸전 끝에 탈락했고, '세계 최고의 선수' 라고 치켜세웠던 지네딘 지단은 부상으로 제 몫을 하지 못했다. 유로 2004년의 웨인 루니, 그리고 이탈리아의 프란체스코 토티까지 펠레가 칭찬한 선수들은 모두 재앙을 피해 가지 못했다.

20

1 합성명제와 논리 회로

2 쌍조건문



학습 목표
- 동치명제의 뜻을 안다.
- 조건문과 쌍조건문의 뜻을 알고, 그것의 진릿값을 구할 수 있다.

다 가 서 기 / **행운권 추첨**

하영이가 말한 '운이 좋으면 당첨된다.' 는 말과 '당첨된 걸 보니 운이 좋다.' 는 말을 연결하면 '운이 좋으면 당첨되고, 당첨되면 운이 좋다.' 가 된다.

이와 같이 A이면 B이고 B이면 A인 관계를 일상생활에서 찾을 수 있다. 이 단원에서는 이러한 명제에 대하여 알아보자.

01 동치명제

탐구하기 / 합성명제의 진릿값

다음 합성명제의 진릿값을 구하여 보자.

1. $\sim(p \vee q)$

p	q	$p \vee q$	$\sim(p \vee q)$
T	T		
T	F		
F	T		
F	F		

2. $\sim p \wedge \sim q$

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \wedge \sim q$
T	T			
T	F			
F	T			
F	F			

알아보기 / 동치명제에 대하여 알아보자.

오른쪽 진리표에서 명제 p와 $\sim(\sim p)$의 진릿값은 항상 서로 같다.

이와 같이 모든 경우에 대하여 두 명제의 진릿값이 항상 같을 때, 두 명제는 서로 **동치명제**라고 한다.

p	$\sim p$	$\sim(\sim p)$
T	F	T
F	T	F

| 보기 | 합성명제 $\sim(p \wedge q)$와 $\sim p \vee \sim q$의 진리표는 각각 다음과 같다.

p	q	$p \wedge q$	$\sim(p \wedge q)$
T	T	T	F
T	F	F	T
F	T	F	T
F	F	F	T

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \vee \sim q$
T	T	F	F	F
T	F	F	T	T
F	T	T	F	T
F	F	T	T	T

모든 경우에 대하여 두 합성명제의 진릿값이 같으므로 $\sim(p \wedge q)$와 $\sim p \vee \sim q$는 서로 동치명제이다.

진리표를 이용하면 주어진 두 명제가 동치명제임을 쉽게 보일 수 있어요.

스스로 하기 / 익힘책 17쪽 | 익힘책 18쪽 | 익힘책 20쪽

1 진리표를 이용하여 다음 두 합성명제가 서로 동치명제임을 보여라.

(1) $\sim(p \vee \sim q)$, $\sim p \wedge q$ (2) $\sim(\sim p \wedge q)$, $p \vee \sim q$

탐구하기 / 풀이

1. $\sim(p \vee q)$

p	q	$p \vee q$	$\sim(p \vee q)$
T	T	**T**	**F**
T	F	**T**	**F**
F	T	**T**	**F**
F	F	**F**	**T**

2. $\sim p \wedge \sim q$

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \wedge \sim q$
T	T	**F**	**F**	**F**
T	F	**F**	**T**	**F**
F	T	**T**	**F**	**F**
F	F	**T**	**T**	**T**

스스로 하기 / 풀이

1 (1) $\sim(p \vee \sim q)$

p	q	$\sim q$	$p \vee \sim q$	$\sim(p \vee \sim q)$
T	T	F	T	F
T	F	T	T	F
F	T	F	F	T
F	F	T	T	F

$\sim p \wedge q$

p	q	$\sim p$	$\sim p \wedge q$
T	T	F	F
T	F	F	F
F	T	T	T
F	F	T	F

모든 경우에 대하여 두 합성명제의 진릿값이 같으므로 $\sim(p \vee \sim q)$와 $\sim p \wedge q$는 서로 동치명제이다.

(2) $\sim(\sim p \wedge q)$

p	q	$\sim p$	$\sim p \wedge q$	$\sim(\sim p \wedge q)$
T	T	F	F	T
T	F	F	F	T
F	T	T	T	F
F	F	T	F	T

$p \vee \sim q$

p	q	$\sim q$	$p \vee \sim q$
T	T	F	T
T	F	T	T
F	T	F	F
F	F	T	T

모든 경우에 대하여 두 합성명제의 진릿값이 같으므로 $\sim(\sim p \wedge q)$와 $p \vee \sim q$는 서로 동치명제이다.

22

02 조건문

알 아 보 기 / 조건문의 진릿값을 알아보자.

'x는 4의 약수이다.' 와 같이 미지수 x의 값에 따라 참과 거짓이 결정되는 문장이나 식을 조건이라고 한다.

두 명제 p와 q가 'p이면 q이다.' 와 같이 연결된 합성명제를 조건문이라 하고, 기호로 $p \longrightarrow q$와 같이 나타낸다.

일반적으로 조건문의 진릿값은 다음과 같이 정한다.

조건과 조건문은 서로 다르다.

조건문의 진릿값과 진리표

두 명제 p와 q에 대하여 $p \longrightarrow q$의 진릿값은 p의 진릿값이 참이고 q의 진릿값이 거짓일 때에만 거짓이고, 그 밖의 경우는 모두 참이다. 이때, 조건문 $p \longrightarrow q$의 진리표는 오른쪽과 같다.

p	q	$p \longrightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

한편 합성명제 $\sim p \vee q$의 진리표는 오른쪽 표와 같으므로 조건문 $p \longrightarrow q$와 합성명제 $\sim p \vee q$는 서로 동치명제이다.

p	q	$\sim p$	$\sim p \vee q$
T	T	F	T
T	F	F	F
F	T	T	T
F	F	T	T

| 보기 | 명제 'p: 토마토는 과일이다.' 의 진릿값은 거짓(F)이고, 명제 'q: 수박은 과일이다.' 의 진릿값도 거짓(F)이다.
따라서 조건문 $p \longrightarrow q$의 진릿값은 오른쪽 표에서 참(T)이다.

p	q	$p \longrightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

스 스 로 하 기 / 익힘책 17쪽 | 익힘책 18쪽 | 익힘책 20쪽

1 다음 두 명제 p와 q에 대하여 조건문 $p \longrightarrow q$를 말하고, 그것의 진릿값을 구하여라.

(1) p: 한강은 동해로 흐른다. q: 낙동강은 남해로 흐른다.

(2) p: 남극에는 육지가 있다. q: 북극에는 육지가 있다.

스스로 하기 / 풀이

1 (1) 조건문 $p \longrightarrow q$: 한강이 동해로 흐르면 낙동강은 남해로 흐른다.

명제 'p: 한강은 동해로 흐른다.' 의 진릿값은 거짓(F)이고, 명제 'q: 낙동강은 남해로 흐른다.' 의 진릿값은 참(T)이다.

따라서 조건문 $p \longrightarrow q$의 진릿값은 다음 표에서 **참(T)**이다.

p	q	$p \rightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

(2) 조건문 $p \longrightarrow q$: 남극에 육지가 있으면 북극에도 육지가 있다.

명제 'p: 남극에는 육지가 있다.' 의 진릿값은 참(T)이고, 명제 'q: 북극에는 육지가 있다.' 의 진릿값은 거짓(F)이다.

따라서 조건문 $p \longrightarrow q$의 진릿값은 다음 표에서 **거짓(F)**이다.

p	q	$p \rightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

즉, '남극에 육지가 있으면 북극에도 육지가 있다.' 의 진릿값은 **거짓(F)**이다.

보충 학습

다음 진리표에서 $p \vee \sim p$는 그 진릿값이 항상 참(T)이고, $p \wedge \sim p$는 항상 거짓(F)임을 알 수 있다.

p	$\sim p$	$p \vee \sim p$	$p \wedge \sim p$
T	F	T	F
F	T	T	F

이때, $p \vee \sim p$와 같이 항상 참인 명제를 항진명제(tautology)라 하고, $p \wedge \sim p$와 같이 항상 거짓인 명제를 모순 명제(contradiction)라고 한다.

다음 진리표에서 $(p \wedge q) \longrightarrow (p \vee q)$의 진릿값은 항상 참(T)이므로 항진명제이다.

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$(p \wedge q) \rightarrow (p \vee q)$
T	T	T	T	T
T	F	F	T	T
F	T	F	T	T
F	F	F	F	T

23

03 쌍조건문

알 아 보 기 / 쌍조건문에 대하여 알아보자.

두 명제 p와 q가 'p이면 q이고, q이면 p이다.'와 같이 연결된 합성명제를 **쌍조건문**이라 하고, 기호로

$$p \longleftrightarrow q$$

와 같이 나타낸다. 한편 쌍조건문의 정의에 의하여 $p \longleftrightarrow q$는 $(p \longrightarrow q) \wedge (q \longrightarrow p)$와 서로 동치명제이다.

두 명제 p, q의 쌍조건문은 조건문 $p \longrightarrow q$와 $q \longrightarrow p$가 '그리고'로 연결되어 있으므로 $(p \longrightarrow q) \wedge (q \longrightarrow p)$이다.

일반적으로 쌍조건문의 진릿값은 다음과 같이 정한다.

쌍조건문의 진릿값과 진리표

두 명제 p와 q에 대하여 $p \longleftrightarrow q$의 진릿값은 p와 q가 모두 참이거나 모두 거짓일 때만 참이고, 그 밖의 경우는 거짓이다.
이때, 쌍조건문 $p \longleftrightarrow q$의 진리표는 오른쪽과 같다.

p	q	$p \longleftrightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

| 보기 | 명제 'p: 합동인 두 삼각형은 모두 정삼각형이다.'의 진릿값은 거짓(F)이고, 명제 'q: 합동인 두 삼각형의 넓이는 같다.'의 진릿값은 참(T)이다.
따라서 쌍조건문 $p \longleftrightarrow q$의 진릿값은 오른쪽 표에서 거짓(F)이다.

p	q	$p \longleftrightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

스 스 로 하 기 / 익힘책 17쪽 | 익힘책 18쪽 | 익힘책 20쪽

1 두 명제의 쌍조건문의 진릿값을 구하여라.
(1) p: 1988년 올림픽은 한국에서 열렸다.
q: 2008년 올림픽은 호주에서 열렸다.
(2) p: 합동인 두 원의 넓이는 같다.
q: 합동인 두 원의 반지름의 길이는 같다.

마찬가지로 $p \longleftrightarrow \sim q$도 다음 표와 같이 두 명제 p, q의 진릿값이 서로 다를 때 참(T)이 되는 합성명제이다.

p	q	$\sim q$	$p \longleftrightarrow \sim q$
T	T	F	F
T	F	T	T
F	T	F	T
F	F	T	F

• 진리표를 이용하여 논리합, 논리곱, 조건문, 쌍조건문의 진릿값을 비교해 보면 다음과 같다.

p	q	$p \vee q$	$p \wedge q$	$p \longrightarrow q$	$p \longleftrightarrow q$
T	T	T	T	T	T
T	F	T	F	F	F
F	T	T	F	T	F
F	F	F	F	T	T

알아보기 / 해설

• 주어진 | 보기 | 의 두 명제 p, q의 쌍조건문을 만들면 다음과 같다.
'합동인 두 삼각형이 모두 정삼각형이면 두 삼각형의 넓이는 같고, 합동인 두 삼각형의 넓이가 같으면 두 삼각형은 모두 정삼각형이다.'

• $\sim(p \longleftrightarrow q)$는 다음 표와 같이 두 명제 p, q의 진릿값이 서로 다를 때 참(T)이 되는 합성명제이다.

p	q	$p \longleftrightarrow q$	$\sim(p \longleftrightarrow q)$
T	T	T	F
T	F	F	T
F	T	F	T
F	F	T	F

스스로 하기 / 풀이

1 (1) 명제 'p: 1988년 올림픽은 한국에서 열렸다.'의 진릿값은 참(T)이고, 2008년 올림픽은 중국 베이징에서 열렸으므로 명제 'q: 2008년 올림픽은 호주에서 열렸다.'의 진릿값은 거짓(F)이다.
따라서 쌍조건문 $p \longleftrightarrow q$의 진릿값은 거짓(F)이다.

(2) 명제 'p: 합동인 두 원의 넓이는 같다.'의 진릿값은 참(T)이고, 명제 'q: 합동인 두 원의 반지름의 길이는 같다.'의 진릿값도 참(T)이다.
따라서 쌍조건문 $p \longleftrightarrow q$의 진릿값은 참(T)이다.

소단원의 학습 목표

1. 논리 회로의 뜻을 알고, 기호로 나타낼 수 있다.
2. 합성명제의 논리 회로를 기호로 표현할 수 있고, 그 진릿값을 구할 수 있다.

여기서 배우는 용어 및 기호

논리 회로

24

1 합성명제와 논리 회로

3 논리 회로

학습 목표

• 논리 회로의 뜻을 알고, 논리 연산과 기호를 논리 회로에 활용할 수 있다.

다 가 서 기 / **컴퓨터를 만든 수학자**

튜링(Turing A.M. ; 1912∼1954)은 1943년에 진공관으로 작동되는 전자식 암호 해독기인 콜로서스를 만들었는데 이것은 오늘날 컴퓨터가 가진 모든 기능을 갖추고 있다. 에케르트(Eckert J. P.)와 모클리(Mauchly J. W.)는 1946년에 에니악(ENIAC)을 만들었다.

컴퓨터는 논리 회로를 통해 사칙연산과 논리 연산을 수행한다. 따라서 컴퓨터의 논리 회로를 설계할 때에는 합성명제의 진릿값을 계산해야 한다.

다가서기 / 해설

일반적으로 펜실베이니아 대학에서 만든 에니악(ENIAC)이 세계 최초의 컴퓨터로 알려져 있지만 1976년 영국군에서 비밀이 해제되면서 알려진 영국의 콜로서스(Colossus)가 최초의 컴퓨터이다. 컴퓨터 전문가 조페트는 에니악은 세계 최초가 아니라 11번째라고 발표했다.

1936년 튜링은 「계산 가능한 수에 관하여」라는 석사 학위 논문을 작성했다. 논문 요제는 사람의 두뇌에 해당하는 제어장치, 데이터가 수록된 테이프, 이를 읽고 기록하는 입출력 헤드의 세 가지만 있으면 기계적 절차로 모든 계산이 가능해진다는 것이다.

물론 튜링보다 한 발 먼저 유사한 생각을 도출한 수학자가 있었다. 튜링의 논문이 발표되기 직전에 미국의 알론조 처치(Alonzo Church)가 접근 방법은 매우 달랐지만 계산의 의미에 대한 수학적 접근을 시도했었다. 그는 튜링 기계와 같은 어떤 종류의 기계적인 장치로도 풀리지 않는 문제가 존재함을 증명했다.

그러나 처치가 엄밀하게 컴퓨터와 같은 생각을 한 것은 아니므로 튜링의 석사 학위 논문이 디지털 컴퓨터의 원조 개념을 다루었다고 간주한다. 일부 학자들은 인간이 생각할 수 있는 모든 것을 튜링 기계를 통해 구현이 가능하다는 가설을 들어 '처치–튜링 논제' 라고도 부른다.

튜링을 컴퓨터의 원조라고 하면서도 처치를 배제하지 않는 것은 처치가 튜링의 지도 교수였기 때문이다. 튜링이 미국으로 건너가게 된 것도 처치 교수의 논문을 읽었기 때문이다. 처치의 지도를 받은 튜링은 자신의 논문을 수정하여 1938년 26세의 나이로 프린스턴에서 박사 학위를 받았다.

01 논리 회로

탐구하기 / 논리곱과 곱셈

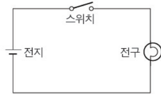
진릿값이 참(T)인 경우를 '1'로, 거짓(F)인 경우를 '0'으로 나타낼 때, 다음 물음에 답하여 보자.

1. 오른쪽 표는 논리곱 $p \wedge q$의 진릿값을 나타낸 것이다. 표를 완성하여라.
2. 논리곱 $p \wedge q$의 진릿값을 p의 진릿값과 q의 진릿값을 곱한 값과 비교하여라.

p	q	$p \wedge q$
1	1	
1	0	
0	1	0
0	0	

알아보기 / 논리 회로에 대하여 알아보자.

다음 그림으로 나타낸 회로에서 스위치가 켜지면(연결되면) 전구가 켜지고, 스위치가 꺼지면(연결되지 않으면) 전구가 꺼진다.



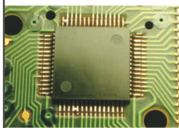
이때, 켜짐을 1, 꺼짐을 0으로 나타내면 스위치와 전구의 상태는 오른쪽 표와 같다.

스위치	전구
켜짐(1)	켜짐(1)
꺼짐(0)	꺼짐(0)

스위치의 상태를 명제 p로 생각하면 켜짐을 나타내는 1은 진릿값 T로, 꺼짐을 나타내는 0은 진릿값 F로 생각할 수 있다.

이와 같이 스위치의 켜짐과 꺼짐으로 명제의 논리곱, 논리합, 부정을 표현한 회로를 **논리 회로**라고 한다.

한편 논리 회로는 컴퓨터의 기본 회로로 이용된다. 컴퓨터의 기본 회로에는 논리곱 회로, 논리합 회로, 논리 부정 회로가 있다. 이것은 각각 합성명제의 논리곱, 논리합, 부정에 해당한다.



집적 회로(IC)
두 개 이상의 회로 소자들을 내부적으로 연결하여 전기 회로 내에서 특정한 기능을 수행하도록 한 회로 소자들의 집합체

알아보기 / 해설

인간은 여러 가지 기계나 장치의 목적에 따라 기계가 논리적으로 일을 수행할 수 있도록 전자 회로를 구성한다. 이때 사용되는 회로를 디지털 논리 회로 또는 간단히 논리 회로라고 한다. 디지털 시스템에 관한 논리 회로에는 작동 원리에 따라 조합 회로와 순서 회로로 나눌 수 있으며, 컴퓨터 내부에는 많은 종류의 조합 논리 회로와 순서 논리 회로가 복잡하게 연결되어 있다.

(1) 기본 논리 회로의 특징

디지털 컴퓨터는 각 부품의 전기, 자기 특성상 2개의 상태만을 표현하는 방법으로 이진수를 사용한다. 실제로 디지털 컴퓨터는 2개 이상으로 값을 다룰 수 있도록 하는 것보다 이진수를 사용하는 것이 회로를 구현하기 쉽고, 신호의 송수신의 오류를 줄일 수 있어 더 안정된 시스템을 구성할 수 있다.

탐구하기 / 풀이

1.

p	q	$p \wedge q$
1	1	**1**
1	0	**0**
0	1	0
0	0	**0**

2. 논리곱 $p \wedge q$의 진릿값은 p의 진릿값과 q의 진릿값을 곱한 값과 같다.

p	q	진릿값의 곱
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

(2) 기본 논리 회로의 종류

① AND 회로(곱)

AND 회로는 모든 논리 기능을 형성하기 위해 조합될 수 있는 기본 회로 중 하나이며 두 개 또는 그 이상의 입력을 가질 수 있는 논리 곱셈을 수행한다.

진리표에서 AND 회로의 논리는 입력 모두가 1일 때만 1이 된다. 즉, 적어도 어느 하나가 0이면 그 출력은 0이 됨을 알 수 있다.

② OR 회로(합)

OR 회로는 모든 논리 기능이 구성될 수 있는 또 다른 기본 회로로 두 개 또는 그 이상의 입력을 가질 수 있으며 논리 덧셈을 수행한다.

진리표에서 OR 회로의 논리는 입력 모두가 0

일 때만 0이 된다. 즉, 적어도 어느 하나가 1이면 그 출력은 1이 됨을 알 수 있다.

③ NOT 회로(부정)

인버터(inverter)라고 불리는 NOT 회로는 반전 또는 보수화라고 일컫는 연산을 수행하며 하나의 논리 레벨을 반대의 레벨로 변경한다. 즉, 한 개의 입력과 한 개의 출력을 갖는 회로로 논리적인 부정을 나타낸다. 인버터는 용어 그대로 입력 신호의 반전 파형을 출력에서 얻는다. 진리표에서 입력이 0이면 출력이 1이 되고, 입력이 1이면 출력이 0이 되어 반전됨을 알 수 있다.

(3) 그 밖의 논리 회로

기본 논리 회로 이외에 NAND 회로, NOR 회로가 있는데, 이들은 각각 AND 회로와 OR 회로의 부정이다. NAND 회로에 해당하는 합성명제는 $X=\sim(p\wedge q)$이고, NOR 회로에 해당하는 합성명제는 $X=\sim(p\vee q)$이다.

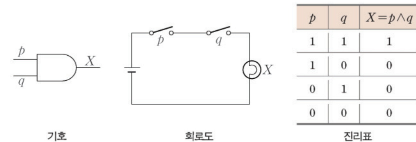
논리 회로 소자의 실제 모습

이제 컴퓨터의 세 가지 기본 논리 회로의 기호와 회로도, 진리표에 대하여 알아보자.

1 논리곱 회로(AND 회로)

논리곱 연산을 수행하는 회로로, 두 개의 입력 조건이 모두 참(1)일 때에만 그 결과가 참(1)인 회로이다.

논리곱 회로의 기호와 회로도, 진리표는 다음과 같다.

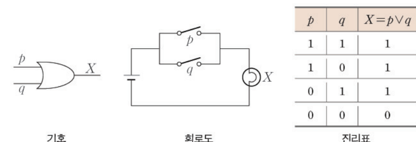


p	q	$X=p\wedge q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

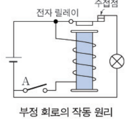
2 논리합 회로(OR 회로)

논리합 연산을 수행하는 회로로, 두 개의 입력 조건 중 어느 하나만 참(1)이어도 그 결과가 참(1)인 회로이다.

논리합 회로의 기호와 회로도, 진리표는 다음과 같다.



p	q	$X=p\vee q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

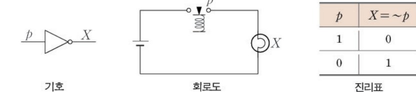


부정 회로의 작동 원리

3 논리 부정 회로(NOT 회로)

논리 부정 연산을 수행하는 회로로, 주어진 하나의 입력 조건에 대하여 출력이 반대가 되는 회로이다. 즉, 입력이 참(1)이면 그 결과가 거짓(0)이 되고, 입력이 거짓(0)이면 그 결과가 참(1)이 된다.

논리 부정 회로의 기호와 회로도, 진리표는 다음과 같다.



p	$X=\sim p$
1	0
0	1

참고 | 플립플롭

플립플롭(flip−flop)은 1비트의 정보를 보관 유지할 수 있는 회로이며 논리 회로의 기본 구성 요소이다. 입력에 대하여 지연된 하나의 출력을 입력에 피드백하는 것으로 정보를 유지 보관하는 데 사용하는 특징이 있다. 한 번 외부 입력에 의해 어떤 안정 상태로 결정되면 새로운 입력 조건이 주어질 때까지 회로는 그 상태 그대로를 유지한다. 또한 정보는 전원이 있을 때만 보관 유지되며 전원이 차단되면 정보는 사라진다.

플립플롭에는 두 개의 출력 단자, Q, $\overline{\mathrm{Q}}$가 있는데 Q=0, $\overline{\mathrm{Q}}$=1인 세트 상태, Q=1, $\overline{\mathrm{Q}}$=0인 리셋 상태의 두 가지의 안정 상태가 있으며 외부로부터 주어지는 입력 조건에 따라 RS 플립플롭, T 플립플롭, D 플립플롭, JK 플립플롭의 4종류로 나뉜다.

RS 플립플롭이나 T 플립플롭에서는 입력 단자인 R, S, T에 신호가 들어오면 그 즉시 이들 출력 단자 Q와 $\overline{\mathrm{Q}}$의 출력이 반대로 된다. 그러나 클록 입력 단자(C 단자)가 부착된 D 플립플롭과 JK 플립플롭은 입력 단자에 신호가 들어와도 이들 플립플롭의 출력 단자는 바로 변하지 않고 클록 입력 신호도 함께 들어와야 이들 출력 단자의 출력이 반대로 된다.

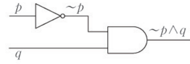
함께 하기 / 익힘책 23쪽 | 익힘책 24쪽 | 익힘책 25쪽

1 세 명제 p, q, r에 대하여 다음에 주어진 합성명제에 해당하는 논리 회로를 기호로 나타내어라.

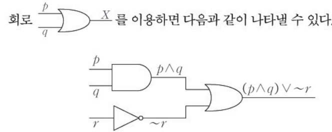
(1) $\sim p \wedge q$ (2) $(p \wedge q) \vee \sim r$

풀이

(1) 논리 부정 회로 p — X 와 논리곱 회로 p, q — X 를 이용하면 다음과 같이 나타낼 수 있다.

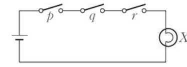


(2) 논리곱 회로 p, q — X 와 논리 부정 회로 p — X 및 논리합 회로 p, q — X 를 이용하면 다음과 같이 나타낼 수 있다.



스스로 하기 / 익힘책 23쪽 | 익힘책 24쪽 | 익힘책 25쪽

1 오른쪽 그림의 논리 회로는 세 명제 p, q, r의 논리곱 $(p \wedge q) \wedge r$를 나타낸다. 이 논리 회로를 기호로 나타내어라.



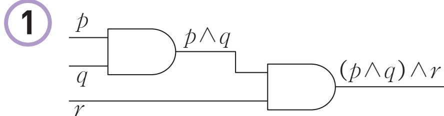
2 세 명제 p, q, r에 대하여 다음 합성명제를 나타내는 논리 회로를 기호로 나타내어라.

(1) $\sim(p \wedge q)$ (2) $\sim p \vee (q \vee r)$

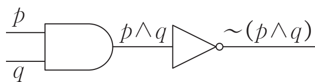
스스로 하기 /

풀이

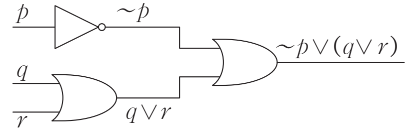
1



2 (1) 논리곱 회로 p, q — X 와 논리 부정 회로 p — X 를 이용하면 다음과 같이 나타낼 수 있다.



(2) 논리 부정 회로 p — X 와 논리합 회로 p, q — X 를 이용하면 다음과 같이 나타낼 수 있다.



참고 | 가산기

컴퓨터의 연산 기능 중 덧셈을 가능하게 하는 것이 가산기이다. 가산기는 반가산기와 전가산기 두 가지가 있다.

1. 반가산기(half adder)

반가산기는 두 개의 비트를 합하여 1비트의 합(sum)과 1비트의 자리 올림 수(carry)를 만들어 내는 회로이다. 입력(A), 입력(B), 출력(S), 자리 올림 수의 출력(C)의 관계를 보여 주는 진리표는 다음과 같다.

입력		출력	
A	B	S	C
0	0	0	0
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	0	1

2. 전가산기(full adder)

반가산기는 한 자리의 이진수의 덧셈만 가능하였는데 이러한 단점을 보완하여 여러 자리의 이진수의 덧셈이 가능하도록 설계한 덧셈 회로가 전가산기이다.

중단원 확인하기 / 풀이

28

중 단 원 확 인 하 기

새로 나온 용어와 기호
진릿값, 논리곱, 진리표, 논리합, 동치명제, 쌍조건문, 논리 회로,
$p\wedge q$, $p\vee q$, $p\longleftrightarrow q$

Ⅰ_1. 합성명제와 논리 회로

논리곱과 논리합

이해

1 다음 두 명제의 논리곱과 논리합을 말하고, 그것의 진릿값을 각각 구하여라.

(1) p: 정삼각형은 이등변삼각형이다.
　q: 마름모는 정사각형이다.

(2) p: 한글의 모음은 7개이다.
　q: 영어의 모음은 3개이다.

동치명제

계산

2 진리표를 이용하여 다음 두 명제가 동치임을 보여라.

(1) $p\vee q$, $\sim(\sim p\wedge\sim q)$

(2) $\sim(p\longleftrightarrow q)$, $(q\longrightarrow\sim p)\wedge(\sim p\longrightarrow q)$

쌍조건문

의사소통

3 다음 두 명제의 쌍조건문을 말하고, 그것의 진릿값을 구하여라.

p: 런던은 독일에 있다.　　q: 워싱턴은 영국에 있다.

논리 회로

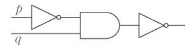
의사소통

4 조건문 $p\longrightarrow q$에 대한 논리 회로를 기호로 나타내어라.

논리 회로

문제 해결

5 다음 그림과 같은 논리 회로의 기호를 합성명제로 나타내어라.



---

1 (1) 논리곱: **정삼각형은 이등변삼각형이고, 마름모는 정사각형이다.**
명제 p의 진릿값이 참(T)이고, 명제 q의 진릿값이 거짓(F)이므로 논리곱 $p\wedge q$의 진릿값은 **거짓(F)**이다.
논리합: **정삼각형은 이등변삼각형이거나, 마름모는 정사각형이다.**
논리합 $p\vee q$의 진릿값은 **참(T)**이다.

(2) 논리곱: **한글의 모음은 7개이고, 영어의 모음은 3개이다.**
두 명제 p, q의 진릿값이 모두 거짓(F)이므로 논리곱 $p\wedge q$의 진릿값은 **거짓(F)**이다.
논리합: **한글의 모음은 7개이거나, 영어의 모음은 3개이다.**
논리합 $p\vee q$의 진릿값은 **거짓(F)**이다.

2 (1)

p	q	$p\vee q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p\wedge\sim q$	$\sim(\sim p\wedge\sim q)$
T	T	F	F	F	T
T	F	F	T	F	T
F	T	T	F	F	T
F	F	T	T	T	F

모든 경우에 대하여 두 합성명제의 진릿값이 같으므로 $p\vee q$와 $\sim(\sim p\wedge\sim q)$는 서로 동치명제이다.

(2)

p	q	$p\longleftrightarrow q$	$\sim(p\longleftrightarrow q)$
T	T	T	F
T	F	F	T
F	T	F	T
F	F	T	F

p	q	$\sim p$	$q\longrightarrow\sim p$	$\sim p\longrightarrow q$	$(q\longrightarrow\sim p)\wedge(\sim p\longrightarrow q)$
T	T	F	F	T	F
T	F	F	T	T	T
F	T	T	T	T	T
F	F	T	T	F	F

모든 경우에 대하여 두 합성명제의 진릿값이 같으므로
$\sim(p\longleftrightarrow q)$와 $(q\longrightarrow\sim p)\wedge(\sim p\longrightarrow q)$는 서로 동치명제이다.

3 쌍조건문: **런던이 독일에 있으면 워싱턴은 영국에 있고, 워싱턴이 영국에 있으면 런던은 독일에 있다.**
런던은 영국에 있으므로 명제 p의 진릿값은 거짓(F)이고, 워싱턴은 미국에 있으므로 명제 q의 진

29

읽을 거리

독일의 암호 체계를 무력화시킨 튜링

콜로서스의 존재가 알려지기 전까지 에니악이 최초의 컴퓨터로 알려져 있었다.

콜로서스

에니그마

노르망디 상륙 작전

알란 튜링

제2차 세계 대전은 영국을 비롯한 연합국과 독일 간의 치열한 과학 기술 경쟁이었다고 할 수 있다.

이 전쟁에서 독일에 패망을 안겨 준 결정적인 역할을 한 전투가 바로 미국이 참전한 후 1944년 6월에 진행된 노르망디 상륙 작전이다.

당시 독일은 '에니그마(Enigma)' 라는 기계를 사용하여 암호문을 작성하고 해독하였다. 이 기계의 성능은 너무나 우수하여 난공불락(難攻不落)으로 여겨졌다.

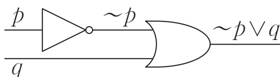
이에 영국은 독일의 암호 체계를 깨뜨리기 위하여 비밀 기구를 창설하고 수학의 달인들을 불러 모았다. 이들 중의 한 사람인 알란 튜링(Turing, A. M. ; 1912～1954)은 세계 최초의 진공관 컴퓨터인 '콜로서스(Colossus)' 를 제작하여 독일군의 암호를 대부분 해독하는 데 성공하였다. 자신들의 암호 체계가 깨어진 줄 몰랐던 독일군은 세계 각지로부터 본국으로 보고되는 비밀 문서 전송이나 군 작전 통신 등에도 거리낌 없이 '에니그마' 를 이용했다. 결과적으로 독일군은 자신들의 일거수일투족을 고스란히 영국을 비롯한 연합군에게 알려주는 꼴이 되고 말았다. 연합군은 이 정보를 이용하여 전쟁의 승패를 가른 노르망디 상륙 작전을 성공시킬 수 있었다.

릿값도 거짓(F)이다. 따라서 두 명제 p, q의 쌍조건문의 진릿값은 참(**T**)이다.

4 다음 진리표에 의하여 $p \longrightarrow q$와 $\sim p \vee q$가 동치 명제이다.

p	q	$\sim p$	$p \longrightarrow q$	$\sim p \vee q$
T	T	F	T	T
T	F	F	F	F
F	T	T	T	T
F	F	T	T	T

따라서 $\sim p \vee q$의 논리 회로를 기호로 나타내면 다음과 같다.



5 명제 p의 논리 부정 회로를 명제 q와의 논리곱 회로로 나타낸 후, 그것의 논리 부정 회로를 나타낸 것이다. 따라서 합성명제로 나타내면 $\sim(\sim p \wedge q)$이다.

익힘책 코너

읽기 자료_ 27쪽

논리적으로 모순이 없어 보이면서도 참도 되고 거짓도 되는 명제를 '논리적 역설(paradox)' 이라고 한다. 논리적 역설은 문법적으로는 정확하더라도 논리적으로는 무의미하다는 것을 보여준다. 역설에 관련된 이야기를 살펴보자.

1. 고대 중국에 창과 방패를 함께 파는 장사꾼이 자신의 창을

"이 창으로는 어떤 방패도 뚫리지 않는 것이 없습니다."

라 말하고, 자신의 방패를

"이 방패를 뚫을 수 있는 창은 이 세상에 없습니다."

라고 하였다. 구경하던 한 손님이

"당신의 창으로 당신의 방패를 찌르면 어떻게 됩니까?"

라고 묻자 장사꾼은 말문이 막혀 버렸다.

2. 크레타 인인 에피메니데스는

"모든 크레타 인들은 거짓말쟁이이다."

라고 했다. 그의 말이 참이면 그도 크레타 인이므로 거짓말쟁이가 되어 그가 거짓말을 한 것이 된다. 그의 말이 거짓이면 크레타 인 모두 정직한 사람이 되어 크레타 인인 그의 말도 참말이 되어 버린다. 결국 에피메니데스가 한 말이 참말이라면 거짓이 되고 거짓말이면 참이 되는 모순이 생긴다.

중단원 평가 문제

정답과 풀이 p.226

01 바탕

다음 명제의 부정을 말하고, 그것의 진릿값을 구하여라.

(1) 태양은 지구보다 크다.

(2) 영어의 모음은 3개이다.

(3) 삼각형의 내각의 크기의 합은 180°이다.

02 기본

두 명제 p, q에 대하여 다음 보기 중 항상 참인 명제를 찾아라.

보기

ㄱ. $\sim p \vee q \longrightarrow \sim q$

ㄴ. $\sim p \longrightarrow \sim (p \wedge q)$

ㄷ. $p \longleftrightarrow \sim q$

ㄹ. $\sim (p \vee q) \longleftrightarrow q$

03 기본

두 명제 p, q가 다음과 같을 때, 합성명제 $(p \longrightarrow q) \wedge q$ 의 진릿값을 구하여라.

p: 물의 분자식은 H_2O이다.

q: 이산화탄소의 분자식은 CO_2이다.

04 기본

다음 중 두 명제 p, q의 합성명제 $\sim (p \longrightarrow q)$와 진릿값이 항상 같은 명제는?

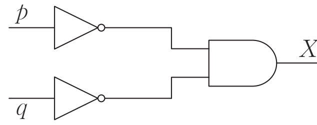
① $\sim q \longrightarrow \sim p$ ② $\sim p \longrightarrow \sim q$ ③ $\sim p \vee q$

④ $p \wedge \sim q$ ⑤ $q \longrightarrow p$

05

바탕

다음 그림과 같은 논리 회로의 기호를 합성명제로 바르게 나타낸 것은?



① $p \vee q$　② $p \wedge q$　③ $\sim p \vee \sim q$

④ $\sim p \wedge \sim q$　⑤ $\sim p \vee q$

검색 결과, 어떤 검색어를 포함하고 있는지를 알아본다.

06

실력

다음은 주어진 조건을 이용하여 검색한 내용이다. A에서 수행한 검색에 적용된 논리 회로로 옳은 것은?

〔조건〕

'수학'과 '활용'을 검색어로 사용한다.

검색 전	검색 논리 회로	검색 후 목록
-수학교육의 목적 -수학과 실생활 -수학의 활용 -컴퓨터 활용 방안 -신문 활용 수업	A	-수학의 활용

① p, X

② p, q, X

③ p, q, X

④ p, q, X

⑤ p, q, X

대단원 평가 문제

정답과 풀이 p.227

01

두 명제 p, q가 다음과 같을 때, 합성명제 $\sim(p \longleftrightarrow q)$의 진릿값이 거짓인 것을 모두 고르면?

① p: $2\times9=19$
　q: $5<3$
② p: 세종 대왕은 사람이다.
　q: 돼지는 가축이 아니다.
③ p: 우리나라 국보 1호는 남대문이다.
　q: 남대문의 정식 명칭은 숭례문이다.
④ p: 발이 두 개인 동물은 날개가 있다.
　q: 낙타는 포유류이다.
⑤ p: 지구 위 어느 곳이나 성탄절은 항상 겨울이다.
　q: 지구 위 어느 곳에서는 12월이 여름이다.

02

두 명제 p, q가 다음과 같을 때, 참인 합성명제는?

p: 1, 3, 5, 7월은 31일까지 있다.
q: 2, 4, 6, 8월은 30일까지 있다.

① $p\wedge q$　② $\sim p\vee q$
③ $p\longleftrightarrow q$　④ $\sim(p\longrightarrow q)$
⑤ $p\wedge(p\longleftrightarrow q)$

03

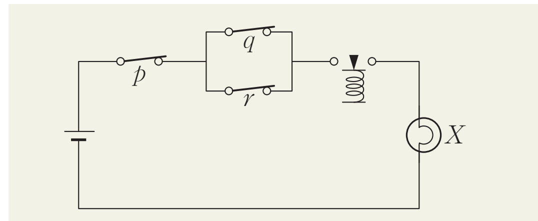
다음 중 동치명제인 것끼리 바르게 묶은 것은?

ㄱ. $\sim p\wedge\sim q$　ㄴ. $\sim q\longrightarrow\sim p$
ㄷ. $\sim(\sim p\longrightarrow q)$　ㄹ. $p\longrightarrow q$

① ㄱ, ㄴ　② ㄱ, ㄷ　③ ㄱ, ㄹ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄷ, ㄹ

04

다음 그림의 논리 회로가 나타내는 합성명제는?



① $\sim p\vee(q\vee r)$　② $p\vee(q\wedge r)$
③ $p\wedge(q\vee r)$　④ $\sim(p\vee(q\wedge r))$
⑤ $\sim(p\wedge(q\vee r))$

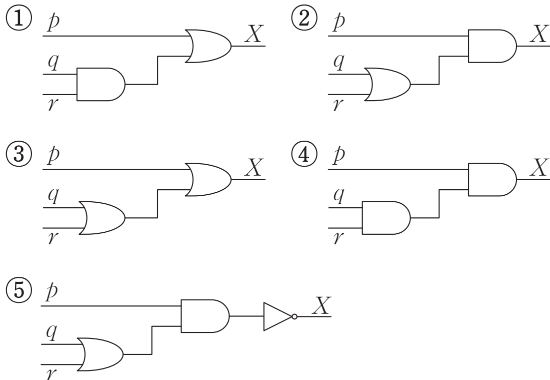
05 UP!!

다음은 어느 회사의 직원 채용 공고에 나온 지원 자격 요건이다.

> (1) 20세 이상인 자
> (2) 컴퓨터활용능력 자격증 소지자 또는 워드프로세서 자격증 소지자

자격 요건 (1)과 (2)를 모두 만족하는 논리 회로를 다음과 같은 조건을 만족하도록 표현할 때, 옳은 것은?

> (i) '20세 이상인 자', '컴퓨터활용능력 자격증 소지자', '워드프로세서 자격증 소지자'를 각각 p, q, r로 표현하고 각 조건을 만족하면 1, 그렇지 않으면 0이 입력된다.
> (ii) 출력값 X는 자격 요건 (1), (2)를 모두 만족하면 1, 그렇지 않으면 0이 출력된다.



06 서술형

진리표를 이용하여

$$(p \vee q) \wedge (\sim p \vee r) \longrightarrow (q \vee r)$$

의 진릿값이 항상 참임을 보여라.

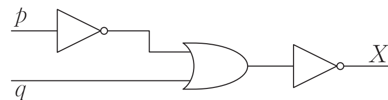
07 서술형

두 명제

p: 모든 이차방정식은 적어도 하나의 실근을 갖는다.

q: 모든 삼차방정식은 적어도 하나의 실근을 갖는다.

의 합성명제 $p \circ q$를 나타내는 논리 회로의 기호가 아래 그림과 같을 때, 합성명제 $p \circ q$의 진릿값을 구하여라.



I 명제와 논리

중단원 평가 문제

▶ 1. 합성명제와 논리 회로 / P_30

01 (1) 부정: 태양은 지구보다 크지 않다.
태양은 지구보다 크므로 거짓(F)이다.
(2) 부정: 영어의 모음은 3개가 아니다.
영어의 모음은 5개이므로 참(T)이다.
(3) 부정: 삼각형의 내각의 크기의 합은 180°가 아니다.
삼각형의 내각의 크기의 합은 180°이므로 거짓(F)이다.

답 풀이 참조

02 ㄱ.

p	q	$\sim p$	$\sim p \vee q$	$\sim q$	$\sim p \vee q \longrightarrow \sim q$
T	T	F	T	F	F
T	F	F	F	T	T
F	T	T	T	F	F
F	F	T	T	T	T

ㄴ.

p	q	$\sim p$	$p \wedge q$	$\sim(p \wedge q)$	$\sim p \longrightarrow \sim(p \wedge q)$
T	T	F	T	F	T
T	F	F	F	T	T
F	T	T	F	T	T
F	F	T	F	T	T

ㄷ.

p	q	$\sim q$	$p \longleftrightarrow \sim q$
T	T	F	F
T	F	T	T
F	T	F	T
F	F	T	F

ㄹ.

p	q	$p \vee q$	$\sim(p \vee q)$	$\sim(p \vee q) \longleftrightarrow q$
T	T	T	F	F
T	F	T	F	T
F	T	T	F	F
F	F	F	T	F

따라서 항상 참인 명제는 ㄴ이다.

답 ㄴ

03 명제 p의 진릿값은 참(T)이고, 명제 q의 진릿값도 참(T)이다.
따라서 조건문 $p \longrightarrow q$의 진릿값은 참(T)이므로 합성명제 $(p \longrightarrow q) \wedge q$의 진릿값도 참(T)이다.

답 참(T)

04 합성명제 $\sim(p \longrightarrow q)$의 진리표는 다음과 같다.

p	q	$p \longrightarrow q$	$\sim(p \longrightarrow q)$
T	T	T	F
T	F	F	T
F	T	T	F
F	F	T	F

이때, 주어진 합성명제의 진리표는 다음과 같다.

①

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$\sim q \longrightarrow \sim p$
T	T	F	F	T
T	F	F	T	F
F	T	T	F	T
F	F	T	T	T

②

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \longrightarrow \sim q$
T	T	F	F	T
T	F	F	T	T
F	T	T	F	F
F	F	T	T	T

③

p	q	$\sim p$	$\sim p \vee q$
T	T	F	T
T	F	F	F
F	T	T	T
F	F	T	T

④

p	q	$\sim q$	$p \wedge \sim q$
T	T	F	F
T	F	T	T
F	T	F	F
F	F	T	F

⑤

p	q	$q \longrightarrow p$
T	T	T
T	F	T
F	T	F
F	F	T

따라서 합성명제 $\sim(p \longrightarrow q)$와 진릿값이 항상 같은 명제는 ④이다.

답 ④

05 p —▷○— X 는 명제 $\sim p$를 나타내고,

p, q —D— X 는 합성명제 $p \wedge q$를 나타낸다.

따라서 주어진 논리 회로의 기호는 합성명제 $\sim p \wedge \sim q$를 나타낸다.

답 ④

06 '수학'과 '활용'이 모두 포함된 것을 찾은 것이므로 논리곱이다.

답 ④

대단원 평가 문제 p.32~33

01 ① 명제 p의 진릿값은 거짓(F)이고, 명제 q의 진릿값도 거짓(F)이다.
따라서 쌍조건문 $p \longleftrightarrow q$의 진릿값은 참(T)이므로 합성명제 $\sim(p \longleftrightarrow q)$의 진릿값은 거짓(F)이다.

② 명제 p의 진릿값은 참(T)이고, 명제 q의 진릿값은 거짓(F)이다.
따라서 쌍조건문 $p \longleftrightarrow q$의 진릿값은 거짓(F)이므로 합성명제 $\sim(p \longleftrightarrow q)$의 진릿값은 참(T)이다.

③ 명제 p의 진릿값은 참(T)이고, 명제 q의 진릿값도 참(T)이다.
따라서 쌍조건문 $p \longleftrightarrow q$의 진릿값은 참(T)이므로 합성명제 $\sim(p \longleftrightarrow q)$의 진릿값은 거짓(F)이다.

④ 명제 p의 진릿값은 거짓(F)이고, 명제 q의 진릿값은 참(T)이다.
따라서 쌍조건문 $p \longleftrightarrow q$의 진릿값은 거짓(F)이므로 합성명제 $\sim(p \longleftrightarrow q)$의 진릿값은 참(T)이다.

⑤ 명제 p의 진릿값은 거짓(F)이고, 명제 q의 진릿값은 참(T)이다.
따라서 쌍조건문 $p \longleftrightarrow q$의 진릿값은 거짓(F)이므로 합성명제 $\sim(p \longleftrightarrow q)$의 진릿값은 참(T)이다.

답 ①, ③

02 명제 p의 진릿값은 참(T)이고, 명제 q의 진릿값은 거짓(F)이다.

① 합성명제 $p \wedge q$의 진릿값은 거짓(F)이다.

② 명제 $\sim p$의 진릿값은 거짓(F)이므로 합성명제 $\sim p \vee q$의 진릿값은 거짓(F)이다.

③ 합성명제 $p \longleftrightarrow q$의 진릿값은 거짓(F)이다.

④ 합성명제 $p \longrightarrow q$의 진릿값은 거짓(F)이므로 합성명제 $\sim(p \longrightarrow q)$의 진릿값은 참(T)이다.

⑤ 합성명제 $p \longleftrightarrow q$의 진릿값은 거짓(F)이므로 합성명제 $p \wedge (p \longleftrightarrow q)$의 진릿값은 거짓(F)이다.

답 ④

03 주어진 합성명제의 진리표는 다음과 같다.

ㄱ.

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \wedge \sim q$
T	T	F	F	F
T	F	F	T	F
F	T	T	F	F
F	F	T	T	T

ㄴ.

p	q	$\sim q$	$\sim p$	$\sim q \longrightarrow \sim p$
T	T	F	F	T
T	F	T	F	F
F	T	F	T	T
F	F	T	T	T

ㄷ.

p	q	$\sim p$	$\sim p \longrightarrow q$	$\sim(\sim p \longrightarrow q)$
T	T	F	T	F
T	F	F	T	F
F	T	T	T	F
F	F	T	F	T

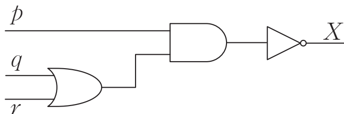
ㄹ.

p	q	$p \longrightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

따라서 ㄱ과 ㄷ, ㄴ과 ㄹ이 동치명제이다.

답 ②

04 주어진 그림의 논리 회로를 기호로 나타내면



이므로 이 논리 회로가 나타내는 합성명제는 $\sim(p \wedge (q \vee r))$이다.

답 ⑤

05 자격 요건 (2)에서 자격증은 둘 중 하나만 만족하면 되므로 q와 r는 논리합으로 표현하고, (1)과 (2)는 둘 다 만족해야 하므로 논리곱으로 표현한다.
이때, 자격 요건을 모두 만족하면 1로 출력되므로 부정은 하지 않는다.
따라서 옳은 것은 ②이다.

답 ②

06 1단계 **$(p \vee q) \wedge (\sim p \vee r)$의 진릿값을 구한다.**

p	q	r	$\sim p$	$p \vee q$	$\sim p \vee r$	$(p \vee q) \wedge (\sim p \vee r)$
T	T	T	F	T	T	T
T	T	F	F	T	F	F
T	F	T	F	T	T	T
T	F	F	F	T	F	F
F	T	T	T	T	T	T
F	T	F	T	T	T	T
F	F	T	T	F	T	F
F	F	F	T	F	T	F

2단계 **$(p \vee q) \wedge (\sim p \vee r) \longrightarrow (q \vee r)$의 진릿값을 구한다.**

$q \vee r$	$(p \vee q) \wedge (\sim p \vee r) \longrightarrow (q \vee r)$
T	T
T	T
T	T
F	T
T	T
T	T
T	T
F	T

답 풀이 참조

07 1단계 **논리 회로의 기호를 합성명제로 나타낸다.**
합성명제 $p \circ q = \sim(\sim p \vee q)$이다.

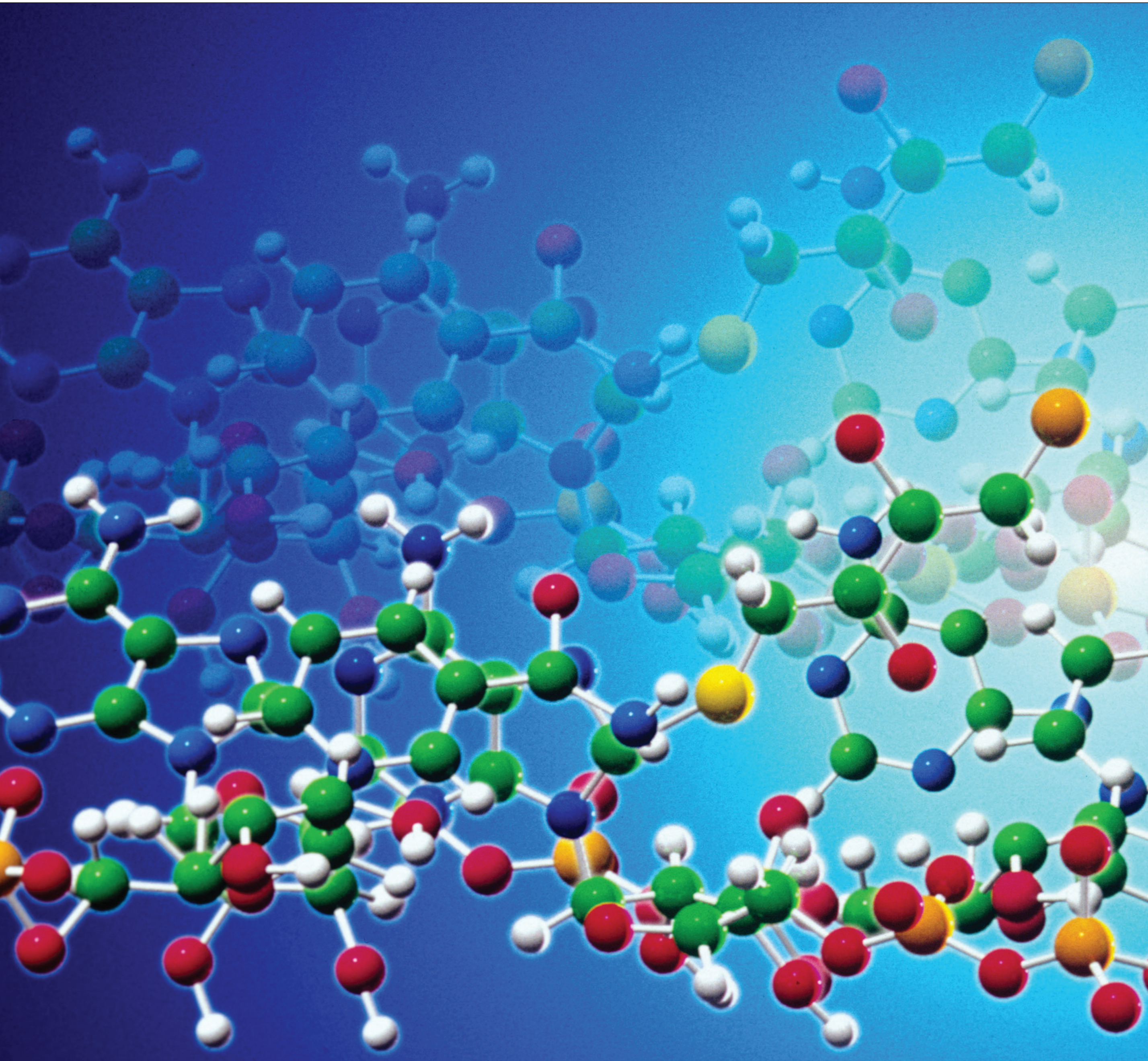
2단계 **각 명제의 진릿값을 구한다.**
명제 p의 진릿값은 거짓(F)이고, 명제 q의 진릿값은 참(T)이다.

3단계 **합성명제의 진릿값을 구한다.**
명제 $\sim p$의 진릿값은 참(T)이고 합성명제 $\sim p \vee q$의 진릿값도 참(T)이다.
따라서 합성명제 $p \circ q = \sim(\sim p \vee q)$의 진릿값은 거짓(F)이다.

답 거짓(F)

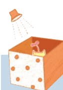
II 지수와 로그

1 지수와 로그　　2 지수함수와 로그함수



지구에서 태양까지의 거리는 1.5×10^{8} km이고, 빛의 속력은 3.0×10^{8} m/s이다. 또 전자의 질량은 $9.10955\times\frac{1}{10^{28}}$ g이며 탄소 12(^{12}C)의 원자 6.02×10^{23}개의 질량은 약 12 g이다. 이와 같이 매우 큰 수나 극히 작은 수를 표현할 때, 지수를 사용하면 편리하다.

단원의 흐름



이미 배운 내용

▶**중학교 1학년**
- 거듭제곱, 지수, 밑

▶**중학교 2학년**
- 지수법칙

▶**중학교 3학년**
- 제곱근의 뜻과 성질

이번에 배울 내용

- 지수
- 로그
- 지수함수
- 로그함수

이 단원의 학습 목표

1. 거듭제곱근의 뜻을 알고, 그 성질을 이해한다.
2. 지수가 실수까지 확장될 수 있음을 이해한다.
3. 로그의 뜻을 알고, 그 성질을 이해한다.
4. 지수함수의 뜻을 알고, 그래프와 그 성질을 이해한다.
5. 로그함수의 뜻을 알고, 그래프와 그 성질을 이해한다.

32

단원을 시작하기 전에

지수법칙 **1** a, b가 실수이고 m, n이 자연수일 때, □ 안에 알맞은 것을 써넣어라.

(1) $a^m \times a^n = a^{\square}$ (2) $(a^m)^n = a^{\square}$

방정식 **2** 다음 방정식의 해를 구하여라.

(1) $x^2=2$ (2) $x^3=8$

제곱근 **3** 다음 식을 간단히 하여라.

(1) $\sqrt{36}$ (2) $\sqrt{2}\sqrt{50}$

10의 거듭제곱 **4** 다음 수를 $a\times10^n$ 또는 $a\times\frac{1}{10^n}$ $(1\le a<10$, n은 자연수$)$의 꼴로 나타내어라.

(1) 10000 (2) 0.001

(3) 2700 (4) 0.08

정수 부분과 소수부분 **5** 다음 수를 $-2.7=-3+0.3$과 같이 (정수)$+\alpha$ $(0<\alpha<1)$의 꼴로 나타내어라.

(1) 5.3 (2) -0.4 (3) -1.2

단원을 시작하기 전에 ……………… 풀이

1 (1) $a^m\times a^n$

$=(\underbrace{\overbrace{a\times a\times\cdots\times a}^{m\text{개}})\times(\overbrace{a\times a\times\cdots\times a}^{n\text{개}}}_{(m+n)\text{개}})$

$=a^{\boxed{m+n}}$

(2) $(a^m)^n$

$=\underbrace{a^m\times a^m\times a^m\times\cdots\times a^m}_{n\text{개}}$

$=\underbrace{(\overbrace{a\times a\times\cdots\times a}^{m\text{개}})\times(\overbrace{a\times a\times\cdots\times a}^{m\text{개}})\times\cdots\times(\overbrace{a\times a\times\cdots\times a}^{m\text{개}})}_{mn\text{개}}$

$=a^{\boxed{mn}}$

2 (1) 방정식 $x^2=2$에서

$x^2-2=0$

$(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})=0$

$\therefore$ $\boldsymbol{x=\sqrt{2}}$ **또는** $\boldsymbol{x=-\sqrt{2}}$

(2) 방정식 $x^3=8$에서

$x^3-8=0$

$(x-2)(x^2+2x+4)=0$

$\therefore$ $\boldsymbol{x=2}$ **또는** $\boldsymbol{x=-1\pm\sqrt{3}i}$

3 (1) $\sqrt{36}=\sqrt{6^2}=\mathbf{6}$

(2) $\sqrt{2}\sqrt{50}=\sqrt{100}=\sqrt{10^2}=\mathbf{10}$

4 (1) $10000=\mathbf{1\times10^4}$

(2) $0.001=\mathbf{1\times\frac{1}{10^3}}$

(3) $2700=2.7\times1000$

$=\mathbf{2.7\times10^3}$

(4) $0.08=8\times\frac{1}{100}=\mathbf{8\times\frac{1}{10^2}}$

5 (1) $5.3=\mathbf{5+0.3}$

(2) $-0.4=-0.4+1-1$

$=\mathbf{-1+0.6}$

(3) $-1.2=-1-0.2+1-1$

$=\mathbf{-2+0.8}$

1 지수와 로그

이 단원을 배우면

- 거듭제곱과 거듭제곱근의 뜻을 알고, 그 성질을 이해할 수 있다.
- 지수가 유리수, 실수까지 확장될 수 있음을 이해할 수 있다.
- 로그의 뜻과 성질을 이해할 수 있다.

소단원의 학습 목표

1. 거듭제곱과 거듭제곱근을 뜻을 알고, 그 성질을 이해한다.
2. 지수가 유리수, 실수까지 확장될 수 있음을 이해한다.

여기서 배우는 용어 및 기호

거듭제곱근, $\sqrt[n]{a}$

34

1 지수와 로그

1 지수

학습 목표
- 거듭제곱과 거듭제곱근의 뜻을 알고, 그 성질을 이해한다.
- 지수가 유리수, 실수까지 확장될 수 있음을 이해한다.

다 가 서 기 / 토끼 울타리

오스트레일리아에는 세계에서 가장 긴 울타리인 토끼 울타리(Rabbit-Proof Fence)가 있다. 이것은 오스트레일리아의 북에서 남으로 뻗어 있어 토끼가 서부 오스트레일리아로 퍼지는 것을 막기 위한 것이다.

오스트레일리아에는 유럽인들이 도착하기 이전까지 토끼가 살지 않았다. 그런데 1859년 한 지주가 사냥을 하기 위하여 자신의 농장에 유럽에서 들여온 야생 토끼를 방사한 이후 그 수가 기하급수적으로 늘어났다. 수가 늘어나자 토끼들은 광범위한 지역의 농작물을 망쳐 놓았고, 결국 오스트레일리아 정부는 1837 km나 되는 토끼 울타리를 설치하게 되었다.

여기에서 기하급수적으로 늘어난다는 의미는 무엇일까?
이것은 2에서 $2^2(=2\times2)$, 4에서 $2^3(=4\times2)$, 8에서 $2^4(=8\times2)$, … 으로 증가하는 것이다. 따라서 시간이 지날수록 증가하는 속도가 점점 빨라진다.

다가서기 / 해설

1859년에 토머스 오스틴이라는 한 지주가 오스트레일리아에 사냥감으로 토끼 몇 마리를 들여오면서 그 나라의 생태계에 문제가 생기기 시작하였다.
빠른 번식 속도로 잘 알려진 토끼는 천적이 없는 오스트레일리아에서 급속도로 불어나 광범위한 지역의 농작물을 망쳐 놓았다. 목초들을 두고 양들과 경쟁을 하기 시작하였고, 관목들과 작은 나무들의 뿌리와 줄기까지 먹어 치웠다. 게다가 풀이 사라지면서 흙이 씻겨 나가고 토양이 물을 저장할 능력이 줄어들어 땅이 메말라 갔다.
1880년대 중반 대규모의 토끼 제거 운동이 벌어졌지만 별 소용이 없었다. 1890년대에는 180만 마리의 토끼가 널라버 사막을 가로질러 서부 오스트레일리아로 향했고, 새로운 대책이 시도되었다. 토끼가 퍼지는 것을 막기 위해 1901년부터 1837 km나 되는 울타리를 북부 해안에서 남부 해안까지 설치하기 시작하였고, 피해가 확산되자 울타리 중간 부분에서 또 다른 제2 울타리, 제3 울타리를 세웠다.
몇 마리의 토끼가 불과 30여 년 만에 180만 마리로 불어난 것은 기하급수적인 증가의 위력을 보여주는 예이다.

35

01 거듭제곱의 뜻과 지수법칙

탐구하기 / 유에스비(USB) 저장 장치

바이트(byte, B) 컴퓨터가 처리하는 정보의 기본 단위로, 하나의 문자를 표현하는 단위이다.

용량이 16 GB인 유에스비(USB) 저장 장치가 있다. 한글 한 자를 저장하기 위해서는 2 B가 필요할 때, 다음 물음에 답하여 보자.

(단, $1\text{ GB}=2^{10}\text{ MB}$, $1\text{ MB}=2^{10}\text{ KB}$, $1\text{ KB}=2^{10}\text{ B}$)

1. 이 저장 장치에는 몇 자의 한글을 저장할 수 있는지 구하여라.
2. 종이 한 쪽 분량에 한글 문자를 1024자까지 쓸 수 있을 때, 이 저장 장치에는 몇 쪽의 분량을 저장할 수 있는지 구하여라.

알아보기 / 거듭제곱에 대하여 알아보자.

어떤 실수 a를 n번 거듭하여 곱한 a^n을 a의 n제곱이라고 한다. 이때

$$a,\ a^2,\ a^3,\ \cdots,\ a^n,\ \cdots$$

을 통틀어 a의 거듭제곱이라 하고, a^n에서 a를 거듭제곱의 밑, n을 거듭제곱의 지수라고 한다.

a^n ← 지수, ← 밑

지수가 자연수일 때, 다음의 지수법칙이 성립한다.

지수법칙을 이용하면 거듭제곱을 포함한 복잡한 식을 간단히 할 수 있다.

a, b가 실수이고, m, n이 자연수일 때

(1) $a^m a^n = a^{m+n}$

(2) $(a^m)^n = a^{mn}$

(3) $(ab)^m = a^m b^m$

(4) $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$ (단, $b\neq 0$)

(5) $a^m \div a^n = \begin{cases} a^{m-n} & (m>n) \\ 1 & (m=n) \\ \frac{1}{a^{n-m}} & (m<n) \end{cases}$ (단, $a\neq 0$)

스스로 하기 / 익힘책 35쪽 | 익힘책 36쪽 | 익힘책 37쪽

1 다음을 간단히 하여라. (단, $a\neq 0$, $b\neq 0$)

(1) $a^5\times a^2\times a$ (2) $(a^3\times a^2)^4$ (3) $\left(\frac{b^2}{a}\right)^3\div b^5$

알아보기 / 해설

• $a^n = \underbrace{a\times a\times\cdots\times a}_{n\text{개}}$

• 다음과 같은 계산에 주의한다.

$a^3\times a^4 \neq a^{3\times 4}$

$(a^3)^4 \neq a^{3^4}$

$a^3\div a^4 \neq a^{3\div 4}$

스스로 하기 / 풀이

1 (1) $a^5\times a^2\times a = a^{5+2+1} = \boldsymbol{a^8}$

(2) $(a^3\times a^2)^4 = (a^{3+2})^4 = \boldsymbol{a^{20}}$

(3) $\left(\frac{b^2}{a}\right)^3\div b^5 = \frac{(b^2)^3}{a^3}\div b^5$

$= \frac{b^6}{a^3}\div b^5$

$= \frac{b^{6-5}}{a^3} = \boldsymbol{\frac{b}{a^3}}$

탐구하기 / 풀이

1. $16\text{ GB} = 16\times 2^{10}\text{ MB}$

$= 16\times 2^{10}\times 2^{10}\text{ KB}$

$= 16\times 2^{10}\times 2^{10}\times 2^{10}\text{ B}$

$= 2^4\times 2^{30}\text{ B}$

$= 2^{34}\text{ B}$

한글 한 자를 저장하기 위해서 2 B가 필요하므로 $\boldsymbol{2^{33}}$**자의 한글을 저장할 수 있다.**

2. 종이 한 쪽 분량에 $1024=2^{10}$자까지 쓸 수 있으므로 2^{33}자의 한글을 저장할 수 있는 저장 장치에는 $\boldsymbol{2^{23}}$**쪽의 분량을 저장할 수 있다.**

참고 | 정보의 단위

컴퓨터의 기억 장치는 모든 정보를 이진법의 수로 기억한다. 비트(bit)는 binary digit의 약칭으로 정보의 최소 단위이며, 이진법의 수 한 자리를 뜻한다. 즉, 0 또는 1의 두 가지 표현밖에 할 수 없으므로 8개 또는 9개의 bit를 묶어 기본 단위인 바이트(byte)로 표현한다. 1 바이트는 숫자, 영문자, 특수 문자 등을 모두 나타낼 수 있다.

주기억 장치의 용량 또는 정보량은 대용량이므로 보통 메가바이트(megabyte: MB), 기가바이트(gigabyte: GB) 등을 사용하여 나타낸다.

36

02 거듭제곱근

알 아 보 기 / 거듭제곱근의 뜻을 알아보자.

제곱하여 4가 되는 수, 즉 방정식 $x^2=4$를 만족하는 x를 4의 제곱근이라고 한다. 따라서 4의 제곱근은 -2, 2이다.

일반적으로 실수 a와 2 이상의 자연수 n에 대하여 n제곱하여 실수 a가 되는 수, 즉 방정식

$$x^n=a$$

를 만족하는 x를 a의 n제곱근이라고 한다.

2의 세제곱
$2^3=8$
8의 세제곱근

이때, a의 제곱근, a의 세제곱근, a의 네제곱근, … 을 통틀어 a의 **거듭제곱근**이라고 한다.

복소수의 범위에서
1의 제곱근: ± 1
1의 세제곱근:
$1,\ \frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$
1의 네제곱근: $\pm 1,\ \pm i$

복소수의 범위에서 실수 a의 n제곱근은 n개가 있다. 그러나 여기서는 a의 거듭제곱근 중에서 실수인 것만 생각하기로 한다.

| 보기 | 방정식 $x^3=-8$의 근은

$$x^3+8=0,\ (x+2)(x^2-2x+4)=0$$

$$\therefore x=-2 \text{ 또는 } x=1\pm\sqrt{3}i$$

따라서 -8의 세제곱근 중에서 실수인 것은 -2뿐이다.

실수 a의 n제곱근 중에서 실수인 것은 방정식 $x^n=a$의 실근이므로 함수 $y=x^n$의 그래프와 직선 $y=a$의 교점의 x좌표이다.

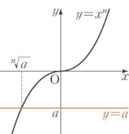
함수 $y=x^n$의 그래프를 이용하여 a의 n제곱근 중에서 실수인 것을 구하여 보자.

(i) n이 홀수일 때

임의의 실수 x에 대하여

$$(-x)^n=-x^n$$

이므로 함수 $y=x^n$의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 원점에 대하여 대칭이다.



$f(-x)=-f(x)$이면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이다.

이때, 임의의 실수 a의 n제곱근 중에서 실수인 것은 오직 하나뿐이며, 이것을 기호로

$$\sqrt[n]{a}$$

와 같이 나타낸다.

알아보기 / 해설

- 실수 a의 실수인 n제곱근은 함수 $y=x^n$의 그래프와 직선 $y=a$의 교점의 x좌표이며 다음이 성립한다.

(i) n이 홀수일 때

함수 $y=x^n$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이고, $x\geq 0$일 때는 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가한다.

따라서 곡선 $y=x^n$과 직선 $y=a$는 언제나 한 점에서 만나므로 실수 a의 실수인 n제곱근은 다음과 같다.

> $a>0$이면 $\sqrt[n]{a}$ (양수)
> $a=0$이면 0
> $a<0$이면 $\sqrt[n]{a}$ (음수)

예를 들어 2의 실수인 세제곱근은 $\sqrt[3]{2}$이고, -2의 실수인 세제곱근은 $\sqrt[3]{-2}$이다.

이때, $\sqrt[3]{2}$는 양수이고

$$\sqrt[3]{-2}=\sqrt[3]{(-1)^3\cdot 2}$$
$$=\sqrt[3]{(-1)^3}\sqrt[3]{2}=-\sqrt[3]{2}$$

는 음수이다.

(ii) n이 짝수일 때

함수 $y=x^n$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이고, $x\geq 0$일 때는 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가하므로 그래프에서 실수 a의 실수인 n제곱근은 다음과 같다.

> $a>0$이면 곡선 $y=x^n$과 직선 $y=a$는 두 점에서 만나므로 $\sqrt[n]{a}$(양수), $-\sqrt[n]{a}$(음수)이다.
> $a=0$이면 곡선 $y=x^n$과 직선 $y=a$는 원점에서 만나므로 0이다.
> $a<0$이면 곡선 $y=x^n$과 직선 $y=a$는 만나지 않으므로 없다.

예를 들어 2의 실수인 제곱근은 $\pm\sqrt{2}$이지만 -2의 실수인 제곱근은 없다.

- -125의 세제곱근은 방정식 $x^3=-125$의 근이다.

$x^3+125=0,\ (x+5)(x^2-5x+25)=0$

$\therefore x=-5$ 또는 $x=\frac{5\pm 5\sqrt{3}i}{2}$

따라서 -125의 세제곱근 중에서 실수인 것은 -5이다.

- 10000의 네제곱근은 방정식 $x^4=10000$의 근이다.

$x^4-10000=0$

$(x-10)(x+10)(x^2+10^2)=0$

$\therefore x=\pm 10$ 또는 $x=\pm 10i$

따라서 10000의 네제곱근 중에서 실수인 것은 10과 -10이다.

37

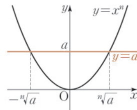
$f(-x)=f(x)$이면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이다.

(ii) n이 짝수일 때

임의의 실수 x에 대하여 $x^n \geq 0$이고

$$(-x)^n=x^n$$

이므로 함수 $y=x^n$의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 y축에 대하여 대칭이다.



이때, $a>0$이면 a의 n제곱근 중에서 실수인 것은 양수인 것과 음수인 것의 두 개가 있으며, 이것을 각각 기호로

$$\sqrt[n]{a},\ -\sqrt[n]{a}$$

와 같이 나타낸다.

또 $a=0$이면 a의 n제곱근은 0 하나뿐이고, $a<0$이면 a의 n제곱근 중에서 실수인 것은 없다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

	$a>0$	$a=0$	$a<0$
n이 홀수	$\sqrt[n]{a}$	0	$\sqrt[n]{a}$
n이 짝수	$\sqrt[n]{a},\ -\sqrt[n]{a}$	0	없다

| **참고** | (1) $a<0$일 때, n이 짝수이면 $\sqrt[n]{a}$는 허수이고, n이 홀수이면 $\sqrt[n]{a}$는 음수이다.
(2) $\sqrt[n]{a}$는 'n제곱근 a'라고 읽으며, $\sqrt[2]{a}$는 간단히 $\sqrt{a}$로 나타낸다.

| **보기** | (1) $\sqrt[3]{-125}=-5$
(2) 10000의 네제곱근은 $\sqrt[4]{10000}$과 $-\sqrt[4]{10000}$, 즉 10과 -10이다.

스스로 하기 / 익힘책 35쪽 | 익힘책 36쪽 | 익힘책 37쪽

1 다음 거듭제곱근 중 실수인 것을 구하여라.
(1) 121의 제곱근 (2) 64의 세제곱근 (3) -27의 세제곱근

2 다음 값을 구하여라.
(1) $\sqrt[3]{8}$ (2) $\sqrt[3]{-64}$ (3) $\sqrt[4]{16}$

스스로 하기 / 풀이

1 (1) 121의 제곱근은 방정식 $x^2=121$의 근이다.

$x^2-121=0$

$(x-11)(x+11)=0$

$\therefore x=11$ 또는 $x=-11$

따라서 실수인 것은 **11, −11**이다.

(2) 64의 세제곱근은 방정식 $x^3=64$의 근이다.

$x^3-64=0$

$(x-4)(x^2+4x+16)=0$

$x=4$ 또는 $x=-2\pm2\sqrt{3}i$

따라서 실수인 것은 **4**이다.

(3) -27의 세제곱근은 방정식 $x^3=-27$의 근이다.

$x^3+27=0$

$(x+3)(x^2-3x+9)=0$

$x=-3$ 또는 $x=\dfrac{3\pm3\sqrt{3}i}{2}$

따라서 실수인 것은 **−3**이다.

2 (1) $\sqrt[3]{8}=x$라고 하면 x는 방정식 $x^3=8$의 실근이므로

$x^3-8=0$

$(x-2)(x^2+2x+4)=0$

$\therefore x=2$

즉, $\sqrt[3]{8}=$**2**이다.

(2) $\sqrt[3]{-64}=x$라고 하면 x는 방정식 $x^3=-64$의 실근이므로

$x^3+64=0$

$(x+4)(x^2-4x+16)=0$

$\therefore x=-4$

즉, $\sqrt[3]{-64}=$**−4**이다.

(3) $\sqrt[4]{16}=x$라고 하면 x는 방정식 $x^4=16$의 양의 실근이므로

$x^4-16=0$

$(x-2)(x+2)(x^2+4)=0$

$\therefore x=2$

즉, $\sqrt[4]{16}=$**2**이다.

보충 학습

a의 n제곱근과 n제곱근 a의 차이

a의 n제곱근은 n제곱하여 a가 되는 수, 즉 $x^n=a$를 만족하는 x를 나타내고, n제곱근 a는 $\sqrt[n]{a}$를 나타낸다.

예를 들어 4의 제곱근은 제곱하여 4가 되는 수이므로 -2와 2이고 제곱근 4는 $\sqrt{4}$, 즉 2이다.

알아보기 / 해설

• 거듭제곱근의 성질 중 (3), (4)가 성립함을 알아보자.

(3) $\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$이므로

$$(\sqrt[n]{a})^m=\sqrt[n]{\underbrace{a\sqrt[n]{a}\cdot\cdots\cdot\sqrt[n]{a}}_{m\text{개}}}$$
$$=\sqrt[n]{\underbrace{a\cdot a\cdot\cdots\cdot a}_{m\text{개}}}$$
$$=\sqrt[n]{a^m}$$

(4) $(\sqrt[n]{a})^n=a$이고 $a^{mn}=(a^m)^n$이므로

$$(\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}})^{mn}=\{(\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}})^m\}^n$$
$$=(\sqrt[n]{a})^n$$
$$=a$$

그런데 $a>0$이므로

$\sqrt[n]{a}>0$, $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}>0$이다.

따라서 $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}$는 양수 a의 양의 mn제곱근이다.

$\therefore \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a}$

• $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a}=\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}$

• $\sqrt[np]{a^{mp}}=\sqrt[n]{a^m}$ (단, p는 양의 정수)

보충 학습

제곱근의 성질 $\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{ab}$, $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\dfrac{a}{b}}$는 다음과 같은 경우에는 성립하지 않는다.

$a<0$, $b<0$일 때: $\sqrt{a}\sqrt{b}=-\sqrt{ab}$

$a>0$, $b<0$일 때: $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=-\sqrt{\dfrac{a}{b}}$

따라서 제곱근의 성질을 일반화하여 거듭제곱근의 성질을 유도할 때에는 $a>0$, $b>0$인 경우로 제한하고 있다.

알 아 보 기 / 거듭제곱근의 여러 가지 성질에 대하여 알아보자.

임의의 양수 a에 대하여 $\sqrt[n]{a}$는 n제곱하여 a가 되는 수이므로
$(\sqrt[n]{a})^n=a$

$a>0$, $b>0$이고 n이 2 이상의 자연수일 때, 지수법칙에 의하여

$$(\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b})^n=(\sqrt[n]{a})^n(\sqrt[n]{b})^n=ab$$

이때, $a>0$, $b>0$이므로 $\sqrt[n]{a}>0$, $\sqrt[n]{b}>0$이고 $\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}>0$이다.

따라서 $\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$는 ab의 양의 n제곱근이므로

$$\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$$

같은 방법으로 자연수 m, n에 대하여 다음이 성립한다.

$\left(\dfrac{\sqrt[n]{b}}{\sqrt[n]{a}}\right)^n=\dfrac{b}{a}$에서 $\quad \dfrac{\sqrt[n]{b}}{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[n]{\dfrac{b}{a}}$

$\{(\sqrt[n]{a})^m\}^n=a^m$에서 $\quad (\sqrt[n]{a})^m=\sqrt[n]{a^m}$

$(\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}})^{mn}=a$에서 $\quad \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a}$

$\left(\dfrac{\sqrt[n]{b}}{\sqrt[n]{a}}\right)^n=\dfrac{(\sqrt[n]{b})^n}{(\sqrt[n]{a})^n}=\dfrac{b}{a}$
$\{(\sqrt[n]{a})^m\}^n=\{(\sqrt[n]{a})^n\}^m$
$=a^m$
$(\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}})^{mn}=\{(\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}})^m\}^n$
$=(\sqrt[n]{a})^n=a$

이상을 정리하면 다음과 같다.

거듭제곱근의 성질

$a>0$, $b>0$이고 m, n이 2 이상의 자연수일 때

(1) $\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$ (2) $\dfrac{\sqrt[n]{b}}{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[n]{\dfrac{b}{a}}$

(3) $(\sqrt[n]{a})^m=\sqrt[n]{a^m}$ (4) $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a}$

| 보기 | (1) $\sqrt[4]{3}\times\sqrt[4]{27}=\sqrt[4]{3\times27}=\sqrt[4]{3^4}=(\sqrt[4]{3})^4=3$

(2) $\dfrac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{24}}=\sqrt[3]{\dfrac{3}{24}}=\sqrt[3]{\dfrac{1}{8}}=\sqrt[3]{\dfrac{1}{2^3}}=\left(\sqrt[3]{\dfrac{1}{2}}\right)^3=\dfrac{1}{2}$

(3) $\sqrt[3]{\sqrt{64}}=\sqrt[6]{64}=\sqrt[6]{2^6}=(\sqrt[6]{2})^6=2$

스 스 로 하 기 / 익힘책 35쪽 | 익힘책 36쪽 | 익힘책 37쪽

3 다음을 간단히 하여라.

(1) $\sqrt[3]{2}\times\sqrt[3]{4}$ (2) $\dfrac{\sqrt[3]{40}}{\sqrt[3]{5}}$ (3) $\sqrt{\sqrt[3]{3^6}}$

(4) $\sqrt[5]{0.00032}$ (5) $\sqrt[3]{\sqrt{3^7}\times\sqrt{3^5}}$ (6) $\dfrac{\sqrt[5]{5}}{\sqrt[5]{160}}\times\sqrt[5]{243}$

스스로 하기 / 풀이

3 (1) $\sqrt[3]{2}\times\sqrt[3]{4}=\sqrt[3]{2\times4}=\sqrt[3]{2^3}=\mathbf{2}$

(2) $\dfrac{\sqrt[3]{40}}{\sqrt[3]{5}}=\sqrt[3]{\dfrac{40}{5}}=\sqrt[3]{8}=\sqrt[3]{2^3}=\mathbf{2}$

(3) $\sqrt{\sqrt[3]{3^6}}=\sqrt[6]{3^6}=\mathbf{3}$

(4) $\sqrt[5]{0.00032}=\sqrt[5]{0.2^5}=\mathbf{0.2}$

(5) $\sqrt[3]{\sqrt{3^7}\times\sqrt{3^5}}=\sqrt[3]{\sqrt{3^7\times3^5}}=\sqrt[3]{\sqrt{3^{12}}}$
$=\sqrt[6]{3^{12}}=(\sqrt[6]{3^2})^6=\mathbf{9}$

(6) $\dfrac{\sqrt[5]{5}}{\sqrt[5]{160}}\times\sqrt[5]{243}=\sqrt[5]{\dfrac{5}{160}\times243}=\sqrt[5]{\dfrac{243}{32}}$
$=\sqrt[5]{\dfrac{3^5}{2^5}}=\sqrt[5]{\left(\dfrac{3}{2}\right)^5}=\mathbf{\dfrac{3}{2}}$

03 정수 지수의 정의

탐 구 하 기 / 나눗셈과 지수

다음 표는 자연수 n에 대하여 $10^5 \div 10^n$의 값을 나타낸 것이다. 지수의 규칙성을 생각하여 □ 안의 값을 추측하여 보자.

n	1	2	3	4	5	6	7	8
$10^5 \div 10^n$	10^4	10^3	10^2	10^1	$10^{□}$	$10^{□}$	$10^{□}$	$10^{□}$

알 아 보 기 / 지수가 0 또는 음의 정수인 경우에 대하여 알아보자.

지수를 정수의 범위까지 확장하여 보자.

$a \neq 0$일 때, $m=0$ 또는 $m=-n\,(n>0)$인 경우에도 지수법칙

$$a^m a^n = a^{m+n}$$

이 성립한다고 하면

$$a^0 \cdot a^n = a^{0+n} = a^n \qquad \therefore a^0 = \frac{a^n}{a^n} = 1$$

$$a^{-n} \cdot a^n = a^{-n+n} = a^0 = 1 \qquad \therefore a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

따라서 지수가 0 또는 음의 정수인 경우 다음과 같이 정의한다.

0^0은 정의하지 않는다.

a^0, a^{-n}의 정의

$a \neq 0$이고, n이 양의 정수일 때

(1) $a^0 = 1$ (2) $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

스 스 로 하 기 / 익힘책 35쪽 | 익힘책 36쪽 | 익힘책 37쪽

1 다음 값을 구하여라.

(1) $(-17)^0$ (2) $(\sqrt{19})^0$ (3) 3^{-2} (4) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$

탐구하기 / 풀이

자연수 n에 대하여 10^n은 10을 n번 거듭제곱한 것이다. 10^0 또는 10^{-3}과 같이 n이 0이거나 음의 정수일 때, 10^n은 어떻게 정의될 수 있는지 다음 표를 통하여 알아보자.

n	1	2	3	4	5	6	7	8
$10^5 \div 10^n$	10^4	10^3	10^2	10^1	10^0	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}

위의 표와 같이 $10^5 \div 10^n$에서 n의 값이 1씩 커짐에 따라 지수가 1씩 작아짐을 이용하여 지수를 추측하면 순서대로 **0, −1, −2, −3**이다.

스스로 하기 / 풀이

1 (1) $(-17)^0 = \mathbf{1}$

(2) $(\sqrt{19})^0 = \mathbf{1}$

(3) $3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \mathbf{\frac{1}{9}}$

(4) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^3} = \frac{1}{\frac{1}{8}} = \mathbf{8}$

보충 학습

$a \neq 0$이고, m, n이 양의 정수일 때

(ⅰ) $m>n$이면 $a^m \div a^n = a^{m-n}$

(ⅱ) $m=n$이면

$a^m \div a^n = 1$이고 $a^{m-n} = a^0 = 1$이므로

$a^m \div a^n = a^{m-n}$

(ⅲ) $m<n$이면

$$a^m \div a^n = \frac{1}{a^{n-m}} = a^{-(n-m)} = a^{m-n}$$

이므로 $a^m \div a^n = a^{m-n}$

따라서 (ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의하여 양의 정수 m, n의 대소에 관계없이 $a^m \div a^n = a^{m-n}$이 성립한다.

참고 | 생활 속의 지수

자연 현상이나 생활 주변에는 매우 크거나 매우 작은 양을 수로 표현하는 것들이 있는데, 이 값들을 간단하게 표현하기 위해 지수로 나타내면 편리하다.

1. 지구의 질량은 약 5.98×10^{24} kg이다.
2. 지구 상에 있는 육지의 전체 넓이는 1.4894×10^8 km^{2}이다.
3. 대장균의 DNA 분자량은 약 2.56×10^{-9}이고, 약 3.8×10^6개의 염기쌍을 포함한다.
4. 적혈구의 지름의 길이는 7.4×10^{-6} m이다.

04 유리수 지수의 정의

알 아 보 기 / 지수가 유리수인 경우에 대하여 알아보자.

지수를 유리수의 범위까지 확장하여 보자.

$a>0$일 때, 유리수 p, q에 대하여 지수법칙 $(a^p)^q=a^{pq}$이 성립한다고 하면 유리수 $\frac{m}{n}$ (m, n은 정수, $n\geq 2$)에 대하여

$$(a^{\frac{m}{n}})^n=a^{\frac{m}{n}\cdot n}=a^m$$

이때, $a>0$이므로 $a^{\frac{m}{n}}>0$이다.

따라서 $a^{\frac{m}{n}}$은 a^m의 양의 n제곱근이므로

$$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$$

이다.

예를 들어 $(2^{\frac{1}{3}})^3=2^{\frac{1}{3}\cdot 3}=2^1=2$이므로 $2^{\frac{1}{3}}$은 2의 세제곱근, 즉 $2^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{2}$이다.

이상에서 지수가 유리수인 경우는 다음과 같이 정의한다.

$a^{\frac{1}{n}}$은 n번 거듭제곱하여 a가 되는 수를 뜻한다. 즉 $(a^{\frac{1}{n}})^n=a$

유리수 지수의 정의

$a>0$이고 m, n이 정수이며 $n\geq 2$일 때

(1) $a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$ (2) $a^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{a}$

| 보기 | (1) $\sqrt[3]{2^5}=2^{\frac{5}{3}}$ (2) $10^{-\frac{3}{2}}=\sqrt{10^{-3}}$

스 스 로 하 기 / 익힘책 35쪽 | 익힘책 36쪽 | 익힘책 37쪽

1 다음을 지수를 사용하여 나타내어라.

(1) $\sqrt[5]{5^2}$ (2) $\sqrt{0.00001}$ (3) $\sqrt[4]{2^{-3}}$

2 다음을 근호를 사용하여 나타내어라.

(1) $3^{\frac{1}{3}}$ (2) $\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{3}{4}}$ (3) $7^{-\frac{3}{2}}$

알아보기 / 해설

• 거듭제곱근의 정의

$\sqrt[n]{A}=B \Longleftrightarrow A=B^n$

을 이용하여

$(a^{\frac{m}{n}})^n=a^m \Longleftrightarrow a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$

임을 이해한다.

• $\sqrt[3]{a^2}=\sqrt[6]{a^4}$ 이므로 $a^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{4}{6}}$이 성립하는 것과 같이 유리수 지수는 그 표현법이 여러 가지일지라도 그 값은 같다.

• 유리수의 집합은 보통

$Q=\left\{\frac{m}{n}\middle|\, m,\ n\text{은 정수},\ n\neq 0\right\}$

으로 나타내지만 다음과 같이 나타내어도 된다.

$Q=\left\{\frac{m}{n}\middle|\, n\text{은 자연수},\ m\text{은 정수}\right\}$

따라서 음의 유리수 지수에서는 지수의 분모를 자연수로 하여 다음과 같이 나타낸다.

$a^{-\frac{3}{4}}=a^{\frac{-3}{4}}=\sqrt[4]{a^{-3}}$

• $a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$은 $a>0$이고 m, n이 정수이며 $n\geq 2$인 경우에만 정의한다.

예를 들어 다음과 같이 정의되지는 않는다.

$(-4)^{\frac{3}{2}}=\sqrt{(-4)^3}=\sqrt{-64}$

$a^{-\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{-3}}=\sqrt[-3]{a^2}$

스스로 하기 / 풀이

1 (1) $\sqrt[5]{5^2}=\mathbf{5^{\frac{2}{5}}}$

(2) $\sqrt{0.00001}=\sqrt{0.1^5}=\mathbf{0.1^{\frac{5}{2}}}$

또는 $0.1=10^{-1}$이므로 $\mathbf{10^{-\frac{5}{2}}}$

(3) $\sqrt[4]{2^{-3}}=\mathbf{2^{-\frac{3}{4}}}$

2 (1) $3^{\frac{1}{3}}=\mathbf{\sqrt[3]{3}}$

(2) $\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{3}{4}}=5^{-\frac{3}{4}}=\mathbf{\sqrt[4]{5^{-3}}}$

(3) $7^{-\frac{3}{2}}=\mathbf{\frac{1}{\sqrt{7^3}}}$ 또는 $7^{-\frac{3}{2}}=\mathbf{\sqrt{7^{-3}}}$

보충 학습

지수가 유리수일 때의 지수법칙

일반적으로 지수가 유리수일 때에도 지수가 정수일 때와 마찬가지로 다음의 지수법칙이 성립한다.

$a>0$, $b>0$이고 p, q가 유리수일 때

(1) $a^pa^q=a^{p+q}$ (2) $(a^p)^q=a^{pq}$

(3) $(ab)^p=a^pb^p$ (4) $a^p\div a^q=a^{p-q}$

05 실수 지수의 정의

알아보기 / 지수가 실수인 경우에 대하여 알아보자.

지수를 실수의 범위까지 확장하기 위하여 지수가 무리수인 경우에는 어떤 의미를 가지는지 $2^{\sqrt{2}}$을 예로 들어 생각하여 보자.

무리수 $\sqrt{2}=1.41421356\cdots$에 한없이 가까워지는 유리수

$$1.4,\ 1.41,\ 1.414,\ 1.4142,\ 1.41421,\ \cdots$$

에 대하여 이들을 지수로 가지는 수

$$2^{1.4},\ 2^{1.41},\ 2^{1.414},\ 2^{1.4142},\ 2^{1.41421},\ \cdots$$

의 값을 공학용 계산기를 사용하여 계산하면 오른쪽과 같다. 이 수들은 어떤 일정한 수에 한없이 가까워짐이 알려져 있고, 그 일정한 수를 $2^{\sqrt{2}}$으로 정의한다.

$2^{1.4}$ → 2.6390158215457885187480039424593

$2^{1.41}$ → 2.6573716281930231619683032251025

$2^{1.414}$ → 2.6647496501840435422805296598573

$2^{1.4142}$ → 2.665119088532351469156580565556

$2^{1.41421}$ → 2.6651375617941955689156340704664

⋮

공학용 계산기에서 다음 순서대로 입력하면 $2^{\sqrt{2}}$의 값을 계산할 수 있다.

계산기의 종류에 따라 버튼 누르는 순서가 다를 수도 있다.

$2^{\sqrt{2}}$ 2.665144143

[2] [x^y] [( ] [2] [x^y] [.] [5] [ )] [=]

2.6651441426902251886502972498731

이와 같이 $a>0$일 때, 임의의 실수 x에 대하여 a^x을 정의할 수 있다.

일반적으로 지수의 범위를 실수까지 확장하여도 다음과 같은 지수법칙이 성립한다.

> a, b가 양의 실수이고, x, y가 실수일 때
>
> (1) $a^x a^y = a^{x+y}$ (2) $(a^x)^y = a^{xy}$
>
> (3) $(ab)^x = a^x b^x$ (4) $a^x \div a^y = a^{x-y}$

스스로 하기 / 익힘책 35쪽 | 익힘책 36쪽 | 익힘책 37쪽

1 공학용 계산기를 사용하여 다음을 계산하여라.

(1) $3^{\sqrt{2}}$ (2) $(3^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}}$ (3) 3^{π} (4) $(\sqrt{2})^{\sqrt{2}}$

알아보기 / 해설

• 무리수 $\sqrt{2}$는 순환하지 않는 무한소수이다. $\sqrt{2}$에 가까워지는 유한소수들을 생각해 보고, 이들을 지수로 가지는 수들이 어떤 일정한 수에 가까워짐을 공학용 계산기를 이용하여 확인해 본다.

• 실수는 수직선 위의 점과 일대일 대응이므로 모든 실수 x에 대하여 $a^x(a>0)$의 값이 하나로 결정된다.

스스로 하기 / 풀이

1 (1) **4.728804388**

(2) **9**

(3) **31.5442807**

(4) **1.632526919**

보충 학습

1. a^n의 지수에 따른 밑의 조건

a^n에서 지수 n에 따라 지수법칙이 성립하는 밑 a의 조건은 다음과 같다.

지수 n	자연수	정수	유리수	실수
밑 a	a는 실수	$a\neq0$	$a>0$	$a>0$

2. $x>0$, $y>0$이고 n이 자연수일 때

$x^n<y^n \Rightarrow x<y$

$x<y \Rightarrow x^{\frac{1}{n}}<y^{\frac{1}{n}}$

$a>1$일 때, 실수 p, q에 대하여

$p<q \Rightarrow a^p<a^q$

참고 | 거듭제곱 기호의 역사

거듭제곱 x, x^2, x^3을 디오판토스, 비에타, 해리엇, 데카르트는 다음과 같이 나타내었다.

현대 기호	x	x^2	x^3
디오판토스	ξ	Δ	k'
비에타	A	A quadratum	A qubum
해리엇	A	AA	AAA
데카르트	x	xx	x^3

소단원의 학습 목표

1. 로그의 뜻을 알고, 그 성질을 이해한다.
2. 밑의 변환 공식에 의하여 여러 가지 로그 식의 계산을 할 수 있다.
3. 상용로그의 뜻을 알고, 지표와 가수의 성질을 이해한다.

여기서 배우는 용어 및 기호

$\log_a N$, 밑, 로그, 진수, 상용로그, $\log N$, 지표, 가수

42

1 지수와 로그

2 로그

학습 목표
- 로그의 뜻을 알고, 그 성질을 이해한다.
- 상용로그의 뜻을 알고, 지표와 가수의 성질을 이해한다.

다가서기 / 소리의 강도를 나타내는 단위, 데시벨

데시벨(dB)은 소리의 강도를 나타내는 단위로, 귀를 통해 감각적으로 들리는 소리의 상대적인 크기를 의미한다.

일상생활에서 접하게 되는 소리 중 가정에서의 평균 생활 소음은 약 40 dB, 일상 대화는 약 60 dB, 집에서 감상하는 음악은 약 85 dB, 소리가 큰 록 밴드의 음악은 약 110 dB이고, 제트 기관의 소음은 약 150 dB이라고 한다. 120∼140 dB 정도의 소리는 사람이 듣기에 고통스러운 정도이며, 80 dB 이상의 소음을 오랜 기간 계속 들으면 청각 장애가 올 수도 있다.

데시벨에서의 크기의 개념은 일반 수에서의 크기의 개념과 많이 다르다. 즉, 20 dB의 소리는 10 dB의 소리보다 2배가 아니라 10배 강한 소리이고, 0 dB의 소리보다는 10배의 10배, 즉 100배 강한 소리이다.

같은 원리로 100 dB의 소리는 0 dB의 소리보다 무려 100억 배나 큰 소리가 된다.

이와 같이 데시벨과 일반 수의 크기의 개념이 다른 것은 데시벨을 구하는 공식이 기하급수적으로 증가하는 것을 산술급수적으로 증가하는 것으로 바꾸어 주기 때문이다.

10~20 dB

40~60 dB

70 dB

80 dB

110 dB

140 dB

150 dB

다가서기 / 해설

소리의 세기는 오실로스코프와 같은 기구를 이용해서 객관적으로 측정이 가능하다. 반면 소리의 감각적인 크기는 귀를 통해 뇌에서 느끼는 생리적인 감각이므로 사람마다 다르게 받아들인다. 또한 사람의 청각은 소리의 주파수에도 영향을 받으므로 소리의 감각적인 크기를 객관적으로 기록하는 것은 복잡하다. 따라서 기준음을 잡고 그에 비해 얼마나 더 큰가를 소리의 크기로 정한다.

정상적인 귀로 들을 수 있는 가장 작은 소리의 크기를 0 dB이라 하고, 0 dB을 기준으로 10 dB씩 증가하는 경우 소리의 세기는 10배씩 강해진다. 20 dB의 소리는 0 dB의 소리보다 100배 강하고, 60 dB의 소리는 40 dB의 소리보다 100배 강하다.

참고 | 데시벨과 청각

큰 소음에 노출되어 내이의 손상이 발생한 것을 소음성 난청이라고 말한다. 일상적인 대화에서 나오는 소리의 강도는 40 dB∼60 dB로 75 dB 이하의 소리는 난청을 유발하지 않는다. 그러나 소리의 강도가 커져 85 dB 이상의 소음에 장기간 노출될 경우 청각에 이상이 생길 수 있다.

이어폰을 꼈을 때 고막과 이어폰 사이의 공간이 적어지기 때문에 높은 음압이 생긴다. MP3나 휴대전화, CD플레이어를 이어폰으로 들을 경우 소리의 강도는 100 dB∼115 dB이다. 이 때문에 MP3 같은 전자 제품에 이어폰을 연결해 습관적으로 들을 경우 치명적인 청각 손상이 발생할 수 있다.

43

01 로그의 뜻

탐구하기 / 지수 찾기

다음 표는 두 실수 a, b에 대하여 $a=2^b$을 만족하는 값들을 나타낸 것이다. 표를 완성하여 보자.

a	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	16
b	-2		0	1			

알아보기 / 로그의 뜻을 알아보자.

거듭제곱 $10^2=100$, $10^3=1000$, $10^4=10000$, $\cdots$에서

$$100\text{을 }2\text{에, }1000\text{을 }3\text{에, }10000\text{을 }4\text{에, }\cdots$$

각각 대응시킬 수 있다. 이와 같이 $N=10^x$을 만족하는 양수 N을 x에 대응시키는 것이 가능하다.

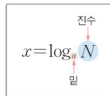
일반적으로 $a>0$, $a\neq1$일 때, 양수 N에 대하여 $a^x=N$을 만족하는 실수 x는 오직 하나 존재한다.

이때, x를

$$x=\log_a N$$

과 같이 나타내고, a를 **밑**으로 하는 N의 **로그**라고 한다. 또 N을 $\log_a N$의 **진수**라고 한다.

log는 logarithm의 약자이다.



이상을 정리하면 다음과 같다.

로그의 정의

$a>0$, $a\neq1$이고 $N>0$일 때

$$a^x=N \iff x=\log_a N$$

| 보기 | (1) $2^3=8 \iff 3=\log_2 8$

(2) $10^{-3}=\frac{1}{1000} \iff -3=\log_{10}\frac{1}{1000}$

알아보기 / 해설

• 밑 a의 조건: $a>0$, $a\neq1$

$a=1$일 때, $\log_1 3=x$를 $a^x=b$의 꼴로 나타내면 $1^x=3$이지만 x가 어떤 값을 갖더라도 1을 거듭제곱하여 3이 될 수 없다. 즉, $1^x=3$을 만족하는 실수 x는 존재하지 않는다. 또한 $a\leq0$일 때, $\log_0 3=x$에서 $0^x=3$을 만족하는 실수 x와 $\log_{-2}3=x$에서 $(-2)^x=3$을 만족하는 실수 x도 존재하지 않는다.

• 진수 b의 조건: $b>0$

$b=0$일 때, $\log_2 0=x$에서 $2^x=0$을 만족하는 실수 x는 존재하지 않는다.

또한 $b<0$일 때, $\log_2(-4)=x$에서 $2^x=-4$를 만족하는 실수 x도 존재하지 않는다. 따라서 로그의 진수는 항상 양수이어야 한다.

탐구하기 / 풀이

$\frac{1}{2}$, 4, 8, 16을 2의 거듭제곱으로 각각 표현하여 지수를 살펴본다.

$\frac{1}{2}=2^{-1}=2^b$에서 $b=-1$

$4=2^2=2^b$에서 $b=2$

$8=2^3=2^b$에서 $b=3$

$16=2^4=2^b$에서 $b=4$

따라서 표를 완성하면 다음과 같다.

a	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	16
b	-2	$\mathbf{-1}$	0	1	**2**	**3**	**4**

참고 | 로그의 등장

17세기 이후에 상업의 발달, 활발한 천체 연구 등으로 큰 수들의 복잡한 계산이 불가피하게 되었다. 당시에는 컴퓨터와 같은 공학적인 도구가 없었으므로 일일이 계산할 수밖에 없었고, 이것은 시간이 오래 걸려서 좀 더 빠르게 계산할 수 있는 방법이 필요하게 되었다. 이런 과정에서 탄생한 것이 네이피어(Napier, J. ; 1550~1617)가 창안한 로그이다. 로그를 이용하면 곱셈을 덧셈으로, 나눗셈을 뺄셈으로 바꿔 주기 때문에 큰 수를 계산할 때 편리하다. 로그가 발명된 당시 "로그의 발명으로 천문학자의 수명이 두 배로 연장되었다."는 말이 나올 정도로 천문학 계산에서 로그는 큰 비중을 차지하였다.

스스로 하기 / 풀이

44

함 께 하 기 / 익힘책 40쪽 | 익힘책 42쪽 | 익힘책 43쪽

1 다음 값을 구하여라.

(1) $\log_3 27$ (2) $\log_4 32$

풀이

(1) $x=\log_3 27$로 놓으면 로그의 정의에 의하여

$3^x=27$

한편 $27=3^3$이므로 $3^x=3^3$

$\therefore x=3$

따라서 $\log_3 27=\mathbf{3}$이다.

(2) $x=\log_4 32$로 놓으면 로그의 정의에 의하여

$4^x=32$

한편 $4^x=(2^2)^x=2^{2x}$이고 $32=2^5$이므로

$2^{2x}=2^5$에서 $2x=5$

$\therefore x=\frac{5}{2}$

따라서 $\log_4 32=\mathbf{\frac{5}{2}}$이다.

네이피어(Napier, J. ; 1550~1617)
영국의 수학자로 로그를 발명하고, 로그표를 만들었다.

스 스 로 하 기 / 익힘책 40쪽 | 익힘책 42쪽 | 익힘책 43쪽

1 다음 등식을 로그를 사용하여 나타내어라.

(1) $2^5=32$ (2) $3^0=1$ (3) $8^{\frac{1}{3}}=2$

2 다음 등식을 $a^x=b$의 꼴로 나타내어라.

(1) $\log_2 16=4$ (2) $\log_3 \frac{1}{3}=-1$ (3) $\log_5 \sqrt{5}=\frac{1}{2}$

3 다음 값을 구하여라.

(1) $\log_5 125$ (2) $\log_2 \frac{1}{16}$ (3) $\log_{\sqrt{2}} 8$

(4) $\log_{\frac{1}{3}} 81$ (5) $\log_{10} 0.01$ (6) $\log_{0.1} 1000$

---

1 로그의 정의에 의하여

(1) $2^5=32 \Longleftrightarrow \mathbf{5=\log_2 32}$

(2) $3^0=1 \Longleftrightarrow \mathbf{0=\log_3 1}$

(3) $8^{\frac{1}{3}}=2 \Longleftrightarrow \mathbf{\frac{1}{3}=\log_8 2}$

2 로그의 정의에 의하여

(1) $\log_2 16=4 \Longleftrightarrow \mathbf{2^4=16}$

(2) $\log_3 \frac{1}{3}=-1 \Longleftrightarrow \mathbf{3^{-1}=\frac{1}{3}}$

(3) $\log_5 \sqrt{5}=\frac{1}{2} \Longleftrightarrow \mathbf{5^{\frac{1}{2}}=\sqrt{5}}$

3 (1) $x=\log_5 125$로 놓으면 로그의 정의에 의하여 $5^x=125$

한편 $125=5^3$이므로 $5^x=5^3$

$\therefore x=3$

따라서 $\log_5 125=\mathbf{3}$이다.

(2) $x=\log_2 \frac{1}{16}$로 놓으면 로그의 정의에 의하여 $2^x=\frac{1}{16}$

한편 $\frac{1}{16}=\frac{1}{2^4}=2^{-4}$이므로 $2^x=2^{-4}$

$\therefore x=-4$

따라서 $\log_2 \frac{1}{16}=\mathbf{-4}$이다.

(3) $x=\log_{\sqrt{2}} 8$로 놓으면 로그의 정의에 의하여

$(\sqrt{2})^x=8$

한편 $(\sqrt{2})^x=(2^{\frac{1}{2}})^x=2^{\frac{x}{2}}$이고 $8=2^3$이므로

$2^{\frac{x}{2}}=2^3$ $\therefore x=6$

따라서 $\log_{\sqrt{2}} 8=\mathbf{6}$이다.

(4) $x=\log_{\frac{1}{3}} 81$로 놓으면 로그의 정의에 의하여

$\left(\frac{1}{3}\right)^x=81$

한편 $81=\left(\frac{1}{3}\right)^{-4}$이므로 $\left(\frac{1}{3}\right)^x=\left(\frac{1}{3}\right)^{-4}$

$\therefore x=-4$

따라서 $\log_{\frac{1}{3}} 81=\mathbf{-4}$이다.

(5) $x=\log_{10} 0.01$로 놓으면 로그의 정의에 의하여 $10^x=0.01$

한편 $0.01=\frac{1}{100}=\frac{1}{10^2}=10^{-2}$이므로

$10^x=10^{-2}$ $\therefore x=-2$

따라서 $\log_{10} 0.01=\mathbf{-2}$이다.

(6) $x=\log_{0.1} 1000$으로 놓으면 로그의 정의에 의하여 $0.1^x=1000$

한편 $0.1^x=10^{-x}$이고 $1000=10^3$이므로

$10^{-x}=10^3$ $\therefore x=-3$

따라서 $\log_{0.1} 1000=\mathbf{-3}$이다.

45

02 로그의 성질

탐구하기 / 로그의 계산

등식 $2^a=16$, $2^b=64$, $2^c=1024$를 만족하는 세 수 a, b, c에 대하여 다음 물음에 답하여 보자.

1. 세 수 a, b, c를 각각 2를 밑으로 하는 로그로 나타내어라.
2. $2^a\times2^b=16\times64=1024=2^c$임을 이용하여 다음 □ 안에 b 또는 c를 알맞게 써넣어라.

$$a+\square=\square$$

알아보기 / 로그의 성질을 알아보자.

로그의 정의와 지수법칙을 이용하여 로그의 성질을 알아보자.

$a>0$, $a\neq1$일 때, $a^0=1$, $a^1=a$이므로

$$\log_a 1=0,\ \log_a a=1$$

이다.

또 $x>0$, $y>0$일 때, $\log_a x=p$, $\log_a y=q$라고 하면 로그의 정의에 의하여

$$x=a^p,\ y=a^q$$

한편 지수법칙에 의하여 $xy=a^pa^q=a^{p+q}$이므로

$$p+q=\log_a xy$$

이때, $p=\log_a x$, $q=\log_a y$이므로 다음을 알 수 있다.

$$\log_a x+\log_a y=\log_a xy$$

이와 같은 방법으로 다음과 같은 로그의 성질이 성립함을 알 수 있다.

오일러(Euler, L. : 1707~1783)
스위스의 수학자로 지수법칙에서 로그의 성질을 유도하는 방법을 발견하였다.

로그의 성질

$a>0$, $a\neq1$, $x>0$, $y>0$이고 k가 임의의 실수일 때

(1) $\log_a 1=0$, $\log_a a=1$ (2) $\log_a xy=\log_a x+\log_a y$

(3) $\log_a \frac{x}{y}=\log_a x-\log_a y$ (4) $\log_a x^k=k\log_a x$

탐구하기 / 풀이

1. $2^a=16$을 2를 밑으로 하는 로그로 나타내면

$a=\log_2 16$

$2^b=64$를 2를 밑으로 하는 로그로 나타내면

$b=\log_2 64$

$2^c=1024$를 2를 밑으로 하는 로그로 나타내면

$c=\log_2 1024$

2. 지수법칙에 의하여 $2^a\times2^b=2^{a+b}$이므로

$2^{a+b}=1024$에서 $a+b=\log_2 1024$

$2^c=1024$에서 $c=\log_2 1024$

임을 알 수 있다.

따라서 $a+\boxed{b}=\boxed{c}$이다.

알아보기 / 해설

- 두 수의 곱셈과 나눗셈이 각각 지수의 덧셈과 뺄셈으로 표현되고, 로그의 덧셈과 뺄셈으로 나타난다. 이를테면

$2^2\times2^3=2^{2+3}$

$2^2\div2^3=2^{2-3}$

$\log_2(3\times5)=\log_2 3+\log_2 5$

$\log_2(3\div5)=\log_2 3-\log_2 5$

- 로그의 정의는 지수를 이용하므로 로그의 성질은 지수법칙에서 유도된다.

지수법칙(성질)	로그의 성질
$a^0=1$	$\log_a 1=0$
$a^1=a$	$\log_a a=1$
$a^p\cdot a^q=a^{p+q}$	$\log_a xy=\log_a x+\log_a y$
$a^p\div a^q=a^{p-q}$	$\log_a \frac{x}{y}=\log_a x-\log_a y$
$(a^p)^k=a^{kp}$	$\log_a x^k=k\log_a x$

보충 학습

로그의 정의와 로그의 성질을 정확히 알아 두고 계산 과정에서 다음과 같이 혼동하지 않도록 주의한다.

(1) $\log_1 1\neq1$, $\log_1 1\neq0$

밑이 1인 로그는 정의되지 않는다.

(2) $\log_a(x+y)\neq\log_a x+\log_a y$

$\log_a x\log_a y\neq\log_a x+\log_a y$

(3) $\log_a(x-y)\neq\log_a x-\log_a y$

$\frac{\log_a x}{\log_a y}\neq\log_a x-\log_a y$

(4) $(\log_a x)^k\neq k\log_a x$

스스로 하기 / 풀이

1 (1) $\log_{10} 9 = \log_{10} 3^2$

$= 2\log_{10} 3$

$= \mathbf{2b}$

(2) $\log_{10} 5 = \log_{10} \dfrac{10}{2}$

$= \log_{10} 10 - \log_{10} 2$

$= 1 - \log_{10} 2$

$= \mathbf{1 - a}$

(3) $\log_{10} 12 = \log_{10}(2^2 \times 3)$

$= 2\log_{10} 2 + \log_{10} 3$

$= \mathbf{2a + b}$

2 (1) $2\log_3 \sqrt{27} + \log_3 9$

$= 2\log_3 3^{\frac{3}{2}} + \log_3 3^2$

$= 2 \times \dfrac{3}{2}\log_3 3 + 2\log_3 3$

$= 5\log_3 3 = \mathbf{5}$

(2) $\log_2 18 - 4\log_2 \sqrt{6}$

$= \log_2 18 - \log_2 (\sqrt{6})^4$

$= \log_2 \dfrac{18}{(\sqrt{6})^4}$

$= \log_2 \dfrac{18}{36}$

$= \log_2 \dfrac{1}{2}$

$= \log_2 2^{-1}$

$= -\log_2 2 = \mathbf{-1}$

46

함께 하기 / 익힘책 40쪽 | 익힘책 42쪽 | 익힘책 43쪽

1 $\log_2 3 = a$라고 할 때, 다음을 a로 나타내어라.

(1) $\log_2 12$ (2) $\log_2 \sqrt{24}$

풀이

(1) $\log_2 12 = \log_2(2^2 \times 3) = 2\log_2 2 + \log_2 3 = \mathbf{2 + a}$

(2) $\log_2 \sqrt{24} = \log_2 24^{\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2}\log_2(2^3 \times 3)$

$= \dfrac{1}{2}(\log_2 2^3 + \log_2 3) = \dfrac{1}{2}(3 + \log_2 3)$

$= \mathbf{\dfrac{3}{2} + \dfrac{a}{2}}$

$\log_a xy = \log_a x + \log_a y$

2 $3\log_3 \sqrt{18} - \dfrac{1}{2}\log_3 2$를 간단히 하여라.

풀이

$3\log_3 \sqrt{18} - \dfrac{1}{2}\log_3 2 = 3\log_3 18^{\frac{1}{2}} - \dfrac{1}{2}\log_3 2$

$= \dfrac{3}{2}\log_3 18 - \dfrac{1}{2}\log_3 2$

$= \dfrac{3}{2}\log_3(2 \times 3^2) - \dfrac{1}{2}\log_3 2$

$= \dfrac{3}{2}(\log_3 2 + \log_3 3^2) - \dfrac{1}{2}\log_3 2$

$= \dfrac{3}{2}\log_3 2 + \dfrac{3}{2} \times 2\log_3 3 - \dfrac{1}{2}\log_3 2$

$= \mathbf{3 + \log_3 2}$

스스로 하기 / 익힘책 40쪽 | 익힘책 42쪽 | 익힘책 43쪽

1 $\log_{10} 2 = a$, $\log_{10} 3 = b$라고 할 때, 다음을 a, b로 나타내어라.

(1) $\log_{10} 9$ (2) $\log_{10} 5$ (3) $\log_{10} 12$

2 다음을 간단히 하여라.

(1) $2\log_3 \sqrt{27} + \log_3 9$ (2) $\log_2 18 - 4\log_2 \sqrt{6}$

보충 학습

로그의 성질 (3), (4)의 증명

(3) $\log_a \dfrac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$

$a > 0$, $a \neq 1$, $x > 0$, $y > 0$일 때, $\log_a x = p$, $\log_a y = q$라고 하면 로그의 정의에 의하여

$x = a^p$, $y = a^q$

한편 $\dfrac{x}{y} = \dfrac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$이므로

$p - q = \log_a \dfrac{x}{y}$

이때, $p = \log_a x$, $q = \log_a y$이므로

$\log_a \dfrac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$

(4) $\log_a x^k = k\log_a x$

$a > 0$, $a \neq 1$, $x > 0$일 때, $\log_a x = p$라고 하면 로그의 정의에 의하여

$x = a^p$

한편 임의의 실수 k에 대하여 $x^k = (a^p)^k = a^{pk}$이므로

$pk = \log_a x^k$

이때, $p = \log_a x$이므로

$\log_a x^k = k\log_a x$

47

03 로그의 밑의 변환

탐구하기 / $\log_3 5$와 $\dfrac{\log_{10} 5}{\log_{10} 3}$의 관계

다음 순서에 따라 $\log_3 5$와 $\dfrac{\log_{10} 5}{\log_{10} 3}$의 관계를 알아보자.

1. 등식 $3^x=5$를 만족하는 수 x를 3을 밑으로 하는 로그로 나타내어라.
2. 다음은 등식 $3^x=5$의 양변에 10을 밑으로 하는 로그를 취한 후, 그 식을 x에 대하여 푼 과정을 나타낸 것이다. □ 안에 알맞은 수를 써넣어라.

$$\log_{10} 3^x=\log_{10} 5 \iff x\log_{10} 3=\log_{10} 5 \iff x=\frac{\square}{\square}$$

알아보기 / 밑을 변환하는 방법에 대하여 알아보자.

$a>0$, $a\neq1$, $b>0$일 때, $\log_a b$를 로그의 정의를 이용하여 10을 밑으로 하는 로그로 바꾸어 보자.

$x=\log_a b$라고 하면 로그의 정의로부터 $\quad a^x=b$

양변에 10을 밑으로 하는 로그를 취하면 $\quad \log_{10} a^x=\log_{10} b$

즉, $x\log_{10} a=\log_{10} b$이므로 $\quad x=\dfrac{\log_{10} b}{\log_{10} a}$

$$\therefore \log_a b=\frac{\log_{10} b}{\log_{10} a}$$

$a\neq1$이므로 $\log_{10} a\neq0$이다.

일반적으로 다음과 같이 로그의 밑을 변환할 수 있다.

로그의 밑의 변환 공식

a, b, c는 양수이고 $a\neq1$, $c\neq1$일 때

$$\log_a b=\frac{\log_c b}{\log_c a}$$

| 보기 | (1) $\log_4 32=\dfrac{\log_2 32}{\log_2 4}=\dfrac{\log_2 2^5}{\log_2 2^2}=\dfrac{5\log_2 2}{2\log_2 2}=\dfrac{5}{2}$

(2) $\log_9 16=\dfrac{\log_{10} 16}{\log_{10} 9}=\dfrac{\log_{10} 2^4}{\log_{10} 3^2}=\dfrac{4\log_{10} 2}{2\log_{10} 3}=2\log_3 2$

탐구하기 / 풀이

1. $3^x=5$에서 로그의 정의에 의하여

$x=\mathbf{\log_3 5}$

2. $\log_{10} 3^x=\log_{10} 5$에서

$x\log_{10} 3=\log_{10} 5$

$$\therefore x=\frac{\boxed{\log_{10} 5}}{\boxed{\log_{10} 3}}$$

물음 **1**에서 $x=\log_3 5$이고, 물음 **2**에서 $x=\dfrac{\log_{10} 5}{\log_{10} 3}$이므로

$$\log_3 5=\frac{\log_{10} 5}{\log_{10} 3}$$

임을 알 수 있다.

알아보기 / 해설

• 로그의 밑의 변환 공식에 의하여 원래 로그의 밑은 분모의 진수로, 원래 로그의 진수는 분자의 진수로 바뀌게 된다.

$$\log_a b=\frac{\log_c b}{\log_c a}$$

분자의 진수로

분모의 진수로

• 밑의 변환 공식을 증명하여 보자.

$\log_a b=x$, $\log_c a=y$, $\log_c b=z$로 놓으면

$b=a^x$ ……㉠

$a=c^y$ ……㉡

$b=c^z$ ……㉢

㉡, ㉢을 ㉠에 대입하면

$c^z=(c^y)^x=c^{yx}$

$\therefore z=yx$

$a\neq1$에서 $y=\log_c a\neq0$이므로

$x=\dfrac{z}{y} \qquad \therefore \log_a b=\dfrac{\log_c b}{\log_c a}$

• 로그의 밑의 변환 공식을 이용할 때에 밑의 값은 1이 아닌 양수이면 어떤 수든지 가능하다. 주어진 상황에 따라 식을 간단하게 나타낼 수 있게 하는 수를 밑으로 하면 편리하다.

보충 학습

$3^x=5$의 양변에 5를 밑으로 하는 로그를 취하면

$\log_5 3^x=\log_5 5=1$에서 $\quad x=\dfrac{1}{\log_5 3}$

$x=\log_3 5$이므로 $\quad \log_3 5=\dfrac{1}{\log_5 3}$

일반적으로 $\log_a b=\dfrac{1}{\log_b a}$인 관계도 성립한다.

48

함 께 하 기 / 익힘책 40쪽 | 익힘책 42쪽 | 익힘책 43쪽

$\log_a b=\dfrac{\log_c b}{\log_c a}$

$\log_a x^k=k\log_a x$

1 $\log_2 9\cdot\log_{27}16$을 간단히 하여라.

풀이

$$\log_2 9\cdot\log_{27}16=\frac{\log_{10}9}{\log_{10}2}\cdot\frac{\log_{10}16}{\log_{10}27}=\frac{\log_{10}3^2}{\log_{10}2}\cdot\frac{\log_{10}2^4}{\log_{10}3^3}$$
$$=\frac{2\log_{10}3}{\log_{10}2}\cdot\frac{4\log_{10}2}{3\log_{10}3}=\mathbf{\frac{8}{3}}$$

2 $\log_{10}2=a$, $\log_{10}3=b$라고 할 때, 다음을 a, b로 나타내어라.

(1) $\log_9 2$ (2) $\log_5 12$

풀이

(1) $\log_9 2=\dfrac{\log_{10}2}{\log_{10}9}=\dfrac{\log_{10}2}{\log_{10}3^2}$
$=\dfrac{\log_{10}2}{2\log_{10}3}=\mathbf{\dfrac{a}{2b}}$

(2) $\log_{10}5=\log_{10}\dfrac{10}{2}=1-\log_{10}2=1-a$이므로
$\log_5 12=\log_5 2^2+\log_5 3=2\log_5 2+\log_5 3$
$=2\dfrac{\log_{10}2}{\log_{10}5}+\dfrac{\log_{10}3}{\log_{10}5}=\dfrac{2a}{1-a}+\dfrac{b}{1-a}$
$=\mathbf{\dfrac{2a+b}{1-a}}$

스 스 로 하 기 / 익힘책 40쪽 | 익힘책 42쪽 | 익힘책 43쪽

1 다음을 10을 밑으로 하는 로그로 변환하여 간단히 하여라.

(1) $\log_{27}9$ (2) $\log_{125}625$

2 $\log_9 10\cdot\log_{100}3$을 간단히 하여라.

3 $a=\log_{10}2$, $b=\log_{10}3$이라고 할 때, 다음을 a, b로 나타내어라.

(1) $\log_8 9$ (2) $\log_2 5$

스스로 하기 / 풀이

1 (1) $\log_{27}9=\dfrac{\log_{10}9}{\log_{10}27}=\dfrac{\log_{10}3^2}{\log_{10}3^3}$
$=\dfrac{2\log_{10}3}{3\log_{10}3}=\mathbf{\dfrac{2}{3}}$

(2) $\log_{125}625$
$=\dfrac{\log_{10}625}{\log_{10}125}=\dfrac{\log_{10}5^4}{\log_{10}5^3}$
$=\dfrac{4\log_{10}5}{3\log_{10}5}=\mathbf{\dfrac{4}{3}}$

2 $\log_9 10\cdot\log_{100}3$
$=\dfrac{\log_{10}10}{\log_{10}9}\cdot\dfrac{\log_{10}3}{\log_{10}100}$
$=\dfrac{\log_{10}10}{\log_{10}3^2}\cdot\dfrac{\log_{10}3}{\log_{10}10^2}$
$=\dfrac{1}{2\log_{10}3}\cdot\dfrac{\log_{10}3}{2\log_{10}10}=\mathbf{\dfrac{1}{4}}$

3 (1) $\log_8 9=\dfrac{\log_{10}9}{\log_{10}8}=\dfrac{\log_{10}3^2}{\log_{10}2^3}$
$=\dfrac{2\log_{10}3}{3\log_{10}2}=\mathbf{\dfrac{2b}{3a}}$

(2) $\log_2 5=\dfrac{\log_{10}5}{\log_{10}2}=\dfrac{\log_{10}\frac{10}{2}}{\log_{10}2}$
$=\dfrac{\log_{10}10-\log_{10}2}{\log_{10}2}$
$=\dfrac{1-a}{a}=\mathbf{\dfrac{1}{a}-1}$

보충 학습

로그의 여러 가지 성질

$a>0$, $a\neq1$, $b>0$, $b\neq1$, $c>0$, $c\neq1$일 때

(1) $\log_a b\cdot\log_b a=1$

증명_ $\log_a b=\dfrac{\log_b b}{\log_b a}=\dfrac{1}{\log_b a}$

$\therefore \log_a b\cdot\log_b a=1$

(2) $a^{\log_a b}=b$

증명_ $a^{\log_a b}=x$로 놓으면 $\log_a a^{\log_a b}=\log_a x$

$\log_a b\cdot\log_a a=\log_a x$

$\therefore \log_a b=\log_a x$

이때, $x=b$이므로 $a^{\log_a b}=b$

(3) $a^{\log_c b}=b^{\log_c a}$

증명_ 양변에 c를 밑으로 하는 로그를 취하면

$\log_c a^{\log_c b}=\log_c b\cdot\log_c a$

$=\log_c a\cdot\log_c b=\log_c b^{\log_c a}$

$\therefore a^{\log_c b}=b^{\log_c a}$

(4) $\log_{a^m}b^n=\dfrac{n}{m}\log_a b$

증명_ $\log_{a^m}b^n=\dfrac{\log_c b^n}{\log_c a^m}=\dfrac{n\log_c b}{m\log_c a}$

$=\dfrac{n}{m}\log_a b$

49

04 상용로그

알 아 보 기 / 상용로그의 뜻을 알아보자.

우리가 일상생활에서 주로 사용하는 수는 십진법의 수이므로 로그를 수의 계산에 이용할 경우 10을 밑으로 하는 로그를 사용하는 것이 편리하다.

양수 N에 대하여 10을 밑으로 하는 로그 $\log_{10} N$을 **상용로그**라 하고, 보통 로그의 밑 10을 생략하여 기호로

$$\log N$$

과 같이 나타낸다.

| 보기 | (1) $\log 10=\log_{10} 10=1$ (2) $\log 1000=\log_{10} 10^3=3$

(3) $\log \sqrt{10}=\log_{10} 10^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}$ (4) $\log 0.01=\log_{10} 10^{-2}=-2$

이 책의 부록에 있는 상용로그표는 0.01의 간격으로 1.00에서 9.99까지의 수에 대한 상용로그의 값을 반올림하여 소수 넷째 자리까지 구한 근삿값을 나타낸 것이다. 이 표를 이용하면 정수 부분이 한 자리인 양수의 상용로그의 값을 구할 수 있다.

수	0	1	2	3	8	9
1.0	.0000	.0043	.0086	.0128	.0334	.0374
1.1	.0414	.0453	.0492	.0531	.0719	.0755
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
5.0	.6990	.6998	.7007	.7016	.7059	.7067
5.1	.7076	.7084	.7093	.7101	.7143	.7152
5.2	.7160	.7168	.7177	.7185	.7226	.7235

상용로그표의 값은 근삿값이므로

$\log 5.12 \fallingdotseq 0.7093$

으로 쓰는 것이 옳지만, 편의상 ≒ 대신 =를 사용하여

$\log 5.12=0.7093$

으로 쓴다.

예를 들어 $\log 5.12$의 값은 위의 표에서 0.7093임을 알 수 있다.

| 참고 | 공학용 계산기로 $\log 5.12$의 값을 구할 수 있다.

버튼 누르는 순서는 계산기의 종류에 따라 다를 수 있다.

스 스 로 하 기 / 익힘책 40쪽 | 익힘책 42쪽 | 익힘책 43쪽

1 상용로그표 또는 계산기를 이용하여 다음 값을 구하여라.

(단, 반올림하여 소수 넷째 자리까지 구한다.)

(1) $\log 1.23$ (2) $\log 3.14$

알아보기 / 해설

• 2의 상용로그의 값은 $\log 2$이며, 이때 $\log 2$는 $\log_{10} 2$를 뜻한다.

• 10의 거듭제곱 꼴의 수에 대한 상용로그의 값은 다음과 같이 쉽게 알 수 있다.

N	⋯	0.001	0.01	0.1	1	10	100	1000	⋯
$\log N$	⋯	-3	-2	-1	0	1	2	3	⋯

위의 표에서 진수가 10배씩 커지면 상용로그의 값은 1씩 증가함을 알 수 있다.

• $N=5.12$와 같이 유효숫자가 세 개인 경우의 상용로그의 값은 상용로그표에서 5.1의 행과 2의 열이 만나는 곳의 수를 읽으면 0.7093이다.

즉, $\log 5.12=0.7093$이다.

스스로 하기 / 풀이

1 (1) 상용로그표에서 1.2의 행과 3의 열이 만나는 곳의 수를 읽으면 0.0899이다.

즉, $\log 1.23=\mathbf{0.0899}$이다.

(2) 상용로그표에서 3.1의 행과 4의 열이 만나는 곳의 수를 읽으면 0.4969이다.

즉, $\log 3.14=\mathbf{0.4969}$이다.

Plus 문제

다음 값을 구하여라.

(1) $\log \sqrt[3]{100}$ (2) $\log \frac{1}{\sqrt{10}}$

| 풀이 |

(1) $\log \sqrt[3]{100}=\log 10^{\frac{2}{3}}=\frac{2}{3}\log 10=\frac{2}{3}$

(2) $\log \frac{1}{\sqrt{10}}=\log 10^{-\frac{1}{2}}=-\frac{1}{2}\log 10=-\frac{1}{2}$

참고 | 상용로그와 산성도

산성의 정도를 알려주는 pH는 용액 1 L의 수소 이온 농도 $[H^+]$ (mol/L)의 역수에 대하여 다음과 같이 밑이 10인 로그의 값으로 정의한다.

$$pH=\log_{10}([H^+])^{-1}=-\log_{10}[H^+]$$

이를 이용하여 수소 이온 농도를 수소 이온 지수(pH)로 바꾸어 간단히 나타낼 수 있다.

pH	0	1	5	7	9	14
$[H^+]$ (mol/L)	1.0	1.0×10^{-1}	1.0×10^{-5}	1.0×10^{-7}	1.0×10^{-9}	1.0×10^{-14}
산성도	산성			중성	염기성	

탐구하기 / 풀이

1. $\log 2000=\log(2\times 1000)$
$=\log(2\times 10^{\boxed{3}})$
$=\log 2+\log 10^{\boxed{3}}$
$=\log 2+3\log 10$
$=0.3010+\boxed{3}$
$=\boxed{3.3010}$

2. $\log 0.2=\log(2\times 0.1)$
$=\log(2\times 10^{\boxed{-1}})$
$=\log 2+\log 10^{\boxed{-1}}$
$=\log 2-\log 10$
$=0.3010+(\boxed{-1})$
$=\boxed{-0.6990}$

05 상용로그의 지표와 가수

탐구하기 / 상용로그의 값 구하기

다음은 $\log 2=0.3010$임을 이용하여 $\log 2000$과 $\log 0.2$의 값을 구하는 과정이다. $\square$ 안에 알맞은 수를 써넣어 보자.

1. $\log 2000=\log(2\times 10^{\square})=\log 2+\log 10^{\square}$
$=0.3010+\square=\square$

2. $\log 0.2=\log(2\times 10^{\square})=\log 2+\log 10^{\square}$
$=0.3010+(\square)=\square$

알아보기 / 상용로그의 지표와 가수에 대하여 알아보자.

상용로그표에서 $\log 5.12=0.7093$이므로 로그의 성질을 이용하여 5120, 0.0512의 상용로그의 값을 다음과 같이 구할 수 있다.

$\log 5120=\log(5.12\times 10^3)$
$=\log 5.12+\log 10^3$
$=0.7093+3=3.7093$

$\log 0.0512=\log(5.12\times 10^{-2})$
$=\log 5.12+\log 10^{-2}$
$=0.7093-2=-1.2907$

양수 M은

$M=a\times 10^n$ ($1\le a<10$, n은 정수)

의 꼴로 표현할 수 있다. 이 식의 양변에 상용로그를 취하면

$\log M=\log(a\times 10^n)=\log a+\log 10^n=n+\log a$ ⋯ ㉠

이므로 양수 M의 상용로그의 값은 상용로그표를 이용하여 $\log a$의 값을 찾은 후 정수 n의 값을 더하여 구할 수 있다.

이때, ㉠에서 정수 n을 $\log M$의 **지표**, $\log a$를 $\log M$의 **가수**라고 한다.

$\log M=\underset{\text{지표}}{n}+\underset{\text{가수}}{\log a}$

여기서 $1\le a<10$이므로

$0\le \log a<1$

즉, 상용로그의 가수는 항상 0 이상 1 미만의 수이다.

알아보기 / 해설

• $\log 5.12=0.7093$임을 이용하여 다음 값들을 구하여 보자.

$\log 51.2=\log(5.12\times 10)=1+0.7093=1.7093$
$\log 512=\log(5.12\times 10^2)=2+0.7093=2.7093$
$\log 5120=\log(5.12\times 10^3)=3+0.7093=3.7093$
$\log 0.512=\log(5.12\times 10^{-1})=-1+0.7093=\overline{1}.7093$
$\log 0.0512=\log(5.12\times 10^{-2})=-2+0.7093=\overline{2}.7093$
$\log 0.00512=\log(5.12\times 10^{-3})=-3+0.7093=\overline{3}.7093$

(앞의 정수: 지표, 0.7093: 가수)

위의 각 상용로그의 가수는 모두 0.7093으로 같다. 여기서 진수의 숫자 배열이 같으면 소수점의 위치에 관계없이 가수는 모두 같다는 것을 알 수 있다.

• $\log 0.0512=-1.2907$과 같이 로그의 값이 음수인 경우에는

$\log 0.0512=-1.2907$
$=-1-0.2907$
$=(-1-1)+(1-0.2907)$
$=-2+0.7093$

과 같이 정수 부분에서 1을 빼고 소수 부분에 1을 더하여 $0\le$(가수)<1이 되도록 해야 한다.

• -2.7093과 $\overline{2}.7093$은 서로 다른 수라는 것을 주의해야 한다.

$-2.7093=-2-0.7093$
$\overline{2}.7093=-2+0.7093$

• A가 n자리 정수이면 $\log A$의 지표는 $n-1$이고 $n-1\le \log A<n$이다.

51

한편 $\log 0.0512=-1.2907$과 같이 로그의 값이 음수인 경우에는

$$\begin{aligned}\log 0.0512&=-1.2907\\&=-2+(1-0.2907)\\&=-2+0.7093\end{aligned}$$

과 같이 변형하고, 지표와 가수를 알아보기 쉽도록 지표 -2를 $\bar{2}$로 나타내어 다음과 같이 쓴다.

$$\log 0.0512=-2+0.7093=\bar{2}.7093$$

$\bar{2}.7093$은 -2.7093이 아니라 $-2+0.7093$임에 유의한다.

| 보기 | (1) $\log 5120=3.7093$이므로 $\log 5120$의 지표는 3, 가수는 0.7093이다.

(2) $\log 0.0512=\bar{2}.7093$이므로 $\log 0.0512$의 지표는 -2, 가수는 0.7093이다.

$\log 5120=3.7093$ — 정수 부분이 네 자리

$\log 0.0512=\bar{2}.7093$ — 소수 둘째 자리에서 처음으로 0이 아닌 수

일반적으로 상용로그의 지표와 가수에 대하여 다음 성질이 성립한다.

지표와 가수의 성질

(1) 지표의 성질

① 정수 부분이 n자리인 수의 상용로그의 지표는 $n-1$이다.

② 소수 n째 자리에서 처음으로 0이 아닌 숫자가 나타나는 1보다 작은 양수의 상용로그의 지표는 $-n$이다.

(2) 가수의 성질

숫자의 배열이 같고, 소수점의 위치만 다른 수들의 상용로그의 가수는 모두 같다.

스스로 하기 / 익힘책 40쪽 | 익힘책 42쪽 | 익힘책 43쪽

1 상용로그표를 이용하여 다음 수의 상용로그의 지표와 가수를 구하여라.

(1) 419 (2) 0.419

2 $\log 5.67=0.7536$임을 이용하여 다음 상용로그의 값을 구하여라.

(1) $\log 5670$ (2) $\log 0.00567$ (3) $\log\sqrt{567}$

스스로 하기 / 풀이

1 $\log 4.19=0.6222$이므로

(1) $\log 419=\log(4.19\times 100)$

$=\log(4.19\times 10^2)$

$=\log 4.19+\log 10^2$

$=0.6222+2$

$=2.6222$

$\therefore$ **지표: 2, 가수: 0.6222**

(2) $\log 0.419=\log(4.19\times 0.1)$

$=\log(4.19\times 10^{-1})$

$=\log 4.19+\log 10^{-1}$

$=0.6222-1$

$=\bar{1}.6222$

$\therefore$ **지표: -1, 가수: 0.6222**

2 (1) $\log 5670$

$=\log(5.67\times 10^3)$

$=\log 5.67+\log 10^3$

$=0.7536+3$

$=\mathbf{3.7536}$

(2) $\log 0.00567$

$=\log(5.67\times 10^{-3})$

$=\log 5.67+\log 10^{-3}$

$=0.7536-3$

$=\mathbf{\bar{3}.7536}$

(3) $\log\sqrt{567}$

$=\log 567^{\frac{1}{2}}$

$=\dfrac{1}{2}\log(5.67\times 10^2)$

$=\dfrac{1}{2}(\log 5.67+\log 10^2)$

$=\dfrac{1}{2}(0.7536+2)$

$=\mathbf{1.3768}$

Plus 문제

$\log 7.62=0.8820$임을 이용하여 다음을 만족하는 x의 값을 구하여라.

(1) $\log x=4.8820$

(2) $\log x=\bar{3}.8820$

| 풀이 |

$\log 7.62$와 $\log x$의 가수가 같으므로 x는 7.62와 숫자의 배열이 같다.

(1) $\log x=4.8820$에서 지표가 4이므로 x는 정수 부분이 5자리인 수이다.

$\therefore x=76200$

(2) $\log x=\bar{3}.8820$에서 지표가 -3이므로 x는 소수 셋째 자리에서 처음으로 0이 아닌 숫자가 나타난다.

$\therefore x=0.00762$

함 께 하 기 / 익힘책 40쪽 | 익힘책 42쪽 | 익힘책 43쪽

1 $\log 2=0.3010$, $\log 3=0.4771$임을 이용하여 다음 물음에 답하여라.

(1) 2^{30}은 몇 자리 정수인가?

(2) $\left(\frac{1}{3}\right)^{20}$을 계산하면 소수 몇째 자리에서 처음으로 0이 아닌 숫자가 나타나는가?

풀이

(1) $\log 2^{30}=30\times\log 2=30\times 0.3010=9.030$

이므로 $\log 2^{30}$의 지표는 9이다.

따라서 2^{30}은 **10자리 정수**이다.

(2) $\log\left(\frac{1}{3}\right)^{20}=\log 3^{-20}=-20\log 3$

$=-20\times 0.4771=-9.542$

$=-10+0.458=\overline{10}.458$

이므로 $\log\left(\frac{1}{3}\right)^{20}$의 지표는 -10이다.

따라서 $\left(\frac{1}{3}\right)^{20}$은 **소수 열째 자리**에서 처음으로 0이 아닌 숫자가 나타난다.

스 스 로 하 기 / 익힘책 40쪽 | 익힘책 42쪽 | 익힘책 43쪽

3 $\log 2=0.3010$, $\log 3=0.4771$임을 이용하여 다음 물음에 답하여라.

(1) 6^{100}은 몇 자리 정수인가?

(2) $\left(\frac{2}{3}\right)^{20}$을 계산하면 소수 몇째 자리에서 처음으로 0이 아닌 숫자가 나타나는가?

4 세기가 A와트(W)인 전파가 어떤 벽을 투과하여 세기가 B W인 전파로 바뀔 때, 그 벽의 전파감쇄비를 f데시벨(dB)이라고 하면

$$f=10\log\left(\frac{B}{A}\right)$$

의 관계식이 성립한다. 전파감쇄비가 -5 dB인 벽을 투과한 전파의 세기가 1 W일 때, 투과하기 전 전파의 세기를 구하여라.

함께하기 / 해설

1 $\log N=$(지표)+(가수)라고 하면 지표를 보고 N의 정수 부분이 몇 자리 수인지 또는 N이 소수 몇째 자리에서 처음으로 0이 아닌 숫자가 나타나는지를 알 수 있다. 또 가수를 보고 N의 숫자의 배열도 알 수 있다. 따라서 상용로그를 이용하면 복잡한 형태의 거듭제곱과 거듭제곱근의 계산 결과를 쉽게 알 수 있다.

그러므로 2^{30}, $\left(\frac{1}{3}\right)^{20}$에 각각 상용로그를 취하여 값을 구한 후, 지표를 구하여 자릿수를 구한다.

스스로 하기 / 풀이

3 (1) $\log 6^{100}=100\log(2\times 3)$

$=100(\log 2+\log 3)$

$=100(0.3010+0.4771)$

$=77.81$

이므로 $\log 6^{100}$의 지표는 77이다.

따라서 6^{100}은 **78자리 정수**이다.

(2) $\log\left(\frac{2}{3}\right)^{20}=20\log\frac{2}{3}$

$=20(\log 2-\log 3)$

$=20(0.3010-0.4771)$

$=20\times(-0.1761)$

$=-3.522$

$=-3-1+(1-0.522)$

$=-4+0.478$

$=\overline{4}.478$

이므로 $\log\left(\frac{2}{3}\right)^{20}$의 지표는 -4이다.

따라서 $\left(\frac{2}{3}\right)^{20}$은 **소수 넷째 자리**에서 처음으로 0이 아닌 숫자가 나타난다.

4 $f=-5$, $B=1$이므로 이를 $f=10\log\left(\frac{B}{A}\right)$에 대입하면

$-5=10\log\left(\frac{1}{A}\right)=10\log A^{-1}$

$=-10\log A$

$\therefore \log A=\frac{1}{2}$

$\therefore A=\sqrt{10}$

따라서 벽을 투과하기 전 전파의 세기는 $\sqrt{10}$ **W**이다.

53

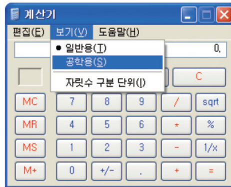
공학 도구

*수학적 개념을 공학 도구를 이용하여 이해하고 탐구해 보세요.

계산기 프로그램을 이용하여 상용로그의 값 구하기

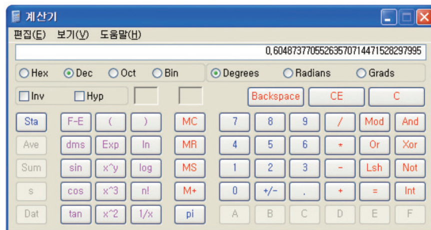
상용로그의 값을 구할 때에는 공학용 계산기 또는 계산기 프로그램을 이용하여 구할 수 있다. 다음은 계산기 프로그램을 이용하여 상용로그의 값을 구하는 과정을 나타낸 것이다.

1단계 다음 그림과 같이 [보기] 메뉴에서 계산기를 일반용에서 공학용으로 바꾼다.



2단계 다음과 같은 계산기에서 log 4.026의 값은 다음의 순서대로 입력하면 구할 수 있다.

4 . 0 2 6 log



계산기 프로그램을 이용하여 여러 가지 로그의 값을 구하고, 이를 상용로그표에서 구한 값과 비교하여 보자.

공학 도구 / 해설

공학용 계산기 또는 윈도에 내장된 계산기 이외에도 GeoGebra, Euler Math Toolbox 또는 C.a.R.를 이용하여 상용로그의 값을 구할 수 있다. 이 세 프로그램을 이용하여 log 4.026의 값을 구하여 보자.

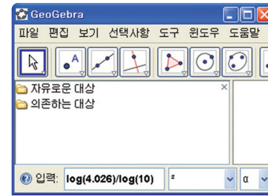
1. GeoGebra

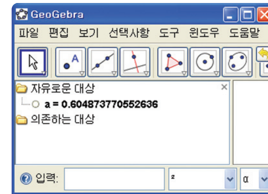
이 프로그램은 GeoGebra 홈페이지 (http://www.geogebra.org)에서 내려 받아 사용할 수 있다.

아래쪽의 입력 창에

log(4.026)/log(10)

을 입력하고 Enter 키를 누른다.



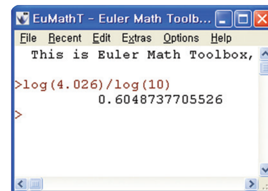


2. Euler Math Toolbox

이 프로그램은 홈페이지 http://eumat.sourceforge.net/download.html에서 내려 받아 사용할 수 있다. 열린 창에

log(4.026)/log(10)

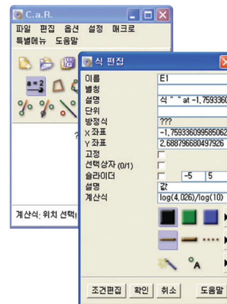
을 입력하고 Enter 키를 누른다.



3. C.a.R.

이 프로그램은 C.a.R. 홈페이지(http://www.z-u-l.de)에서 내려 받아 사용할 수 있다.

계산식 아이콘 을 선택한 후 화면의 빈 곳을 클릭하면 식 편집 창이 열린다. 이때, 계산식에 log(4.026)/log(10)을 입력하고 확인을 누른다.



중단원 확인하기 / 풀이

54

중 단 원 확 인 하 기

새로 나온 용어와 기호
거듭제곱근, 밑, 로그, 진수, 상용로그, 지표, 가수, $\sqrt[n]{a}$, $\log_a N$, $\log N$

Ⅱ-1. 지수와 로그

거듭제곱근

이해

1 다음 거듭제곱근 중 실수인 것을 구하여라.

(1) 1000의 세제곱근 (2) 81의 네제곱근

지수와 로그

계산

2 다음을 간단히 하여라.

(1) $\sqrt{5^3}\times\sqrt[4]{5}$ (2) $a^{-\sqrt{3}}\times(a^{\sqrt{3}})^4\div(a^{\sqrt{3}}\times a^{2\sqrt{3}})$

(3) $\log\sqrt{0.1}$ (4) $\log_3 7\times\log_7 9$

상용로그의 지표와 가수

이해

3 상용로그표를 이용하여 다음을 만족하는 x의 값을 구하여라.

(1) $\log 87.5=x$ (2) $\log x=\overline{3}.7686$

상용로그의 지표와 가수

문제 해결

4 상용로그의 지표가 2인 수 중 가장 큰 정수를 a, 상용로그의 지표가 -2인 수 중 가장 작은 수를 b라고 할 때, ab의 값을 구하여라.

수돗물의 사용량

의사소통

5 어느 집에서 5일 동안 사용한 수돗물의 양을 조사하였더니 조사를 시작한 후 x일 동안 사용한 수돗물의 양은 다음과 같았다.

$$5x+100\log x\,(\mathrm{m}^3)$$

이때, 5일 동안 사용한 수돗물의 양은 첫날 사용한 수돗물의 양의 몇 배인지 말하여라. (단, $\log 5=0.7$로 계산한다.)

---

1 (1) 1000의 세제곱근을 x라고 하면

$x^3=1000$

$x^3-10^3=0$

$(x-10)(x^2+10x+10^2)=0$

$\therefore x=10$ 또는 $x=-5\pm5\sqrt{3}i$

따라서 1000의 세제곱근 중 실수인 것은 **10**이다.

(2) 81의 네제곱근을 x라고 하면

$x^4=81$

$x^4-3^4=0$

$(x-3)(x+3)(x^2+9)=0$

$\therefore x=\pm3$ 또는 $x=\pm3i$

따라서 81의 네제곱근 중 실수인 것은 **−3 또는 3**이다.

2 (1) $\sqrt{5^3}\times\sqrt[4]{5}=5^{\frac{3}{2}}\times5^{\frac{1}{4}}$

$=5^{\frac{3}{2}+\frac{1}{4}}=\mathbf{5^{\frac{7}{4}}}$

(2) $a^{-\sqrt{3}}\times(a^{\sqrt{3}})^4\div(a^{\sqrt{3}}\times a^{2\sqrt{3}})$

$=a^{-\sqrt{3}}\times a^{4\sqrt{3}}\div(a^{\sqrt{3}+2\sqrt{3}})$

$=a^{-\sqrt{3}+4\sqrt{3}-3\sqrt{3}}$

$=a^0=\mathbf{1}$

(3) $\log\sqrt{0.1}=\log 0.1^{\frac{1}{2}}$

$=\log 10^{-\frac{1}{2}}$

$=-\frac{1}{2}\log 10$

$=\mathbf{-\frac{1}{2}}$

(4) $\log_3 7\times\log_7 9=\frac{\log_3 7}{\log_3 3}\times\frac{\log_3 9}{\log_3 7}$

$=\frac{\log_3 9}{\log_3 3}$

$=\frac{2\log_3 3}{\log_3 3}=\mathbf{2}$

3 (1) $\log 8.75=0.9420$이므로

$\log 87.5=\log(8.75\times10)$

$=\log 8.75+\log 10$

$=0.9420+1$

$=1.9420$

$\therefore x=\mathbf{1.9420}$

(2) $\log 5.87=0.7686$이고, $\log x=\overline{3}.7686$에서 $\log x$의 지표는 -3이므로 x는 소수 셋째 자리에서 처음으로 0이 아닌 숫자가 나타난다.

$\therefore x=\mathbf{0.00587}$

4 $a=999$, $b=0.01$이므로

$ab=\mathbf{9.99}$

5 1일 동안 사용한 수돗물의 양은

$5\times1+100\log 1=5\ (\mathrm{m}^3)$

5일 동안 사용한 수돗물의 양은

$5\times5+100\log 5=25+100\times0.7$

$=25+70$

$=95\ (\mathrm{m}^3)$

따라서 5일 동안 사용한 수돗물의 양은 1일 동안 사용한 수돗물의 양의 **19**배이다.

중단원 평가 문제

정답과 풀이 p.229

01 바탕

$\sqrt{2\sqrt[3]{4\sqrt[4]{8}}}$을 2^k의 꼴로 나타낸 것은?

① $2^{\frac{23}{12}}$ ② $2^{\frac{17}{12}}$ ③ $2^{\frac{13}{12}}$ ④ $2^{\frac{23}{24}}$ ⑤ $2^{\frac{11}{24}}$

02 바탕

$a>0$, $a\neq1$이고 $\sqrt[3]{a^2}=\sqrt[4]{\sqrt{a^k}}$일 때, 유리수 k의 값은?

① $\frac{14}{3}$ ② $\frac{16}{3}$ ③ $\frac{17}{3}$ ④ $\frac{31}{6}$ ⑤ $\frac{35}{6}$

03 기본

세제곱하여 32가 되는 실수를 a, 다섯제곱하여 27이 되는 실수를 b라고 할 때, $\sqrt[5]{a^3}+\sqrt[3]{b^5}$의 값은?

① 10 ② 5 ③ $10^{\frac{1}{2}}$ ④ $5^{\frac{1}{2}}$ ⑤ 1

04 기본

$(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{3})(\sqrt[3]{16}-\sqrt[3]{12}+\sqrt[3]{9})$를 간단히 하여라.

05 기본

$(\sqrt{2+\sqrt{3}}-\sqrt{2-\sqrt{3}})^{\frac{2}{3}}=2^x$을 만족하는 x의 값은?

① $\frac{1}{3}$　② $\frac{1}{4}$　③ $\frac{1}{5}$　④ $\frac{1}{6}$　⑤ $\frac{1}{7}$

06 기본

$(a^{\frac{1}{4}}-b^{\frac{1}{4}})(a^{\frac{1}{4}}+b^{\frac{1}{4}})(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}})$을 간단히 하면? (단, $a>0$, $b>0$)

① $a-b$　② $a+b$　③ a^2-b^2
④ a^2+b^2　⑤ a^3-b^3

07 실력

$2x=3^{\frac{1}{3}}-3^{-\frac{1}{3}}$일 때, $(x-\sqrt{x^2+1})^3$의 값은?

① -1　② $-\frac{1}{3}$　③ 0　④ $\frac{1}{3}$　⑤ 1

08 기본

$67^x=9$, $603^y=81$일 때, $\frac{2}{x}-\frac{4}{y}$의 값은?

① -2　② -1　③ 1　④ 2　⑤ 4

09 바탕

다음 식을 간단히 하여라.

(1) $\log_2 3+\log_2 6-4\log_2 \sqrt{6}$

(2) $\log_3 \sqrt{16}-\frac{1}{2}\log_3 \frac{1}{5}-\frac{3}{2}\log_3 \sqrt[3]{80}$

10 기본

$\log_2(\tan 1^\circ)+\log_2(\tan 2^\circ)+\log_2(\tan 3^\circ)+\cdots+\log_2(\tan 89^\circ)$의 값은?

① 0 ② 1 ③ 44.5 ④ 89 ⑤ 178

11 기본

$\log_2 5=a$일 때, $\log_5 \sqrt{10\sqrt{10}}+\log_{10}\sqrt{5\sqrt{5}}$ 를 a로 나타낸 것은?

① $\frac{3}{4}\left(a+\frac{1}{a}\right)$ ② $\frac{4}{3}\left(a+\frac{1}{a}\right)$ ③ $\frac{3(2a^2+2a+1)}{4a(a+1)}$

④ $\frac{2(2a^2+2a+1)}{3a(a+1)}$ ⑤ $\frac{4(2a^2+2a+1)}{5a(a+1)}$

12 실력

$\frac{1}{\log_A N}=\frac{1}{\log_2 N}+\frac{1}{\log_4 N}+\frac{1}{\log_6 N}+\frac{1}{\log_8 N}+\frac{1}{\log_{10} N}$을 만족하는 A와 $B=\log_a b^2\cdot\log_b c^2\cdot\log_c a^2$에 대하여 $\frac{A}{B}$의 값은?

(단, a, b, c, A, N은 모두 1보다 큰 양수이다.)

① 383 ② 400 ③ 447

④ 480 ⑤ 521

13 기본

$\log 2=0.3010$, $\log 3=0.4771$일 때, 다음 물음에 답하여라.

(1) 6^{50}은 몇 자리의 정수인가?

(2) $\left(\frac{1}{2}\right)^{60}$은 소수 몇째 자리에서 처음으로 0이 아닌 숫자가 나타나는가?

14 기본

$\log 20$의 가수가 α라고 할 때, $\frac{10}{10^{\alpha}+10^{-\alpha}}$의 값을 구하여라.

15 실력

어떤 회사는 자사가 보유한 기계들의 가격을 매년 초에 평가한다고 한다. 1999년 초에 1000만 원으로 평가된 어떤 기계의 가격이 매년 전년도의 평가액에 비해 20 %씩 낮게 평가된다고 할 때, 이 기계의 가격이 처음으로 100만 원 미만으로 평가되는 해는 몇 년인가? (단, $\log 2=0.3010$)

① 2006년 ② 2008년 ③ 2010년
④ 2012년 ⑤ 2014년

2 지수함수와 로그함수

이 단원을 배우면

- 실생활 상황을 통해 지수함수의 뜻을 알 수 있다.
- 지수함수의 그래프를 그려 보고, 그 성질을 이해할 수 있다.
- 실생활 상황을 통해 로그함수의 뜻을 알 수 있다.
- 로그함수의 그래프를 그려 보고, 그 성질을 이해할 수 있다.

1 지수함수와 그 그래프
2 로그함수와 그 그래프

소단원의 학습 목표

1. 실생활 상황을 통해 지수함수의 뜻을 안다.
2. 지수함수의 그래프를 그려 보고, 그 성질을 이해한다.

여기서 배우는 용어 및 기호

지수함수

다가서기 / 해설

단세포 생물인 세균은 염색체인 DNA 분자에 세균의 모든 유전자가 암호화되어 있다.
세균은 배양하기가 쉽고 배양 속도가 빠르기 때문에 유전자 연구에 많이 쓰인다. 특히, 실험실에서 가장 많이 쓰이는 세균인 대장균(E. Coli)은 37 ℃에서 20분마다 분열하여 그 수가 두 배씩 증가한다. 따라서 이 대장균이 10시간 후에는 약 10억 개 이상이 된다. 대장균의 DNA분자는 원통 모양으로 둘레가 약 1 mm이고, 분자량은 2.56×10^{-9} 정도이며 약 3.8×10^{6}개의 염기쌍을 포함한다.

56

2 지수함수와 로그함수

1 지수함수와 그 그래프

학습 목표
- 실생활 상황을 통해 지수함수의 뜻을 안다.
- 지수함수의 그래프를 그려 보고, 그 성질을 이해한다.

다 가 서 기 / 세균의 분열 속도

어떤 대장균이 20분마다 분열하면, 이 대장균 한 개는 한 시간 뒤에는 $2^3(=8)$개의 개체로 증가하고, 4시간 뒤에는 그 수가 무려 $2^{12}(=4096)$개가 된다.

적당한 환경이 주어진다면 시간 x와 대장균 수 y 사이에는 다음과 같은 관계가 성립한다.

$$y=2^{3x}$$

이와 같이 기하급수적으로 증가하는 수치는 지수를 이용하여 함수로 표현하면 편리하다.

참고 | 함수의 발달

함수는 독립변수와 종속변수 사이의 종속 관계를 기술하기 위하여 생겨났다. 역학에서 두 변량 사이의 관계를 연구한 갈릴레이 등에 의하여 개념화된 함수는 17세기에 이르러 물체의 운동을 나타내는 곡선을 연구하는 가운데 도입되었고, 곡선과 결합된 함수를 나타내는 방정식이 연구되면서 17세기 말경 대수적인 함수가 등장하였다.

데카르트(Descartes, R. ; 1596～1650)가 함수의 본질은 '따라 변하는 두 변량 사이의 대응 관계'라고 주장하여 데카르트를 함수의 창시자로 보기도 한다.
함수(function)라는 용어는 1692년 독일의 라이프니츠(Leibniz, G. W. ; 1646～1716)가 처음 사용하였고, 함수 기호 f는 18세기에 오일러(Euler, L. ; 1707～1783)가 처음 사용하였다.
18세기 후반에는 하나의 식으로 표현되지 않는 함수가 발견되었고, 디리클레(Dirichlet, J. P. G. L. ; 1805～1859) 등에 의하여 주어진 구간의 변량 x에 대하여 y의 값이 각각 정해질 때, y는 x의 함수라고 정의하였다. 이후 20세기에는 디리클레의 정의에 의한 '대응'이라는 함수 개념이 보편화되었다.

01 지수함수의 뜻

탐구하기 / 반감기

루테늄(ruthenium) 주기율표에서 제8족인 백금족 원소의 하나로 원소 기호는 Ru이다.

영광 원자력 발전소

어떤 물질이 일정한 비율로 붕괴되어 반으로 감소하는 데 걸리는 시간을 반감기라고 한다. 원자력 발전 과정에서 만들어지는 방사성 동위 원소 루테늄 106(^{106}Ru)은 반감기가 약 1년이다. 루테늄 106 1 g이 x년 후에 남은 질량을 $f(x)$ g이라고 할 때, 다음 표를 완성하여 보자.

x	0	1	2	3	4
$f(x)$	1	$\frac{1}{2}$			

알아보기 / 지수함수에 대하여 알아보자.

한 장의 종이를 절반으로 자르면 2장이 된다. 또 이 2장의 종이를 겹쳐 놓고 다시 절반으로 자르면 4장이 된다. 이와 같은 과정을 반복할 때마다 종이의 수는 8, 16, 32, …와 같이 증가한다.

이때, 자른 횟수를 x라고 하면 종이의 수는 2^x장이 된다.

이와 같이 정수 x $(x \geq 0)$에 2^x을 대응시키면 그 값은 하나로 정해지므로

$$y=2^x$$

은 정수 x $(x \geq 0)$ 전체의 집합을 정의역으로 하는 함수이다.

지수함수를 영어로 exponential function 이라고 한다.

$a=1$이면 모든 실수 x에 대하여 $a^x=1$이므로 $y=a^x$은 상수함수가 된다.

일반적으로 실수 x에 대응하는 a^x $(a>0,\ a \neq 1)$의 값은 단 하나뿐이므로 $y=a^x$은 x의 함수이다.

이와 같이 실수 전체의 집합을 정의역으로 하는 함수

$$y=a^x \ (a>0,\ a \neq 1)$$

을 a를 밑으로 하는 **지수함수**라고 한다.

스스로 하기 / 익힘책 48쪽 | 익힘책 49쪽 | 익힘책 50쪽

1. 다음 중 지수함수를 모두 찾아라.
(1) $y=x^2$ (2) $y=2^x$ (3) $y=\frac{1}{2x}$ (4) $y=(\sqrt{3})^x$

탐구하기 / 풀이

화석의 연대 측정 등에 이용되는 방사성 물질의 반감기를 이용하는 문제이다. 반감기는 어떤 물질이 일정한 비율로 붕괴되어 반으로 감소하는 데 걸리는 시간을 뜻하며 루테늄 106의 반감기는 1년이므로 1년 후에 남은 질량은 처음 양의 $\frac{1}{2}$이 되고, 2년 후에 남은 질량은 $\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$, 3년 후에 남은 질량은 $\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}$, 4년 후에 남은 질량은 $\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{1}{16}$이다.

x	0	1	2	3	4
$f(x)$	1	$\frac{1}{2}$	$\mathbf{\frac{1}{4}}$	$\mathbf{\frac{1}{8}}$	$\mathbf{\frac{1}{16}}$

알아보기 / 해설

$y=a^x$에서 $a=1$이면 모든 실수 x에 대하여 $y=1^x=1$이므로 상수함수가 된다.
따라서 $a=1$인 경우는 지수함수에서 제외한다.

스스로 하기 / 풀이

1. 실수 전체의 집합을 정의역으로 하는 함수 $y=a^x(a>0,\ a \neq 1)$이 지수함수이다.
(1) 이차함수이다.
(2) 지수함수이다.
(3) 분수함수이다.
(4) 지수함수이다.
따라서 지수함수는 (2), (4)이다.

보충 학습

불안정한 원자핵은 안정된 원자핵이 되기 위하여 방사선을 방출한다. 방사선을 방출하는 방사성 물질에는 1896년 베크렐이 발견한 우라늄(^{235}U)과 1898년 퀴리 부부가 발견한 라듐(^{226}Ra) 등이 있다.
방사선은 암의 치료뿐만 아니라 품종 개량, 식품 보존 등에 쓰이며 방사성 물질의 반감기는 멸종된 생물이 살던 시대를 추측할 때 사용된다. 반감기란 어떤 물질이 일정한 비율로 붕괴되어 반으로 감소하는 데 걸리는 시간을 뜻하는데, 우라늄의 반감기는 7억 년이고 라듐의 반감기는 1600년이다.

58

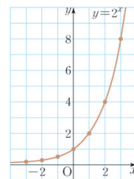
02 지수함수의 그래프와 그 성질

알 아 보 기 / 지수함수의 그래프와 그 성질에 대하여 알아보자.

지수함수의 그래프를 그려 보자.

함수 $y=2^x$에 대하여 정수 x의 값에 대응하는 y의 값을 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-3	-2	-1	0	1	2	3	$\cdots$
$y=2^x$	$\cdots$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	$\cdots$

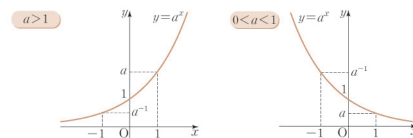


위의 표에서 서로 대응하는 x, y값의 순서쌍 $(x,\ y)$를 좌표평면 위에 나타내고, 매끄러운 곡선으로 연결하면 오른쪽 그림과 같다.

이 곡선이 함수 $y=2^x$의 그래프이다.

일반적으로 $a>0$이고, $a\neq1$일 때, 지수함수 $y=a^x$의 그래프는 a값의 범위에 따라 다음과 같다.

$a>1$인 경우의 그래프와 $0<a<1$인 경우의 그래프는 y축에 대하여 대칭이다.



위의 그래프로부터 다음과 같은 지수함수 $y=a^x\,(a>0,\ a\neq1)$의 성질을 알 수 있다.

지수함수 $y=a^x\,(a>0,\ a\neq1)$의 성질

(1) 정의역은 실수 전체의 집합이고, 치역은 양의 실수 전체의 집합이다.

(2) $a>1$일 때, x의 값이 증가하면 y의 값도 증가한다.

$0<a<1$일 때, x의 값이 증가하면 y의 값은 감소한다.

(3) 그래프는 점 $(0,\ 1)$과 점 $(1,\ a)$를 지난다.

(4) 그래프의 점근선은 x축이다.

곡선이 어떤 직선에 한없이 가까워질 때, 이 직선을 그 곡선의 점근선이라고 한다.

알아보기 / 해설

• 실수 x의 값에 a^x을 대응시키는 규칙에서

(i) $a>0$이면 실수 지수의 성질에 의하여 임의의 실수 x에 대하여 a^x은 하나씩 대응한다.

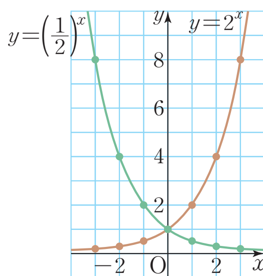
(ii) $a<0$이면 $(-2)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{-2}$와 같이 허수가 되는 경우가 생기므로 치역이 실수가 아니다.

(iii) $a=1$이면 임의의 실수 x에 대하여 $a^x=1$이 되어 상수함수이므로 역함수가 정의되지 않는다.

(i), (ii), (iii)에 의하여 지수함수 $y=a^x$에서 밑 a의 조건을 $a>0$, $a\neq1$로 제한한다.

• 함수 $y=f(-x)$의 그래프는 함수 $y=f(x)$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 것이므로 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x=2^{-x}$에서 지수함수 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$의 그래프는 지수함수 $y=2^x$의 그래프와 y축에 대하여 대칭임을 알 수 있다.

다음 그래프에서도 지수함수 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$의 그래프는 지수함수 $y=2^x$의 그래프와 y축에 대하여 대칭임을 확인할 수 있다.



• 지수함수 $y=a^x\,(a>0,\ a\neq1)$의 밑이 1보다 큰 경우는 증가함수이고, 밑이 1보다 작은 경우는 감소함수이다.

보충 학습

$y=a^x\,(a>0,\ a\neq1)$의 그래프를

(i) x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동하면

$y=a^x$ ➡ $y-n=a^{x-m}$

$\therefore y=a^{x-m}+n$

(ii) x축에 대하여 대칭이동하면

$y=a^x$ ➡ $-y=a^x$ $\quad\therefore y=-a^x$

(iii) y축에 대하여 대칭이동하면

$y=a^x$ ➡ $y=a^{-x}$ $\quad\therefore y=\left(\frac{1}{a}\right)^x$

(iv) 원점에 대하여 대칭이동하면

$y=a^x$ ➡ $-y=a^{-x}$ $\quad\therefore y=-\left(\frac{1}{a}\right)^x$

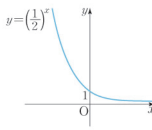
59

함께 하기 /

익힘책 48쪽 | 익힘책 49쪽 | 익힘책 50쪽

1 오른쪽 그림은 지수함수 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$의 그래프이다. 이 그래프를 이용하여 다음 수의 대소를 비교하여라.

(1) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{2}}$, $\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{3}}$ (2) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$, $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$



풀이

$y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$의 그래프에서 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소한다.

(1) 지수를 비교하면 $\sqrt{2}<\sqrt{3}$이므로 $\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{2}}>\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{3}}$

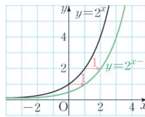
(2) 지수를 비교하면 $-2>-3$이므로 $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}<\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$

2 함수 $y=2^x$의 그래프를 이용하여 함수 $y=2^{x-1}$의 그래프를 그려라.

풀이

함수 $y=2^{x-1}$의 그래프는 함수 $y=2^x$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

따라서 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



그래프의 평행이동과 대칭이동을 이용하면 여러 가지 지수함수의 그래프를 그릴 수 있다.

스스로 하기 /

익힘책 48쪽 | 익힘책 49쪽 | 익힘책 50쪽

1 다음 지수함수의 그래프를 그려라.

(1) $y=3^x$ (2) $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$

2 지수함수의 그래프를 이용하여 다음 수의 대소를 비교하여라.

(1) $\sqrt[5]{3}$, $\sqrt[4]{9}$ (2) $\sqrt{0.2}$, $\sqrt[3]{0.04}$

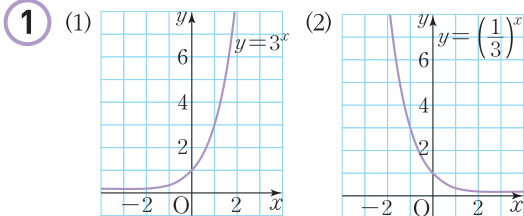
3 함수 $y=3^x$의 그래프를 이용하여 다음 지수함수의 그래프를 그려라.

(1) $y=3^{x-2}$ (2) $y=3^x+1$

(3) $y=3^{-x}$ (4) $y=-3^x$

스스로 하기 / 풀이

1 (1) (2)



2 (1) $\sqrt[5]{3}=3^{\frac{1}{5}}$, $\sqrt[4]{9}=\sqrt[4]{3^2}=3^{\frac{2}{4}}=3^{\frac{1}{2}}$

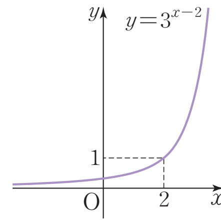
함수 $y=3^x$은 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가하므로 $3^{\frac{1}{5}}<3^{\frac{1}{2}}$ $\quad\therefore$ $\boldsymbol{\sqrt[5]{3}<\sqrt[4]{9}}$

(2) $\sqrt{0.2}=0.2^{\frac{1}{2}}$, $\sqrt[3]{0.04}=\sqrt[3]{0.2^2}=0.2^{\frac{2}{3}}$

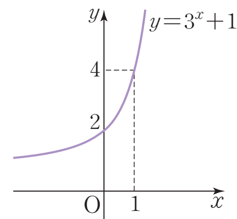
함수 $y=0.2^x$은 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소하므로

$0.2^{\frac{1}{2}}>0.2^{\frac{2}{3}}$ $\quad\therefore$ $\boldsymbol{\sqrt{0.2}>\sqrt[3]{0.04}}$

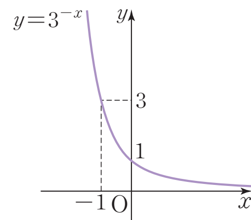
3 (1) 함수 $y=3^{x-2}$의 그래프는 함수 $y=3^x$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.



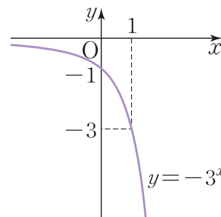
(2) 함수 $y=3^x+1$의 그래프는 함수 $y=3^x$의 그래프를 y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.



(3) 함수 $y=3^{-x}$의 그래프는 함수 $y=3^x$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 것이다.



(4) 함수 $y=-3^x$의 그래프는 함수 $y=3^x$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 것이다.



소단원의 학습 목표

1. 실생활 상황을 통해 로그함수의 뜻을 안다.
2. 로그함수의 그래프를 그려 보고, 그 성질을 이해한다.

여기서 배우는 용어 및 기호

로그함수

2 로그함수와 그 그래프

학습 목표

- 실생활 상황을 통해 로그함수의 뜻을 안다.
- 로그함수의 그래프를 그려 보고, 그 성질을 이해한다.

다 가 서 기 / **완충 용액**

많은 사람들은 건강하게 살기 위해 걷기, 달리기 등의 운동을 한다. 그러나 운동을 오래하면 젖산이 만들어지는데 이것이 혈액 속으로 녹아 들어가면 pH가 낮아져 위험해진다. 이때, 혈액 속의 pH가 낮아지는 것을 막기 위해 혈장이나 적혈구 등이 반응하여 혈액 속의 pH를 일정하게 유지한다.

체내 적정 pH는 7.35~7.45 이다.

이와 같이 산이나 염기가 들어 왔을 때 반응하여 pH를 일정하게 유지시켜주는 용액을 '완충 용액'이라고 한다.

사람의 혈액 속의 pH는 다음과 같은 완충 방정식(Henderson-Hasselbalch formula)을 이용하여 찾을 수 있다.

$$\mathrm{pH}=6.1+\log\frac{B}{C}$$

(단, B: 짝염기의 몰 농도, C: 약산의 몰 농도)

우리 몸은 평상시에 염기와 산의 몰 농도의 비 $\frac{B}{C}$가 약 20이 되도록 유지한다. 이때의 pH를 계산하면 다음과 같다.

$$\mathrm{pH}=6.1+\log 20 \fallingdotseq 7.4$$

다가서기 / 해설

체내 적정 pH는 항상 7.35~7.45 정도로 약한 알칼리성을 유지해야 한다. 만약 이 값이 ±0.2 이상 변한다면 사람은 생명을 잃을 수도 있다. 따라서 우리 몸의 pH는 조금이라도 변하면 생명에 지장을 줄 수 있으므로 혈액 속의 pH를 일정하게 유지하는 것이 중요한데 이와 같은 역할을 하는 것이 완충 용액이다. 우리 몸의 구성 성분인 단백질도 수용액의 액성에 따라 다양한 형태로 변하면서, 세포의 안팎에서 일정한 농도를 유지하게 하는 완충제 역할을 하고 있다.

참고 | 정보의 엔트로피

현대 사회에서는 엄청난 양의 정보 교환이 활발하게 이루어지고 있다. 이에 따라 암호학이 발달하고 정보에 관한 이론이 필요하게 되었다.

정보량은 정보를 코드화하는 데 필요한 최소의 비트 수를 뜻한다. 예를 들면 남녀를 구별하는 정보는 두 종류이고 남자를 0, 여자를 1로 나타낼 수 있으므로 정보량은 1비트이다. 또 요일을 구분하는 정보는 7종류고, 다음과 같이 나타낼 수 있으므로 정보량은 3비트이다.

월: 000, 화: 001, 수: 010, 목: 011,
금: 100, 토: 101, 일: 110

n비트의 정보 M에 대한 정보의 엔트로피(entropy) $H(M)$은 다음과 같이 로그함수로 정의되는데, 이 암호 시스템의 안전도를 말해 주기도 한다.

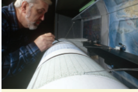
$$H(M)=-\log_2\frac{1}{n}$$

만일 어떤 암호 시스템이 64비트의 키를 사용한다면 이 암호 시스템의 엔트로피는 6이다.

61

01 로그함수의 뜻

탐구하기 / 지진의 세기



지진의 세기를 나타낼 때에는 '규모'라는 단위를 사용한다. 규모 y를 지진의 최대 진폭 x마이크로미터(μm)에 대하여 $y=\log x$로 정의할 때, 다음 표를 완성하여 보자.

진폭	10	10^2	10^3	10^4
규모	1.0		3.0	

알아보기 / 로그함수의 뜻을 알아보자.

보통 사람이 느낄 수 있는 지진의 최대 진폭은 $10^{4.3}$ μm 이상이다. 최대 진폭이 $10^{3.1}$ μm인 지진은 보통 사람들은 느끼지 못하고 기계로만 확인할 수 있다. 또 최대 진폭이 $10^{6.5}$ μm인 지진은 건물에 상당한 피해를 입힌다.

이때, 최대 진폭이 x μm인 지진을 규모 $\log x$로 나타낸다.

즉, 최대 진폭 $10^{3.1}$ μm를 규모 3.1로, 최대 진폭 $10^{6.5}$ μm를 규모 6.5로 나타낸다.

이와 같이 양수 x에 $\log x$를 대응시키면 그 값은 하나로 정해지므로 $y=\log x$는 양수 전체를 정의역으로 하는 함수이다.

$y=\log_2 x$에서 x와 y를 바꾸면 $y=2^x$이므로 $y=\log_2 x$는 $y=2^x$의 역함수임을 알 수 있다.

일반적으로 지수함수 $y=a^x$ $(a>0,\ a\neq1)$의 역함수

$$y=\log_a x$$

가 존재하며, 이 함수를 a를 밑으로 하는 **로그함수**라고 한다.

스스로 하기 / 익힘책 54쪽 | 익힘책 56쪽 | 익힘책 57쪽

1 로그함수 $f(x)=\log_3 x$에 대하여 다음을 구하여라.

(1) $f\left(\frac{1}{3}\right)$ (2) $f(1)$

(3) $f(3)$ (4) $f(243)$

탐구하기 / 풀이

$\log 10^2=2\log 10=2$

$\log 10^4=4\log 10=4$

따라서 표를 완성하면 다음과 같다.

진폭	10	10^2	10^3	10^4
규모	1.0	**2.0**	3.0	**4.0**

알아보기 / 해설

지수함수 $y=a^x$ $(a>0,\ a\neq1)$은 실수 전체의 집합에서 양의 실수 전체의 집합으로의 일대일 대응이므로 역함수가 존재한다.

$y=a^x$에서 로그의 정의에 의하여

$x=\log_a y$

이 등식에서 x와 y를 서로 바꾸면

$y=\log_a x$ $(a>0,\ a\neq1)$

따라서 지수함수 $y=a^x$의 역함수는

$y=\log_a x$

이때, 함수 $y=\log_a x$ $(a>0,\ a\neq1)$를 a를 밑으로 하는 로그함수라고 한다.

스스로 하기 / 풀이

1 (1) $f\left(\frac{1}{3}\right)=\log_3\frac{1}{3}=\log_3 3^{-1}$

$=-\log_3 3=\mathbf{-1}$

(2) $f(1)=\log_3 1=\mathbf{0}$

(3) $f(3)=\log_3 3=\mathbf{1}$

(4) $f(243)=\log_3 243=\log_3 3^5$

$=5\log_3 3=\mathbf{5}$

보충 학습

역함수 구하기

함수 $y=f(x)$의 역함수는 다음 순서로 구한다.

$y=f(x)$

↓ x를 y의 식으로 나타낸다.

$x=f^{-1}(y)$

↓ x와 y를 서로 바꾼다.

$y=f^{-1}(x)$

02 로그함수의 그래프와 성질

알 아 보 기 / 로그함수의 그래프와 그 성질에 대하여 알아보자.

로그함수를 영어로 logarithmic function 이라고 한다.

로그함수 $y=\log_a x\,(a>0,\ a\neq1)$는 지수함수 $y=a^x\,(a>0,\ a\neq1)$의 역함수이므로 로그함수 $y=\log_a x$의 정의역은 양의 실수 전체의 집합이고 치역은 실수 전체의 집합이다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

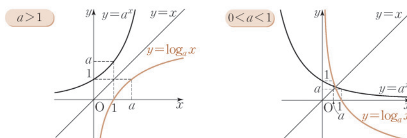
지수함수와 로그함수의 관계

$a>0,\ a\neq1$일 때

(1) $y=\log_a x \iff x=a^y$

(2) 로그함수 $y=\log_a x$는 지수함수 $y=a^x$의 역함수이다.

일반적으로 로그함수 $y=\log_a x$의 그래프는 지수함수 $y=a^x$의 그래프와 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다. 이것을 이용하여 로그함수 $y=\log_a x$의 그래프를 그리면 다음 그림과 같다.



위의 그래프로부터 다음과 같은 로그함수 $y=\log_a x\,(a>0,\ a\neq0)$의 성질을 알 수 있다.

로그함수 $y=\log_a x\ (a>0,\ a\neq1)$의 성질

(1) 정의역은 양의 실수 전체의 집합이고, 치역은 실수 전체의 집합이다.

(2) $a>1$일 때, x의 값이 증가하면 y의 값도 증가한다.
$0<a<1$일 때, x의 값이 증가하면 y의 값은 감소한다.

(3) 그래프는 점 $(1,\ 0)$과 점 $(a,\ 1)$을 지난다.

(4) 그래프의 점근선은 y축이다.

알아보기 / 해설

- $a>1$일 때, 지수함수 $y=a^x$은 증가함수이고, 일대일 대응이므로 역함수가 존재한다.
증가함수의 역함수는 역시 증가함수이므로 $a>1$일 때, 로그함수 $y=\log_a x$는 증가함수이다.
- 지수함수 $y=a^x$의 그래프와 마찬가지로 로그함수 $y=\log_a x$의 그래프도 $a>1$인 경우, $0<a<1$인 경우에 따라 증가, 감소 상태가 다르다.
- 역함수의 그래프는 원래 함수와 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 로그함수 $y=\log_a x$의 그래프는 지수함수 $y=a^x$의 그래프를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동하여 그린다.
(i) $y=a^x$의 그래프가 점 $(0,\ 1)$을 지나므로 $y=\log_a x$의 그래프는 점 $(1,\ 0)$을 지난다.
(ii) $y=a^x$의 그래프의 점근선이 x축이므로 $y=\log_a x$의 그래프의 점근선은 y축이다.
- 로그함수의 정의역은 양의 실수이어야 하므로
$y=\log_a(-x)$의 정의역은
$-x>0$, 즉 $x<0$
$y=\log_a(x-a)$의 정의역은
$x-a>0$, 즉 $x>a$
- $a>1$일 때, $x_1<x_2$이면
$\log_a x_1<\log_a x_2$
$0<a<1$일 때, $x_1<x_2$이면
$\log_a x_1>\log_a x_2$
- 일반적으로 $\log_{\frac{1}{a}} x=-\log_a x$이므로 로그함수 $y=\log_{\frac{1}{a}} x$의 그래프는 로그함수 $y=\log_a x$의 그래프와 x축에 대하여 대칭이다.

스스로 하기 / 풀이

1 (1) 정의역: 양의 실수 전체의 집합
치역: 실수 전체의 집합
x절편: $(1,\ 0)$
점근선: $x=0$

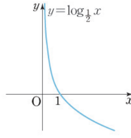
(2) 정의역: 양의 실수 전체의 집합
치역: 실수 전체의 집합
x절편: $(1,\ 0)$
점근선: $x=0$

함 께 하 기 / 익힘책 54쪽 | 익힘책 56쪽 | 익힘책 57쪽

1 로그함수 $y=\log_{\frac{1}{2}}x$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다. 이 그래프를 이용하여 다음 수의 대소를 비교하여라.

(1) $\log_{\frac{1}{2}}\sqrt{3}$, $\log_{\frac{1}{2}}2$

(2) $\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{4}$, $\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{3}$



풀이

$y=\log_{\frac{1}{2}}x$의 그래프에서 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소한다.

(1) 진수를 비교하면 $\sqrt{3}<2$이므로 $\mathbf{\log_{\frac{1}{2}}\sqrt{3}>\log_{\frac{1}{2}}2}$

(2) 진수를 비교하면 $\frac{1}{4}<\frac{1}{3}$이므로 $\mathbf{\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{4}>\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{3}}$

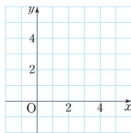
스 스 로 하 기 / 익힘책 54쪽 | 익힘책 56쪽 | 익힘책 57쪽

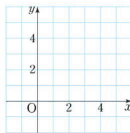
1 다음 로그함수의 정의역, 치역, x절편, 점근선을 말하여라.

(1) $y=\log x$ (2) $y=\log_{0.1}x$

2 지수함수 $y=4^x$ 및 지수함수 $y=\left(\frac{1}{4}\right)^x$의 그래프를 이용하여 다음 로그함수의 그래프를 그려라.

(1) $y=\log_4 x$ (2) $y=\log_{\frac{1}{4}}x$



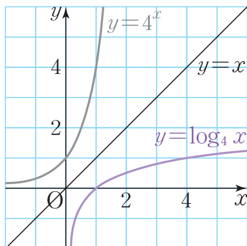


3 로그함수의 그래프를 이용하여 다음 수의 대소를 비교하여라.

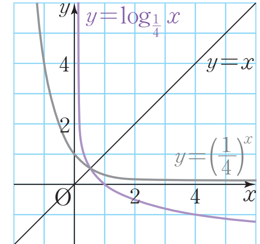
(1) $\log_3 5$, $\log_3 6$ (2) $\log_{\frac{1}{3}}2$, $\log_{\frac{1}{3}}\sqrt{5}$

스스로 하기 / 풀이

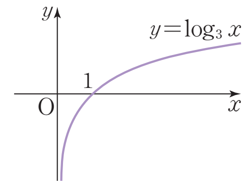
2 (1) 로그함수 $y=\log_4 x$는 지수함수 $y=4^x$의 역함수이므로 로그함수 $y=\log_4 x$의 그래프와 지수함수 $y=4^x$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.



(2) 로그함수 $y=\log_{\frac{1}{4}}x$는 지수함수 $y=\left(\frac{1}{4}\right)^x$의 역함수이므로 로그함수 $y=\log_{\frac{1}{4}}x$의 그래프와 지수함수 $y=\left(\frac{1}{4}\right)^x$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.



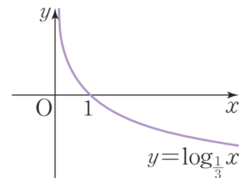
3 (1) 로그함수 $y=\log_3 x$의 그래프에서 로그의 밑 3이 1보다 크므로 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가한다.



진수를 비교하면 $5<6$이므로

$\mathbf{\log_3 5<\log_3 6}$

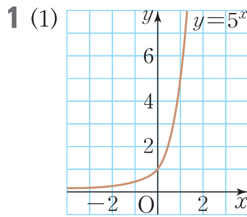
(2) 로그함수 $y=\log_{\frac{1}{3}}x$의 그래프에서 로그의 밑 $\frac{1}{3}$이 1보다 작으므로 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소한다.

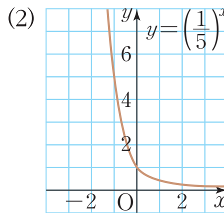


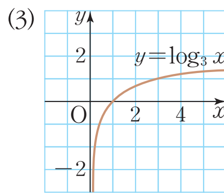
진수를 비교하면 $2<\sqrt{5}$이므로

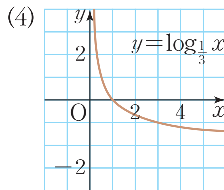
$\mathbf{\log_{\frac{1}{3}}2>\log_{\frac{1}{3}}\sqrt{5}}$

중단원 확인하기 / 풀이

1 (1)


(2)


(3)


(4)


지수함수, 로그함수의 그래프

이해

1 다음 지수함수와 로그함수의 그래프를 그려라.

(1) $y=5^x$　　(2) $y=\left(\frac{1}{5}\right)^x$

(3) $y=\log_3 x$　　(4) $y=\log_{\frac{1}{3}} x$

지수함수의 그래프

의사소통

2 지수함수 $y=4^x$의 그래프와 다음 지수함수 그래프의 관계를 말하고, 그 그래프를 그려라.

(1) $y=4^{x-1}$　　(2) $y=\left(\frac{1}{4}\right)^x$

지수와 로그의 대소 비교

이해

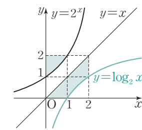
3 다음 세 수의 대소를 비교하여라.

$\sqrt[3]{25}$,　$\sqrt[4]{125}$,　$\log_2 8$

지수함수와 로그함수

이해

4 오른쪽 그림은 두 함수 $y=2^x$, $y=\log_2 x$의 그래프 및 직선 $y=x$를 나타낸 것이다. 그림에서 색칠한 부분의 넓이의 합을 구하여라.



지진의 발생 규모

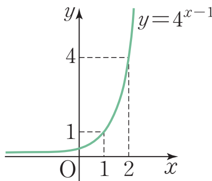
문제 해결

5 어느 지역에서 1년 동안 발생하는 규모가 M이상인 지진의 평균 발생 횟수를 N회라고 하면 다음 관계식이 성립한다고 한다.

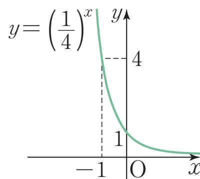
$$\log N=5.4-0.9M$$

이 지역에서 규모가 x 이상인 지진은 1년에 평균 한 번 발생할 때, x의 값을 구하여라.

2 (1) $y=4^{x-1}$의 그래프는 $y=4^x$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.



(2) $y=\left(\frac{1}{4}\right)^x$의 그래프는 $y=4^x$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 것이다.



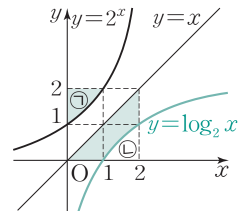
3 $\sqrt[3]{25}=5^{\frac{2}{3}}$, $\sqrt[4]{125}=5^{\frac{3}{4}}$이고 $\frac{2}{3}<\frac{3}{4}$이므로

$\sqrt[3]{25}<\sqrt[4]{125}$

또 $\log_2 8=3=\sqrt[3]{27}=\sqrt[4]{81}$이므로

$\boldsymbol{\sqrt[3]{25}<\log_2 8<\sqrt[4]{125}}$

4 $y=2^x$의 그래프와 $y=\log_2 x$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 오른쪽 그림에서 ㉠과 ㉡의 넓이는 같다.



따라서 구하는 넓이는 $\frac{1}{2}\times2\times2=\mathbf{2}$

5 규모 x 이상인 지진이 1년에 평균 한 번 발생하므로 주어진 식에 $M=x$, $N=1$을 대입하면

65

수 학 실 험 실

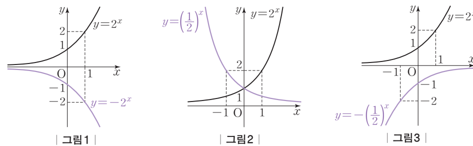
지수함수 그래프와 로그함수 그래프의 대칭이동

1. 지수함수 $y=2^x$의 그래프의 대칭이동

(1) x축에 대한 대칭이동: 지수함수 $y=2^x$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동하면 y좌표가 $-y$로 바뀌므로 $-y=2^x$, 즉 $y=-2^x$의 그래프가 된다. …… | 그림1 |

(2) y축에 대한 대칭이동: 지수함수 $y=2^x$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동하면 x좌표가 $-x$로 바뀌므로 $y=2^{-x}$, 즉 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$의 그래프가 된다. …… | 그림2 |

(3) 원점에 대한 대칭이동: 지수함수 $y=2^x$의 그래프를 원점에 대하여 대칭이동하면 x좌표는 $-x$로, y좌표는 $-y$로 바뀌므로 $-y=2^{-x}$, 즉 $y=-\left(\frac{1}{2}\right)^x$의 그래프가 된다. …… | 그림3 |



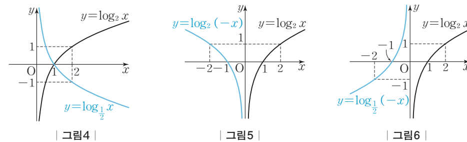
| 그림1 | | 그림2 | | 그림3 |

2. 로그함수 $y=\log_2 x$의 그래프의 대칭이동

(1) x축에 대한 대칭이동: 로그함수 $y=\log_2 x$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동하면 y좌표가 $-y$로 바뀌므로 $-y=\log_2 x$, 즉 $y=\log_{\frac{1}{2}} x$의 그래프가 된다. …… | 그림4 |

(2) y축에 대한 대칭이동: 로그함수 $y=\log_2 x$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동하면 x좌표가 $-x$로 바뀌므로 $y=\log_2(-x)$의 그래프가 된다. …… | 그림5 |

(3) 원점에 대한 대칭이동: 로그함수 $y=\log_2 x$의 그래프를 원점에 대하여 대칭이동하면 x좌표는 $-x$로, y좌표는 $-y$로 바뀌므로 $-y=\log_2(-x)$, 즉 $y=\log_{\frac{1}{2}}(-x)$의 그래프가 된다. …… | 그림6 |



| 그림4 | | 그림5 | | 그림6 |

$\log 1=5.4-0.9x$

$\therefore x=6$

참고 | 리히터 규모

규모는 지진이 일어난 곳(진앙지)으로부터 100 km 떨어진 지점에서 지진계로 측정한 지진파의 최대 진폭을 이용하여 구분한다.

최대 진폭이 I 마이크로(micro)일 때, 규모 M은 로그를 이용하여 다음과 같이 정의한다.

$$M=\log_{10} I$$

한편 규모 M인 지진에 의해 발생하는 에너지 E는 $\log E=11.8+1.5M$인 관계가 성립하므로 $10^{1.5}\fallingdotseq 32$임을 이용하면 규모가 1만큼 증가할 때, 에너지가 약 32배로 증가하게 됨을 알 수 있다.

보충 학습

- 로그함수 $y=\log_a x\ (a>0,\ a\neq 1)$의 그래프를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동하면
  $y-n=\log_a(x-m)$
  $\therefore y=\log_a(x-m)+n$

- 로그함수 $y=\log_a x$의 그래프를 로그함수 $y=\log_a(x-m)+n$의 그래프로 평행이동하면 정의역은 $\{x\,|\,x>0\}$에서 $\{x\,|\,x>m\}$으로 점근선의 방정식은 $x=0$에서 $x=m$으로 바뀐다.

- $y=\log_a x^n$과 $y=n\log_a x$의 차이
  (i) n이 짝수일 때
  $y=\log_a x^n$의 정의역은 $x\neq 0$인 실수 전체의 집합이고, $y=n\log_a x$의 정의역은 $x>0$인 실수 전체의 집합이다.
  (ii) n이 홀수일 때
  두 함수 모두 정의역은 $x>0$인 실수 전체의 집합이고, 그래프가 같다.

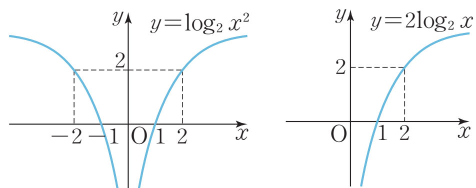
예를 들어 $y=\log_2 x^2$과 $y=2\log_2 x$를 비교하여 보자.

로그함수는 (진수)>0이어야 하므로

함수 $y=\log_2 x^2$은 $x^2>0$, 즉 $x\neq 0$인 실수 전체의 집합이 정의역이다.

함수 $y=2\log_2 x$는 $x>0$인 실수 전체의 집합이 정의역이다.

다음과 같이 두 함수의 그래프를 각각 그려 보면 다른 함수임을 알 수 있다.



중단원 평가 문제

정답과 풀이 p.231

01 기본

함수 $f(x)=2^{2x+1}$일 때, 다음 중 $f(x+1)-2f(x)$와 같은 것은?

① 2　② 4　③ $f(x)$
④ $2f(x)$　⑤ $4f(x)$

02 바탕

함수 $y=3^x$ 의 그래프를 어떻게 이동하면 다음 함수의 그래프가 되는지 말하여라.

(1) $y=3^{x+2}-1$　(2) $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x+2$

03 바탕

다음 중 함수 $y=2^x$의 그래프를 평행이동 또는 대칭이동한 그래프를 나타내는 식이 <u>아닌</u> 것은?

① $y=(-2)\cdot 2^x$　② $y=(-1)\cdot 2^x$　③ $y=4\cdot 2^x$
④ $y=2^{2x}$　⑤ $y=8\cdot 2^x$

04 기본

함수 $y=3^{2x+1}-3$의 그래프는 함수 $y=9^x$의 그래프를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 그래프와 일치한다. 이때, a의 값은?

① -3　② -1　③ $-\frac{1}{2}$　④ $\frac{1}{2}$　⑤ 1

05 기본

함수 $f(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2-2x+a}$의 최댓값이 27일 때, 상수 a의 값은?

① -2 ② -1 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

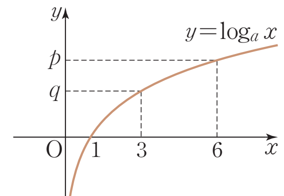
06 바탕

로그함수 $y=\log_2 x$의 그래프를 y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 후, y축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식이 $y=\log_2 ax$이다. 이때, 상수 a의 값은?

① -5 ② -4 ③ -3 ④ -2 ⑤ -1

07 실력

오른쪽 그림은 $f(x)=\log_a x$의 그래프이다. 이때, $f(18)$의 값을 p, q로 나타낸 것은?



① $-p+2q$ ② $p+q$ ③ $p+2q$
④ $2p-q$ ⑤ $2p+q$

08 기본

함수 $y=(\log_2 x)^2-\log_2 x^2-1$의 그래프는 $x=a$에서 최솟값 b를 갖는다. 이때, $a+b$의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

09 실력

실수 x, y가 $\log_3 y=1-\log_3 x$를 만족할 때, $x+2y$의 최솟값은?
(단, $x>0$, $y>0$)

① 0 ② $2\sqrt{2}$ ③ 3
④ $3\sqrt{2}$ ⑤ $2\sqrt{6}$

대단원 평가 문제

정답과 풀이 p.232

01

다음 보기 중 옳은 것을 모두 고른 것은?

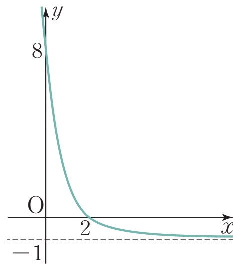
보기

ㄱ. 제곱근 25는 5이다.
ㄴ. $\sqrt{\sqrt[4]{3}}=\sqrt[12]{3}$
ㄷ. $(\sqrt{5})^{3\sqrt{3}}=(5\sqrt{5})^{\sqrt{3}}$
ㄹ. $\sqrt{2}<\sqrt[3]{3}<\sqrt[6]{7}$

① ㄱ, ㄴ ② ㄱ, ㄷ ③ ㄱ, ㄹ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄷ, ㄹ

02

오른쪽 그림은 지수함수 $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$의 그래프를 평행이동한 것이다. 이 그래프의 식으로 알맞은 것은?



① $y=3^{-x+2}-1$
② $y=3^{-x+2}+1$
③ $y=3^{-x-2}-1$
④ $y=3^{-x-2}+1$
⑤ $y=3^{-x-1}-1$

03

모든 실수 x에 대하여 $\log_a(ax^2-6ax+3)$이 정의될 때, 다음 중 a의 값이 될 수 있는 것은?

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{3}{2}$
④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

04

$\log 79=1.8976$일 때, $\log x=\overline{2}.8976$을 만족하는 x의 값은?

① 0.079 ② 0.79 ③ 7.9
④ 790 ⑤ 7900

05

두 함수 $f(x)=\left(\frac{1}{4}\right)^x$, $g(x)=\log_2 x$에 대하여 $(g\circ f)(-23)$의 값은?

① 42 ② 44 ③ 46
④ 48 ⑤ 50

06

$\log_{100}a=-0.1505$일 때, $\log100a$의 지표와 가수를 차례로 나열한 것은?

① 0, 0.1505 ② 0, 0.6990
③ 1, 0.1505 ④ 1, 0.6990
⑤ 1, 0.8495

07

$\log_{\sqrt{a}}2=\log_b16$일 때, $\log_{ab}a$의 값은?

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ $\frac{3}{2}$
④ $\frac{4}{3}$ ⑤ $\frac{3}{4}$

08

$\left(\frac{1}{64}\right)^{\frac{1}{n}}$이 자연수가 되도록 하는 정수 n의 개수를 m이라 하고, 그 정수의 합을 S라고 할 때, $m+S$의 값은?

① -12 ② -10 ③ -8
④ -6 ⑤ -4

09

a, b는 양수이고 $a^b=b^a$, $b=9a$일 때, a의 값은?

① 9 ② $\frac{1}{9}$ ③ $\sqrt[9]{9}$
④ $\sqrt[3]{9}$ ⑤ $\sqrt[4]{3}$

10

$a^{2x}=2$일 때, $\frac{a^{3x}+a^{-3x}}{a^x+a^{-x}}$의 값은? (단, $a>0$)

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$
④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

11

$a=\sqrt{3-2\sqrt{2}}$일 때,
$\log_2(a^3+1)-\log_2(a^2-a+1)$의 값은?

① 0 ② $\frac{1}{2}$ ③ 1
④ 2 ⑤ 4

12

1.08^n의 정수 부분이 세 자리의 수가 되기 위한 정수 n의 값의 범위는?

(단, $\log 2=0.3010$, $\log 3=0.4771$)

① $61\leq n\leq 91$ ② $61\leq n\leq 90$
③ $60\leq n\leq 90$ ④ $50\leq n\leq 90$
⑤ $50\leq n\leq 80$

13

$\log x$의 지표가 3이고, $\log x$의 가수와 $\log\sqrt{x}$의 가수의 합이 1일 때, x의 값은?

① $10^{\frac{2}{3}}$ ② $10^{\frac{5}{3}}$ ③ $10^{\frac{8}{3}}$
④ $10^{\frac{10}{3}}$ ⑤ $10^{\frac{13}{3}}$

14

규모가 M인 지진으로부터 방출된 파동 에너지 E 사이에는 $\log E=11.8+1.5M$인 관계식이 성립할 때, 규모가 6인 지진의 파동 에너지는 규모가 4인 지진의 파동 에너지의 몇 배인가?

① 50배 ② 100배 ③ 500배
④ 1000배 ⑤ 5000배

15

함수 $y=2^{1-x}(-1\leq x\leq 2)$의 최댓값과 최솟값을 차례로 나열한 것은?

① $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ ② 2, $\frac{1}{2}$ ③ 2, 0
④ 4, $\frac{1}{2}$ ⑤ 4, 0

16

x에 대한 이차방정식

$$x^2-(2+\log_{10}pq)x+\log_{10}p^2q^3=0$$

의 두 근이 4, 5일 때, $\frac{q}{p}$의 값은?

① 10 ② 100 ③ 1000
④ 10000 ⑤ 100000

17 UP!!

0이 아닌 실수 a, b, c에 대하여

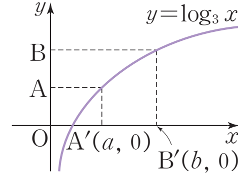
$$\frac{3}{a}+\frac{4}{b}=\frac{6}{c},\ 16^a=27^b=x^c$$

이 성립할 때, 양수 x의 값은?

① 6 ② 12 ③ 24
④ 36 ⑤ 64

18 UP!!

다음 그림에서 점선은 x축과 y축에 각각 평행하다. $\overline{AB}=2$일 때, $\frac{b}{a}$의 값은?



① 6 ② 8 ③ 9
④ $\log_3 2$ ⑤ $\log_2 3$

19 서술형

x에 대한 이차방정식 $2x^2-3x+a=0$의 두 근의 합이 $\log z$일 때, $\log\frac{1}{z}$의 지표와 가수를 각각 구하여라.

20 서술형

$0<a<1$에서 함수 $y=a^{-x^2+2x+3}$의 최솟값이 $\frac{16}{81}$일 때, 상수 a의 값을 구하여라.

지수와 로그

중단원 평가 문제

▶ 1. 지수와 로그 / P_59

01 $\sqrt{2\sqrt[3]{4\sqrt[4]{8}}}=\sqrt{2\sqrt[3]{4\times 8^{\frac{1}{4}}}}=\sqrt{2\sqrt[3]{2^2\times 2^{\frac{3}{4}}}}$

$=\sqrt{2\sqrt[3]{2^{\frac{11}{4}}}}=\sqrt{2\times 2^{\frac{11}{12}}}=\sqrt{2^{\frac{23}{12}}}$

$=2^{\frac{23}{24}}$

답 ④

02 $\sqrt[3]{a^2}=\sqrt[4]{\sqrt{a^k}}$ 을 유리수인 지수로 표현하면

$a^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{k}{8}}$

$\frac{2}{3}=\frac{k}{8}$이므로 $k=\frac{16}{3}$

답 ②

03 a는 32의 세제곱근이고, b는 27의 다섯제곱근이므로

$a=\sqrt[3]{32}=\sqrt[3]{2^5},\ b=\sqrt[5]{27}=\sqrt[5]{3^3}$

$\therefore \sqrt[5]{a^3}+\sqrt[3]{b^5}=\sqrt[5]{(\sqrt[3]{2^5})^3}+\sqrt[3]{(\sqrt[5]{3^3})^5}=\sqrt[5]{2^5}+\sqrt[3]{3^3}$

$=2+3=5$

답 ②

04 $(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{3})(\sqrt[3]{16}-\sqrt[3]{12}+\sqrt[3]{9})$

$=(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{3})(\sqrt[3]{4^2}-\sqrt[3]{4}\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{3^2})$

$=(\sqrt[3]{4})^3+(\sqrt[3]{3})^3$

$=4+3=7$

답 7

05 $\sqrt{2+\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{4+2\sqrt{3}}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$

$\sqrt{2-\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{4-2\sqrt{3}}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$

$\therefore (\sqrt{2+\sqrt{3}}-\sqrt{2-\sqrt{3}})^{\frac{2}{3}}$

$=\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}\right)^{\frac{2}{3}}$

$=(\sqrt{2})^{\frac{2}{3}}=(2^{\frac{1}{2}})^{\frac{2}{3}}=2^{\frac{1}{3}}=2^x$

$\therefore x=\frac{1}{3}$

답 ①

06 $a^{\frac{1}{4}}=x,\ b^{\frac{1}{4}}=y$로 놓으면

$a^{\frac{1}{2}}=x^2,\ b^{\frac{1}{2}}=y^2$

$\therefore (a^{\frac{1}{4}}-b^{\frac{1}{4}})(a^{\frac{1}{4}}+b^{\frac{1}{4}})(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}})$

$=(x-y)(x+y)(x^2+y^2)$

$=(x^2-y^2)(x^2+y^2)$

$=x^4-y^4$

$=(a^{\frac{1}{4}})^4-(b^{\frac{1}{4}})^4$

$=a-b$

답 ①

07 $x=\frac{3^{\frac{1}{3}}-3^{-\frac{1}{3}}}{2},\ x^2=\frac{3^{\frac{2}{3}}-2+3^{-\frac{2}{3}}}{2^2}$

$x^2+1=\frac{3^{\frac{2}{3}}+2+3^{-\frac{2}{3}}}{2^2}=\left(\frac{3^{\frac{1}{3}}+3^{-\frac{1}{3}}}{2}\right)^2$

$3^{\frac{1}{3}}+3^{-\frac{1}{3}}>0$이므로

$\sqrt{x^2+1}=\frac{3^{\frac{1}{3}}+3^{-\frac{1}{3}}}{2}$

$\therefore (x-\sqrt{x^2+1})^3=\left(\frac{3^{\frac{1}{3}}-3^{-\frac{1}{3}}}{2}-\frac{3^{\frac{1}{3}}+3^{-\frac{1}{3}}}{2}\right)^3$

$=(-3^{-\frac{1}{3}})^3=-3^{-1}=-\frac{1}{3}$

답 ②

08 $67^x=9$에서

$67=(3^2)^{\frac{1}{x}}=3^{\frac{2}{x}}$

$603^y=81$에서

$603=(3^4)^{\frac{1}{y}}=3^{\frac{4}{y}}$

$3^{\frac{2}{x}}\div 3^{\frac{4}{y}}=3^{\frac{2}{x}-\frac{4}{y}}=\frac{1}{9}=3^{-2}$

$\therefore \frac{2}{x}-\frac{4}{y}=-2$

답 ①

09 (1) $\log_2 3+\log_2 6-4\log_2\sqrt{6}$

$=\log_2 3+\log_2 6-\log_2(\sqrt{6})^4$

$=\log_2\frac{3\times 6}{36}$

$=\log_2\frac{1}{2}$

$=\log_2 2^{-1}=-1$

(2) $\log_3\sqrt{16}-\frac{1}{2}\log_3\frac{1}{5}-\frac{3}{2}\log_3\sqrt[3]{80}$

$=\log_3 4-\log_3\sqrt{\frac{1}{5}}-\log_3(80^{\frac{1}{3}})^{\frac{3}{2}}$

$=\log_3\left(4\div\frac{1}{\sqrt{5}}\div\sqrt{80}\right)$

$=\log_3\left(4\times\sqrt{5}\times\frac{1}{4\sqrt{5}}\right)$

$=\log_3 1$

$=0$

답 (1) -1 (2) 0

10 $\tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\frac{1}{\tan\theta}$

$\tan\theta\tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\tan\theta\frac{1}{\tan\theta}=1$

$\log_2(\tan 1^\circ\times\tan 2^\circ\times\cdots\times\tan 89^\circ)$

$=\log_2\{(\tan 1^\circ\times\tan 89^\circ)\times(\tan 2^\circ\times\tan 88^\circ)$

$\times\cdots\times(\tan 44^\circ\times\tan 46^\circ)\times\tan 45^\circ\}$

$=\log_2 1$

$=0$

답 ①

11 $\sqrt{10\sqrt{10}}=10^{\frac{3}{4}}$, $\sqrt{5\sqrt{5}}=5^{\frac{3}{4}}$이므로

$\log_5\sqrt{10\sqrt{10}}+\log_{10}\sqrt{5\sqrt{5}}$

$=\log_5 10^{\frac{3}{4}}+\log_{10}5^{\frac{3}{4}}$

$=\frac{3}{4}(\log_5 10+\log_{10}5)$

$=\frac{3}{4}\left(\frac{\log_2 10}{\log_2 5}+\frac{\log_2 5}{\log_2 10}\right)$

$=\frac{3}{4}\left\{\frac{\log_2(2\times5)}{\log_2 5}+\frac{\log_2 5}{\log_2(2\times5)}\right\}$

$=\frac{3}{4}\left(\frac{1+\log_2 5}{\log_2 5}+\frac{\log_2 5}{1+\log_2 5}\right)$

$=\frac{3}{4}\left(\frac{a+1}{a}+\frac{a}{a+1}\right)$

$=\frac{3}{4}\left\{\frac{(a+1)^2+a^2}{a(a+1)}\right\}$

$=\frac{3(2a^2+2a+1)}{4a(a+1)}$

답 ③

12 밑의 변환 공식에 의하여

$\log_N A$

$=\log_N 2+\log_N 4+\log_N 6+\log_N 8+\log_N 10$

$=\log_N 2\cdot4\cdot6\cdot8\cdot10=\log_N 3840$

$\therefore A=3840$

$B=(2\log_a b)\cdot(2\log_b c)\cdot(2\log_c a)$

$=2^3\cdot\log_a b\cdot\log_b c\cdot\log_c a$

$=2^3\cdot\frac{\log b}{\log a}\cdot\frac{\log c}{\log b}\cdot\frac{\log a}{\log c}$

$=2^3=8$

$\therefore \frac{A}{B}=\frac{3840}{8}=480$

답 ④

13 (1) 6^{50}에 상용로그를 취하면

$\log 6^{50}=50\log 6$

$=50\log(2\times3)$

$=50(\log 2+\log 3)$

$=50(0.3010+0.4771)$

$=38.905$

따라서 $\log 6^{50}$의 지표가 38이므로 6^{50}은 39자리의 정수이다.

(2) $\left(\frac{1}{2}\right)^{60}$에 상용로그를 취하면

$\log\left(\frac{1}{2}\right)^{60}=-60\log 2$

$=-60\times0.3010$

$=-18.06$

$=-18-0.06$

$=-18-1+(1-0.06)$

$=-19+0.94=\overline{19}.94$

따라서 $\log\left(\frac{1}{2}\right)^{60}$의 지표가 -19이므로 $\left(\frac{1}{2}\right)^{60}$은 소수 19째 자리에서 처음으로 0이 아닌 숫자가 나타난다.

답 (1) 39자리 (2) 소수 19째 자리

14 $\log 20=\log(2\times10)=\log 2+\log 10$

$=1+\log 2$

$0<\log 2<1$이므로 $\log 20$의 가수는 $\log 2$이다.

$\therefore\ \alpha=\log 2$

$10^{\alpha}=10^{\log 2}=2,\ 10^{-\alpha}=\frac{1}{10^{\alpha}}=\frac{1}{2}$이므로

$\frac{10}{10^{\alpha}+10^{-\alpha}}=\frac{10}{2+\frac{1}{2}}=\frac{10}{\frac{5}{2}}=4$

답 4

15 1999년으로부터 1년 후의 가격은

1000×0.8(만 원)

2년 후의 가격은

1000×0.8^2(만 원)

3년 후의 가격은

1000×0.8^3(만 원)

따라서 n년 후의 가격은

1000×0.8^n(만 원)

n년 후에 100만 원 미만으로 평가된다고 하면

$1000\times0.8^n<100$

$0.8^n<\frac{1}{10}$

양변에 상용로그를 취하면

$n\log 0.8<-1$

$n>\frac{-1}{\log 0.8}=\frac{1}{1-3\log 2}=\frac{1}{1-0.9030}$

$\fallingdotseq 10.31$

따라서 11년 후인 2010년 초에 처음으로 100만 원 미만으로 평가된다.

답 ③

▶ 2. 지수함수와 로그함수 / P_74

01 $f(x+1)-2f(x)$

$=2^{2(x+1)+1}-2\cdot2^{2x+1}$

$=2^{2+(2x+1)}-2\cdot2^{2x+1}$

$=2^2\cdot2^{2x+1}-2\cdot2^{2x+1}$

$=(4-2)2^{2x+1}$

$=2\cdot2^{2x+1}=2f(x)$

답 ④

02 (1) $y=3^{x+2}-1$에서 $y+1=3^{x+2}$

따라서 $y=3^x$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한다.

(2) $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x+2$에서 $y-2=3^{-x}$

따라서 $y=3^x$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 후 다시 y축의 방향으로 2만큼 평행이동한다.

답 풀이 참조

03 ① $y=(-2)\cdot2^x=-2^{x+1}$

$y=2^x$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 후 x축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이다.

② $y=(-1)\cdot2^x=-2^x$

$y=2^x$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 것이다.

③ $y=4\cdot2^x=2^{x+2}$

$y=2^x$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이다.

④ $y=2^{2x}=4^x$은 $y=2^x$과 밑이 다르므로 $y=2^x$의 그래프를 평행이동 또는 대칭이동하여도 $y=2^{2x}$의 그래프가 될 수 없다.

⑤ $y=8\cdot2^x=2^{x+3}$

$y=2^x$의 그래프를 x축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 것이다.

답 ④

04 $y=3^{2x+1}-3=3^{2\left(x+\frac{1}{2}\right)}-3=9^{x+\frac{1}{2}}-3$

따라서 함수 $y=3^{2x+1}-3$의 그래프는 함수 $y=9^x$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\frac{1}{2}$만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 것이다.

$\therefore\ a=-\frac{1}{2}$

답 ③

05 함수 $f(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2-2x+a}$은 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소하므로 x^2-2x+a가 최솟값을 가질 때, $f(x)$가 최댓값을 갖는다.

이때, $x^2-2x+a=(x-1)^2+a-1$이므로

$x=1$에서 $f(x)$가 최댓값을 갖는다.

$\therefore f(1)=\left(\frac{1}{3}\right)^{a-1}=27$

$3^{1-a}=3^3$

$1-a=3 \qquad \therefore a=-2$

답 ①

06 $y=\log_2 x$의 그래프를 y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 그래프의 식은 $y=\log_2 x$에 y 대신 $y-2$를 대입한 것이므로

$y-2=\log_2 x$

$y=\log_2 x+2$

$y=\log_2 x+\log_2 2^2$

$\therefore y=\log_2 4x$ ……㉠

㉠의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은 ㉠에 x 대신 $-x$를 대입한 것이므로

$y=\log_2 4(-x)$

$\therefore y=\log_2(-4x)$ ……㉡

㉡과 $y=\log_2 ax$를 비교하여 상수 a의 값을 구하면 $\quad a=-4$

답 ②

07 주어진 그래프에서

$f(3)=\log_a 3=q$

$f(6)=\log_a 6=p$

이때, $\log_a 6=\log_a(2\times3)$

$=\log_a 2+\log_a 3$

$=\log_a 2+q=p$

이므로 $\log_a 2=p-q$

$\therefore f(18)=\log_a 18$

$=\log_a(3^2\times2)$

$=2\log_a 3+\log_a 2$

$=2q+p-q$

$=p+q$

답 ②

08 $\log_2 x=t$라고 하면

$\log_2 x^2=2\log_2 x=2t$

$\therefore y=t^2-2t-1=(t-1)^2-2$

따라서 주어진 함수는 $t=1$, 즉 $x=2$에서 최솟값 -2를 가지므로

$a=2,\ b=-2$

$\therefore a+b=0$

답 ③

09 $\log_3 y=1-\log_3 x$

$=\log_3 3-\log_3 x=\log_3\frac{3}{x}$

$\therefore y=\frac{3}{x}$

$\therefore xy=3$

$x>0,\ y>0,\ xy=3$이므로

$x+2y\ge2\sqrt{x\cdot2y}=2\sqrt{6}$

따라서 $x+2y$의 최솟값은 $2\sqrt{6}$이다.

답 ⑤

대단원 평가 문제

p.76~79

01 ㄱ. 제곱근 25는 $\sqrt{25}$이므로 $\sqrt{25}=5$이다.

ㄴ. $\sqrt{\sqrt[4]{3}}=\sqrt[2\times4]{3}=\sqrt[8]{3}\neq\sqrt[12]{3}$

ㄷ. $(\sqrt{5})^{3\sqrt{3}}=\{(\sqrt{5})^3\}^{\sqrt{3}}=(5\sqrt{5})^{\sqrt{3}}$

ㄹ. $\sqrt{2}=2^{\frac{1}{2}}=2^{\frac{6}{12}}=(2^6)^{\frac{1}{12}}=64^{\frac{1}{12}}$

$\sqrt[3]{3}=3^{\frac{1}{3}}=3^{\frac{4}{12}}=(3^4)^{\frac{1}{12}}=81^{\frac{1}{12}}$

$\sqrt[6]{7}=7^{\frac{1}{6}}=7^{\frac{2}{12}}=(7^2)^{\frac{1}{12}}=49^{\frac{1}{12}}$

$\therefore \sqrt[6]{7}<\sqrt{2}<\sqrt[3]{3}$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ②

02 $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$의 그래프를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y-n=\left(\frac{1}{3}\right)^{x-m}$ $\therefore y=\left(\frac{1}{3}\right)^{x-m}+n$

그런데 $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$의 그래프의 점근선은 $y=0$이고, 주어진 그래프의 점근선은 $y=-1$이므로 y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이다.

$\therefore n=-1$

또한 주어진 그래프가 점 $(0,\ 8)$을 지나므로

$8=\left(\frac{1}{3}\right)^{0-m}-1,\ 9=\left(\frac{1}{3}\right)^{-m}$

$9=3^m$ $\therefore m=2$

따라서 구하는 그래프의 식은

$y=\left(\frac{1}{3}\right)^{x-2}-1$

$=3^{-(x-2)}-1$

$=3^{-x+2}-1$

답 ①

03 (i) 밑의 조건에서

$a>0,\ a\neq1$

(ii) 진수의 조건에서 모든 실수 x에 대하여 $ax^2-6ax+3>0$이 되려면

$a>0,\ \frac{D}{4}=9a^2-3a<0$

$\therefore 0<a<\frac{1}{3}$

(i), (ii)에서 $0<a<\frac{1}{3}$

답 ①

04 $\log 79$와 $\log x$의 가수가 같으므로 x는 79와 숫자의 배열이 같다.

또 $\log x$의 지표가 -2이므로 x는 소수 둘째 자리에서 처음으로 0이 아닌 숫자가 나타난다.

$\therefore x=0.079$

답 ①

05 $f(x)=\left(\frac{1}{4}\right)^x=2^{-2x}$이므로

$(g\circ f)(x)=\log_2 2^{-2x}$

$=-2x$

$\therefore (g\circ f)(-23)=(-2)\times(-23)=46$

답 ③

06 $\log_{100} a=\log_{10^2} a=\frac{1}{2}\log a$

$\frac{1}{2}\log a=-0.1505$에서

$\log a=-0.3010$

$\therefore \log 100a=\log 100+\log a$

$=2+(-0.3010)$

$=1.6990$

따라서 $\log 100a$의 지표는 1, 가수는 0.6990이다.

답 ④

07 $\log_{\sqrt{a}} 2=\log_b 16$에서

$\frac{1}{\log_2 \sqrt{a}}=\frac{1}{\log_{16} b}$

$\frac{2}{\log_2 a}=\frac{4}{\log_2 b}$

$\therefore \log_2 b=2\log_2 a$

$\therefore \log_{ab} a=\frac{\log_2 a}{\log_2 ab}$

$=\frac{\log_2 a}{\log_2 a+\log_2 b}$

$=\frac{\log_2 a}{\log_2 a+2\log_2 a}$

$=\frac{\log_2 a}{3\log_2 a}$

$=\frac{1}{3}$

답 ①

08 $\left(\frac{1}{64}\right)^{\frac{1}{n}}=(2^{-6})^{\frac{1}{n}}=2^{-\frac{6}{n}}$

$2^{-\frac{6}{n}}$이 자연수가 되려면 $-\frac{6}{n}$이 음이 아닌 정수이어야 한다.

따라서 정수 n의 값은

$-1,\ -2,\ -3,\ -6$

$\therefore m=4,\ S=-12$

$\therefore m+S=-8$

답 ③

09 $a^b=b^a$에서

$a^{\frac{b}{a}}=b$ ……㉠

또 $b=9a$에서 $\frac{b}{a}=9$이므로 ㉠에 대입하면

$a^9=9a$

그런데 $a\neq 0$이므로

$a^8=9$

$\therefore a=9^{\frac{1}{8}}=(3^2)^{\frac{1}{8}}=3^{\frac{1}{4}}=\sqrt[4]{3}$

답 ⑤

10 분자, 분모에 각각 a^x을 곱하면

$$\frac{a^{3x}+a^{-3x}}{a^x+a^{-x}}=\frac{a^x(a^{3x}+a^{-3x})}{a^x(a^x+a^{-x})}=\frac{a^{4x}+a^{-2x}}{a^{2x}+1}=\frac{4+\frac{1}{2}}{2+1}=\frac{3}{2}$$

답 ③

11 $a=\sqrt{3-2\sqrt{2}}=\sqrt{2}-1$이므로

$\log_2(a^3+1)-\log_2(a^2-a+1)$

$=\log_2\frac{a^3+1}{a^2-a+1}$

$=\log_2\frac{(a+1)(a^2-a+1)}{a^2-a+1}$

$=\log_2(a+1)$

$=\log_2\sqrt{2}$

$=\frac{1}{2}$

답 ②

12 $\log 1.08=\log\frac{2^2\times 3^3}{100}$

$=\log(2^2\times 3^3)-\log 100$

$=2\log 2+3\log 3-2$

$=0.6020+1.4313-2$

$=0.0333$

$\log 1.08^n$의 지표는 2이므로

$2\leq n\log 1.08<3$

$\frac{2}{0.0333}\leq n<\frac{3}{0.0333}$

$60.\times\times\leq n<90.\times\times$

n은 정수이므로

$61\leq n\leq 90$

답 ②

13 $\log x$의 지표가 3이므로

$3\leq\log x<4$ ……㉠

이때, $\log x$의 가수와 $\log\sqrt{x}$의 가수의 합이 1이므로

$\log x+\log\sqrt{x}=\log x+\frac{1}{2}\log x$

$=\frac{3}{2}\log x=$(정수) ……㉡

㉠에 의하여

$\frac{9}{2}\leq\frac{3}{2}\log x<6$

이고 ㉡에 의하여 $\frac{3}{2}\log x$는 정수이므로

$\frac{3}{2}\log x=5,\ \log x=\frac{10}{3}$

$\therefore x=10^{\frac{10}{3}}$

답 ④

14 $\log E=11.8+1.5M$에서 규모가 6인 지진의 파동 에너지와 규모가 4인 지진의 파동 에너지를 각각 E_1, E_2라고 하면

$\log E_1=11.8+1.5\times 6$

$\log E_2=11.8+1.5\times 4$

위의 두 식을 변끼리 빼면

$\log E_1-\log E_2=1.5\times 2$

$\log\frac{E_1}{E_2}=3$

$\therefore \frac{E_1}{E_2}=10^3=1000$

따라서 E_1은 E_2의 1000배이다.

답 ④

15 함수 $y=2^{1-x}=2^{-(x-1)}=\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}$이므로

x의 값이 증가하면 y의 값은 감소한다.
따라서 주어진 함수의 최댓값과 최솟값은

$x=-1$일 때

(최댓값)$=\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}=4$

$x=2$일 때

(최솟값)$=\left(\frac{1}{2}\right)^{1}=\frac{1}{2}$

답 ④

16 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$2+\log_{10}pq=9$, $\log_{10}p^2q^3=20$

$\therefore \log_{10}p+\log_{10}q=7$ ……㉠

$2\log_{10}p+3\log_{10}q=20$ ……㉡

㉠×3−㉡을 하면

$\log_{10}p=1$

$\therefore p=10$

이것을 ㉠에 대입하면

$\log_{10}q=6$

$\therefore q=10^6$

$\therefore \frac{q}{p}=\frac{10^6}{10}=100000$

답 ⑤

17 $16^a=x^c$에서 $2^{4a}=x^c$

$\therefore 2=x^{\frac{c}{4a}}$ ……㉠

$27^b=x^c$에서 $3^{3b}=x^c$

$\therefore 3=x^{\frac{c}{3b}}$ ……㉡

㉠×㉡을 하면

$2\times3=x^{\frac{c}{4a}}\times x^{\frac{c}{3b}}$

$6=x^{\frac{c}{4a}+\frac{c}{3b}}$, $6=x^{\frac{c}{12}\left(\frac{3}{a}+\frac{4}{b}\right)}$

주어진 조건에서 $\frac{3}{a}+\frac{4}{b}=\frac{6}{c}$이므로

$6=x^{\frac{c}{12}\times\frac{6}{c}}$

$x^{\frac{1}{2}}=6$

$\therefore x=6^2=36$

답 ④

18 주어진 그림에서 $\overline{AB}=\overline{OB}-\overline{OA}$이고

$\overline{OB}=\log_3 b$, $\overline{OA}=\log_3 a$이므로

$\log_3 b-\log_3 a=2$

$\log_3\frac{b}{a}=2$

$\therefore \frac{b}{a}=3^2=9$

답 ③

19 **1단계** **근과 계수의 관계를 이용한다.**

두 근의 합이 $\log z$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\log z=\frac{3}{2}=1+\frac{1}{2}$

2단계 **$\log\frac{1}{z}$의 지표와 가수를 구한다.**

$\therefore \log\frac{1}{z}=-\log z=-\left(1+\frac{1}{2}\right)$

$=-1-\frac{1}{2}=(-1-1)+\left(1-\frac{1}{2}\right)$

$=-2+\frac{1}{2}$

따라서 지표는 -2, 가수는 $\frac{1}{2}$이다.

답 지표: -2, 가수: $\frac{1}{2}$

20 **1단계** **최솟값을 갖는 조건을 이해한다.**

$0<a<1$이므로 함수 $y=a^{-x^2+2x+3}$은 지수 $-x^2+2x+3$이 최댓값을 가질 때, 최솟값을 갖는다.

2단계 **a의 값을 구한다.**

$-x^2+2x+3=-(x-1)^2+4$이므로 주어진 함수는 $x=1$에서 최솟값을 갖는다.

$\therefore a^4=\frac{16}{81}=\left(\frac{2}{3}\right)^4$

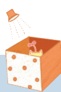
$\therefore a=\frac{2}{3}$

답 $\frac{2}{3}$

III 수열

해바라기의 씨앗을 자세히 살펴보면 그 배열에서 규칙성을 찾을 수 있다. 이와 같이 식물이나 동물의 생태, 적금이나 할부금의 이자 계산 등에는 규칙성이 있으며 이를 활용하여 자연 현상이나 사회 현상을 설명할 수 있다.

단원의 흐름



이미 배운 내용

▶고등학교 1학년

- 수와 연산
- 문자와 식
- 함수

이번에 배울 내용

- 수열의 뜻
- 등차수열과 등비수열
- 합의 기호 $\sum$
- 계차수열
- 원리합계

이 단원의 학습 목표

1. 실생활 상황을 통해 수열의 뜻을 안다.
2. 등차수열과 등비수열의 뜻을 알고, 일반항, 첫째항부터 제n항까지의 합을 구할 수 있다.
3. $\sum$의 뜻과 성질을 이해한다.
4. 여러 가지 수열의 일반항, 첫째항부터 제n항까지의 합을 구할 수 있다.
5. 계차수열을 이해한다.
6. 수열을 활용하여 실생활의 문제를 해결할 수 있다.

단원을 시작하기 전에 …

그림의 규칙 찾기 **1** □ 안에 알맞은 그림을 그려라.

수의 규칙 찾기 **2** 다음 수들이 어떤 규칙을 가지고 나열되어 있을 때, □ 안에 알맞은 수를 써넣어라.

(1) 1, 2, 3, □, 5, 6, □, 8, 9, 10

(2) 1, 2, 4, □, 16, 32, □, 128, 256

인수분해 **3** 다음을 인수분해하여라.

(1) $x(x+1)(2x+1)-x(x+1)$

(2) x^5-1

연립방정식 **4** 다음 연립방정식을 풀어라.

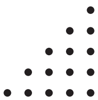
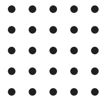
(1) $\begin{cases} x-y=1 \\ 3x+2y=13 \end{cases}$　(2) $\begin{cases} x+3y=17 \\ y(2x+3y-3)=80 \end{cases}$

함숫값 **5** 다음 물음에 답하여라.

(1) $f(x)=x^2+2x-1$일 때, $f(1)$, $f(2)$의 값을 구하여라.

(2) $g(x)=3\cdot 2^x$일 때, $g(1)$, $g(3)$의 값을 구하여라.

단원을 시작하기 전에 …………………… 풀이

1 (1) 　(2) 

2 (1) 1씩 더하였으므로 빈칸에 들어갈 수는 차례로 **4, 7**이다.

(2) 2배씩 커지고 있으므로 빈칸에 들어갈 수는 차례로 **8, 64**이다.

3 (1) $x(x+1)(2x+1)-x(x+1)$

$=x(x+1)\{(2x+1)-1\}$

$=\mathbf{2x^2(x+1)}$

(2)

1	1	0	0	0	0	−1
		1	1	1	1	1
	1	1	1	1	1	0

$\therefore x^5-1=\mathbf{(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)}$

4 (1) $\begin{cases} x-y=1 & \cdots\cdots ㉠ \\ 3x+2y=13 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠×2+㉡을 하면　$\mathbf{x=3}$

$x=3$을 ㉠에 대입하면　$\mathbf{y=2}$

(2) $\begin{cases} x+3y=17 & \cdots\cdots ㉠ \\ y(2x+3y-3)=80 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $x=17-3y$를 ㉡에 대입하면

$y\{2(17-3y)+3y-3\}=80$

$3y^2-31y+80=0$, $(y-5)(3y-16)=0$

$\therefore y=5$ 또는 $y=\frac{16}{3}$

$\therefore \mathbf{x=1,\ y=\frac{16}{3}}$ 또는 $\mathbf{x=2,\ y=5}$

5 (1) $f(1)=1^2+2\times1-1=\mathbf{2}$

$f(2)=2^2+2\times2-1=\mathbf{7}$

(2) $g(1)=3\cdot2^1=\mathbf{6}$

$g(3)=3\cdot2^3=\mathbf{24}$

1 등차수열과 등비수열

이 단원을 배우면

- 실생활 상황을 통해 수열의 뜻을 알 수 있다.
- 등차수열의 뜻을 알고, 일반항을 구할 수 있다.
- 등차수열에서 첫째항부터 제n항까지의 합을 구할 수 있다.
- 등비수열의 뜻을 알고, 일반항을 구할 수 있다.
- 등비수열에서 첫째항부터 제n항까지의 합을 구할 수 있다.

1 등차수열

2 등비수열

소단원의 학습 목표

1. 수열의 뜻을 안다.
2. 등차수열과 공차의 뜻을 알고, 일반항을 구할 수 있다.
3. 등차중항의 뜻을 알고, 이를 이용하여 등차수열의 임의의 두 항을 알 때 다른 항을 구할 수 있다.
4. 등차수열에서 첫째항부터 제n항까지의 합을 구할 수 있다.

여기서 배우는 용어 및 기호

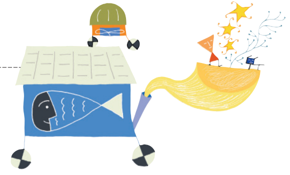
수열, 항, 유한수열, 무한수열, a_n, $\{a_n\}$, 일반항, 등차수열, 공차, 등차중항

1 등차수열과 등비수열

1 등차수열

학습 목표

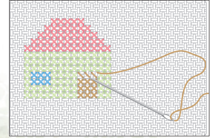
- 수열의 뜻을 안다.
- 등차수열을 이해하고, 일반항을 구할 수 있다.
- 등차수열의 합을 구할 수 있다.



다 가 서 기 / **십자수 속의 수열**

십자수는 실을 '×' 모양으로 엇갈리게 놓아가며 수를 완성하는 유럽식 생활 수예로, 여기에서 규칙성을 찾아볼 수 있다.

예를 들면 오른쪽 그림과 같이 십자수로 집 모양을 만들 때, 지붕에 있는 '×'의 개수를 일일이 세지 않고도 구할 수 있다.



첫 번째 줄에는 5개의 '×'가 있고, 두 번째 줄부터는 윗줄의 개수에서 2개씩 늘어나므로 각각 7개, 9개, 11개, 13개의 '×'가 있음을 알 수 있다.

따라서 지붕에 있는 '×'의 총 개수는

$$5+7+9+11+13=45(개)$$

이다.

다가서기 / 해설

달력의 요일, 육상 트랙, 뜀틀과 사다리 등에서 일정한 양만큼씩 증가하거나 감소하는 규칙을 찾을 수 있다. 또 영상 만화 제작의 원리, 인쇄물의 확대와 축소 등에서 일정한 비율로 증가하거나 감소하는 규칙을 찾을 수 있다.

도심의 급증하는 교통량을 완화하기 위한 방편으로 시행하는 차량 운행 10부제나 5부제에서도 일정하게 증가하거나 감소하는 규칙을 찾을 수 있다. 예를 들어 올해 12월 1일부터 한 달 동안 이 제도를 실시할 때, 번호가 '56서 1234'인 차가 운행할 수 없는 날을 나열해 보면 다음과 같다.

(i) 10부제인 경우

10부제란 10일에 하루, 즉 차량 번호 끝자리와 날짜의 끝자리가 일치하는 날에 차량 운행을 할 수 없는 제도이다. 그러므로 운행할 수 없는 날은 4일, 14일, 24일이다.

(ii) 5부제인 경우

5부제란 5일에 하루, 즉 차량 번호 끝자리와 날짜를 5로 나눈 나머지가 일치하는 날에 차량 운행을 할 수 없는 제도이다. 그러므로 운행할 수 없는 날은 4일, 9일, 14일, 19일, 24일, 29일이다.

71

01 수열의 뜻

탐구하기 / 과일 쌓기

귤을 다음 그림과 같은 규칙에 의하여 1단, 2단, 3단, … 으로 쌓을 때, 빈칸에 알맞은 수를 써넣어 보자.

…

구분	1단 무더기	2단 무더기	3단 무더기	4단 무더기	5단 무더기
귤의 개수	1	4	10		

알아보기 / 수열에 대하여 알아보자.

오른쪽 그림과 같이 삼각 김밥을 배열할 때, 맨 위에 있는 것부터 각 층에 있는 삼각 김밥의 개수를 차례로 배열하면 다음과 같다.

1, 3, 5, 7, 9, 11 ……㉠

한편 1보다 큰 3의 배수를 작은 수부터 차례로 나열하면

3, 6, 9, 12, 15, 18, … ……㉡

이와 같이 어떤 규칙에 따라 차례로 나열된 수의 열을 **수열**이라 하고, 나열된 각 수를 그 수열의 **항**이라고 한다. 이때, 수열 ㉠과 같이 유한개의 항으로 이루어진 수열을 **유한수열**이라 하고, ㉡과 같이 항의 개수가 무한히 많은 수열을 **무한수열**이라고 한다.

수열(數列)을 영어로 sequence, 항(項)을 term이라고 한다.

유한수열에서 항의 개수를 항수, 마지막 항을 끝항이라고 한다.

일반적으로 수열을 나타낼 때에는 각 항의 번호를 붙여

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots,\ a_n,\ \cdots$$

과 같이 나타낸다. 이때, a_1을 첫째항 또는 제1항, a_2를 둘째항 또는 제2항, …, a_n을 n째항 또는 제n항이라고 한다. 또 이 수열을 간단히

$$\{a_n\}$$

과 같이 나타낸다.

이를테면 수열 ㉠에서 $a_1=1$, $a_2=3$이고 $a_6=11$이다.

탐구하기 / 풀이

구분	1단 무더기	2단 무더기	3단 무더기	4단 무더기	5단 무더기
귤의 개수	1	4	10	**20**	**35**

알아보기 / 해설

- 유한수열과 무한수열은 항의 개수를 이용하여 수열을 분류한다.
- 각 항을 나열하여 수열을 표현할 때에는 나열된 수로부터 일반적인 규칙을 찾을 수 있도록 충분한 개수의 수를 나열해야 한다. 그렇지 않으면 주어진 수열을 여러 가지로 해석할 수 있다.

예를 들어 어떤 수열을 간단히 '1, 2, …'로 나타내면

1, 2, 3, 4, …, n, …

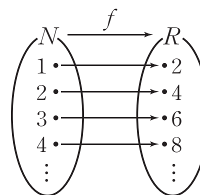
1, 2, 2^2, 2^3, …, 2^{n-1}, …

등과 같이 다양하게 해석될 수 있다.

보충 학습

수열과 함수

각 자연수에 차례로 양의 짝수 2, 4, 6, 8, …을 대응시키면 다음과 같다.



자연수 : 1 2 3 4 … n …

↓ ↓ ↓ ↓ ↓

짝　수 : 2 4 6 8 … $2n$ …

그러므로 수열 2, 4, 6, 8, …은 자연수 전체의 집합 N을 정의역으로 하는 다음과 같은 함수 f로 볼 수 있다.

$$f(n)=a_n=2n$$

이와 같이 자연수 전체의 집합 N에서 실수 전체의 집합 R로의 함수

$$f: N \longrightarrow R,\ f(n)=a_n$$

을 무한수열이라고 한다.

정의역이 자연수 전체의 집합인 함수는 각 자연수 n에 대한 함숫값 $f(n)$을 제n항으로 취하는 수열 $\{a_n\}$으로 생각할 수 있다. 따라서 무한수열과 정의역이 자연수 전체의 집합인 함수를 동일시 할 수 있다.

한편 유한수열 a_1, a_2, …, a_n은 집합 $\{1,\ 2,\ \cdots,\ n\}$에서 실수 전체의 집합 R로의 함수로 생각할 수 있다.

스스로 하기 / 풀이

1 (1) $a_4=7,\ a_5=11$

(2) $a_4=\frac{1}{7},\ a_5=\frac{1}{9}$

2 (1) 규칙: 근호 안의 숫자에 1부터 1씩 더하여 나열한다.

$\sqrt{7},\ 2\sqrt{2},\ 3,\ \sqrt{10}$

(2) 규칙: 분자의 숫자에 1부터 1씩 더하고, 분모의 숫자에 2부터 1씩 더하여 나열한다.

$\frac{7}{8},\ \frac{8}{9},\ \frac{9}{10},\ \frac{10}{11}$

3 (1) 일반항 $a_n=2n-3$에 $n=1,\ 2,\ 3,\ 4$를 차례로 대입하면

$a_1=2\times1-3=\mathbf{-1}$

$a_2=2\times2-3=\mathbf{1}$

$a_3=2\times3-3=\mathbf{3}$

$a_4=2\times4-3=\mathbf{5}$

(2) 일반항 $a_n=n^2+1$에 $n=1,\ 2,\ 3,\ 4$를 차례로 대입하면

$a_1=1^2+1=\mathbf{2}$

$a_2=2^2+1=\mathbf{5}$

$a_3=3^2+1=\mathbf{10}$

$a_4=4^2+1=\mathbf{17}$

보충 학습

수열의 일반항 a_n을 n에 관한 식으로 나타낼 수 없는 경우가 있다.

예를 들어 2, 3, 5, 7, 11, 13, …과 같이 소수를 작은 수부터 크기 순으로 나열한 수열의 일반항은 아직까지 알려져 있지 않다.

따라서 모든 수열의 일반항을 n에 관한 식으로 나타낼 수 있는 것은 아니다.

72

수열의 제n항 a_n이 n에 대한 식으로 주어지면 n에 1, 2, 3, …을 차례로 대입하여 그 수열의 모든 항을 구할 수 있다.

이때, 제n항 a_n은 그 수열의 각 항을 일반적으로 나타내고 있으므로 a_n을 수열의 **일반항**이라고 한다.

| 보기 | 일반항이 $a_n=n^2$인 수열의 첫째항부터 제4항까지 구하면

$a_1=1^2=1,\ a_2=2^2=4,\ a_3=3^2=9,\ a_4=4^2=16$

함 께 하 기 / 익힘책 65쪽 | 익힘책 66쪽 | 익힘책 67쪽

1 다음 수열의 규칙을 알아보고, 제7항을 구하여라.

(1) 2, 6, 10, 14, … (2) 1, 3, 9, 27, …

| 풀이 |

(1) 규칙: **첫째항 2에 차례로 4씩 더하여 나열한다.**

$a_5=14+4=18,\ a_6=18+4=22,\ a_7=22+4=\mathbf{26}$

(2) 규칙: **첫째항 1에 차례로 3씩 곱하여 나열한다.**

$a_5=27\times3=81,\ a_6=81\times3=243,\ a_7=243\times3=\mathbf{729}$

스 스 로 하 기 / 익힘책 65쪽 | 익힘책 66쪽 | 익힘책 67쪽

1 수열 $\{a_n\}$이 다음과 같을 때, a_4와 a_5를 각각 말하여라.

(1) 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, …

(2) $1,\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{5},\ \frac{1}{7},\ \frac{1}{9},\ \frac{1}{11},\ \cdots$

2 다음 수열의 규칙을 알아보고, 제7항부터 제10항까지 나열하여라.

(1) $1,\ \sqrt{2},\ \sqrt{3},\ 2,\ \sqrt{5},\ \sqrt{6},\ \cdots$

(2) $\frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{4},\ \frac{4}{5},\ \frac{5}{6},\ \frac{6}{7},\ \cdots$

3 수열 $\{a_n\}$의 일반항이 다음과 같을 때, 첫째항부터 제4항까지 나열하여라.

(1) $a_n=2n-3$ (2) $a_n=n^2+1$

Plus 문제

1. 일반항이 $a_n=n^2+n+2$인 수열의 첫째항부터 제5항까지 나열하여라. 또 제15항을 구하여라.

2. 수열 1, -3, 9, -27, …의 규칙을 알아보고, 제5항부터 제8항까지 구하여라.

| 풀이 |

1. 일반항 $a_n=n^2+n+2$에 $n=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$를 차례로 대입하면

$a_1=4,\ a_2=8,\ a_3=14,\ a_4=22,\ a_5=32$

또 $n=15$를 대입하면

$a_{15}=242$

2. 규칙: 첫째항 1에 차례로 -3씩 곱하여 나열한다.

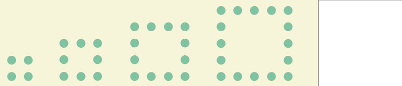
81, -243, 729, -2187

73

02 등차수열의 뜻

탐 구 하 기 / 점의 개수가 증가하는 규칙

다음에서 점의 개수가 증가하는 규칙을 알아보고, □ 안에 알맞은 그림을 그려 보자.



알 아 보 기 / 등차수열에 대하여 알아보자.

다음은 첫째항 1부터 차례로 일정한 수 2를 더하여 그 다음 항이 만들어진 수열이다.

1, 3, 5, 7, 9, ⋯
+2 +2 +2 +2

이와 같이 첫째항부터 차례로 일정한 수를 더하여 만들어지는 수열을 **등차수열**이라 하고, 그 일정한 수를 **공차**라고 한다.

따라서 공차가 d인 등차수열 $\{a_n\}$의 모든 항에 대하여

$$a_{n+1}=a_n+d \ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

인 관계가 성립한다.

등차수열(等差數列)은 영어로 arithmetic sequence라고 한다.
또 공차(公差)는 common difference라 하고, 보통 d로 나타낸다.

| 보기 | 오른쪽 그림에서 각 줄에 있는 종이컵의 수는 아래부터 차례로 7, 6, 5, 4이므로 첫째항이 7이고 공차가 -1인 등차수열이다.

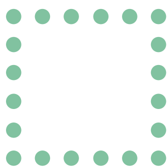
스 스 로 하 기 / 익힘책 65쪽 | 익힘책 66쪽 | 익힘책 67쪽

1 다음 수열이 등차수열을 이룰 때, 공차를 구하고 □ 안에 알맞은 수를 써넣어라.

(1) 8, 12, □, 20, ⋯ (2) 10, □, 4, □, ⋯

탐구하기 / 풀이

정사각형의 한 변에 있는 점이 2개, 3개, 4개, 5개로 하나씩 증가하므로 빈칸에 알맞은 그림은 다음과 같이 정사각형의 한 변에 있는 점이 6개인 그림이다.



알아보기 / 해설

등차수열 $\{a_n\}$은 일정한 수 d(공차)를 더해 나간 수열로서 $a_{n+1}=a_n+d$가 성립하는 수열이다. 따라서 이웃하는 두 항 사이의 차가 일정하므로 $a_{n+1}-a_n=d$임을 알 수 있다.

스스로 하기 / 풀이

1 (1) $12-8=4$이므로

공차: **4**

따라서 첫째항 8부터 차례로 4를 더하여 만들어진 수열이므로

8, 12, **16**, 20, ⋯

(2) 이 수열의 공차를 d라고 하면

$10+2d=4$ $\therefore d=\mathbf{-3}$

따라서 첫째항 10부터 차례로 -3을 더하여 만들어진 수열이므로

10, **7**, 4, **1**, ⋯

Plus 문제

다음 중에서 등차수열을 찾아라. 또 등차수열인 경우에는 공차를 구하여라.

(1) 7, 11, 15, 19, ⋯

(2) 2, 6, 12, 20, ⋯

(3) 10, 7, 4, 1, ⋯

(4) 1, 0, -2, -5, ⋯

| 풀이 |

이웃하는 두 항 사이의 차가 일정한 것을 찾으면 된다.

(1) $11-7=15-11=19-15=4$ $\therefore$ 공차: 4

(3) $7-10=4-7=1-4=-3$ $\therefore$ 공차: -3

74

03 등차수열의 일반항

알 아 보 기 / 등차수열의 일반항과 등차중항에 대하여 알아보자.

첫째항이 a이고, 공차가 d인 등차수열 $\{a_n\}$의 각 항을 다음과 같이 차례로 쓸 수 있다.

$$a_1=a=a+0d$$
$$a_2=a_1+d=a+1d$$
$$a_3=a_2+d=(a+d)+d=a+2d$$
$$\vdots$$
$$a_n=a_{n-1}+d=\{a+(n-2)d\}+d=a+(n-1)d$$
$$\vdots$$

$a_3=a+2d$ (-1)

$a_n=a+(n-1)d$ (-1)

따라서 등차수열의 일반항은 다음과 같다.

등차수열의 일반항

첫째항이 a이고, 공차가 d인 등차수열 $\{a_n\}$의 일반항 a_n은

$$a_n=a+(n-1)d$$

| **보기** | (1) 첫째항이 2이고, 공차가 3인 등차수열의 일반항 a_n은

$$a_n=2+(n-1)\times3=3n-1$$

(2) 수열 100, 96, 92, 88, ⋯은 첫째항이 100이고, 공차가 -4인 등차수열이므로 일반항 a_n은

$$a_n=100+(n-1)\times(-4)=-4n+104$$

한편 세 수 a, b, c가 이 순서대로 등차수열을 이룰 때, b를 a와 c의 **등차중항**이라고 한다. 이때, b가 a와 c의 등차중항이기 위한 필요충분조건은 $2b=a+c$이다.

a, b, c가 등차수열
$\Longleftrightarrow b-a=c-b$
$\Longleftrightarrow 2b=a+c$

스 스 로 하 기 / 익힘책 65쪽 | 익힘책 66쪽 | 익힘책 67쪽

1 다음 등차수열 $\{a_n\}$의 일반항을 구하여라. (단, d는 공차이다.)

(1) $a_1=3$, $d=5$ (2) $a_1=2$, $d=-3$

(3) -1, -3, -5, -7, ⋯ (4) 1, 7, 13, 19, ⋯

알아보기 / 해설

- 등차수열의 일반항은 공차가 0이 아닐 때에는 n에 대한 일차식, 공차가 0일 때에는 상수로 나타내어진다.
- 세 수 a, b, c가 있을 때, b가 a와 c의 등차중항이 되기 위한 필요충분조건은 $2b=a+c$임을 밝혀 보자.

(i) b가 a와 c의 등차중항이면 a, b, c는 차례로 등차수열을 이루므로 공차를 d라고 하면

$b=a+d$, $c=a+2d$

$\therefore 2b=a+(a+2d)=a+c$

(ii) $2b=a+c$이고 $b-a=d$라고 하면 $b=a+d$이므로

$2b=2(a+d)=a+(a+2d)$

$\therefore a+c=a+(a+2d)$

$\therefore c=a+2d$

즉, $a=a$, $b=a+d$, $c=a+2d$이다. 따라서 a, b, c는 이 순서대로 등차수열을 이루므로 b는 a와 c의 등차중항이다.

그러므로 b가 a와 c의 등차중항이 되기 위한 필요충분조건은 $2b=a+c$이다.

스스로 하기 / 풀이

1 (1) $a_n=3+(n-1)\times5=\mathbf{5n-2}$

(2) $a_n=2+(n-1)\times(-3)=\mathbf{-3n+5}$

(3) 첫째항이 -1, 공차가 $-3-(-1)=-2$이므로

$a_n=-1+(n-1)\times(-2)=\mathbf{-2n+1}$

(4) 첫째항이 1, 공차가 $7-1=6$이므로

$a_n=1+(n-1)\times6=\mathbf{6n-5}$

보충 학습

세 수가 등차수열을 이룰 때, 세 수를

$$a,\ a+d,\ a+2d$$

네 수가 등차수열을 이룰 때, 네 수를

$$a,\ a+d,\ a+2d,\ a+3d$$

와 같이 놓아도 되지만 이럴 경우에는 주어진 조건식에서 a, d의 값을 찾는 과정이 복잡해질 수 있다.

등차수열을 이루는 세 수, 네 수, 다섯 수라는 표현이 있을 때에는 다음과 같이 수들을 서로 대칭이 되도록 놓으면 계산이 편리해진다.

세 수 ➡ $a-d$, a, $a+d$

네 수 ➡ $a-3d$, $a-d$, $a+d$, $a+3d$

다섯 수 ➡ $a-2d$, $a-d$, a, $a+d$, $a+2d$

75

함 께 하 기 / 익힘책 65쪽 | 익힘책 66쪽 | 익힘책 67쪽

1 제3항이 -8이고, 제10항이 13인 등차수열의 일반항 a_n을 구하여라.

풀이

첫째항을 a, 공차를 d라고 하면

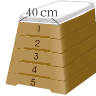
$a_3=a+2d=-8$ …… ㉠

$a_{10}=a+9d=13$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-14$, $d=3$

$\therefore a_n=-14+(n-1)\times3=\mathbf{3n-17}$

2 오른쪽 그림과 같은 5단 뜀틀에서 제1단의 상단면의 폭은 40 cm, 제5단의 상단면의 폭은 60 cm이다. 각 단의 상단면의 폭이 서로 등차수열을 이룰 때, 제2, 3, 4단의 상단면의 폭을 구하여라.



풀이

각 단의 상단면의 폭이 등차수열을 이루므로 공차를 d라고 하면

$40,\ 40+d,\ 40+2d,\ 40+3d,\ 40+4d$

$40+4d=60$이므로 $d=5$

따라서 제2, 3, 4단의 상단면의 폭은 각각 **45 cm, 50 cm, 55 cm**이다.

| 다른 풀이 |

각 단의 상단면의 폭을 40, a_2, a_3, a_4, 60으로 놓으면

$a_3=\dfrac{40+60}{2}=50$, $a_2=\dfrac{40+50}{2}=45$, $a_4=\dfrac{50+60}{2}=55$

따라서 제2, 3, 4단의 상단면의 폭은 각각 45 cm, 50 cm, 55 cm이다.

a_1, a_2, a_3, …이 등차수열을 이루면 a_1, a_3, a_5, … 또는 a_2, a_4, a_6, …도 등차수열을 이룬다.

스 스 로 하 기 / 익힘책 65쪽 | 익힘책 66쪽 | 익힘책 67쪽

2 다음을 만족하는 등차수열의 일반항 a_n을 구하여라.

(1) 첫째항이 2이고, 제6항이 22 (2) 제3항이 11이고, 제7항이 35

3 다음 수열이 등차수열을 이루도록 x, y, z의 값을 정하여라.

(1) 3, x, 15, y (2) -3, x, y, z, 33

스스로 하기 / 풀이

2 (1) 첫째항을 a, 공차를 d라고 하면

$a=2$, $a_6=a+5d=22$

두 식을 연립하여 풀면

$a=2$, $d=4$

$\therefore a_n=2+(n-1)\times4=\mathbf{4n-2}$

(2) 첫째항을 a, 공차를 d라고 하면

$a_3=a+2d=11$, $a_7=a+6d=35$

두 식을 연립하여 풀면

$a=-1$, $d=6$

$\therefore a_n=-1+(n-1)\times6=\mathbf{6n-7}$

3 (1) 첫째항을 a, 공차를 d라고 하면

$a=3$, $a_3=a+2d=15$

두 식을 연립하여 풀면

$a=3$, $d=6$

$\therefore x=3+6=\mathbf{9}$, $y=15+6=\mathbf{21}$

| 다른 풀이 |

3, x, 15가 이 순서대로 등차수열을 이루므로 x는 3과 15의 등차중항이다.

$\therefore x=\dfrac{3+15}{2}=9$

x, 15, y, 즉 9, 15, y도 이 순서대로 등차수열을 이루므로 15는 9와 y의 등차중항이다.

$\therefore 15=\dfrac{9+y}{2}$ $\therefore y=21$

(2) 첫째항을 a, 공차를 d라고 하면

$a=-3$, $a_5=a+4d=33$

두 식을 연립하여 풀면

$a=-3$, $d=9$

$\therefore x=-3+9=\mathbf{6}$

$y=6+9=\mathbf{15}$

$z=15+9=\mathbf{24}$

| 다른 풀이 |

-3, y, 33은 이 순서대로 등차수열을 이루므로 y는 -3과 33의 등차중항이다.

$\therefore y=\dfrac{-3+33}{2}=15$

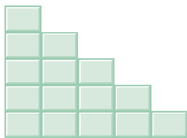
-3, x, y, 즉 -3, x, 15도 이 순서대로 등차수열을 이루므로 x는 -3과 15의 등차중항이다.

$\therefore x=\dfrac{-3+15}{2}=6$

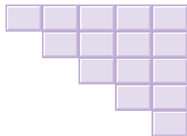
마찬가지로 y, z, 33, 즉 15, z, 33도 이 순서대로 등차수열을 이루므로 z는 15와 33의 등차중항이다.

$\therefore z=\dfrac{15+33}{2}=24$

탐구하기 / 풀이

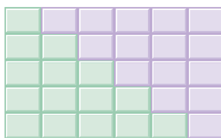


에서 작은 직사각형의 개수는 $1+2+3+4+5$이고,



에서 작은 직사각형의 개수는 $5+4+3+2+1$이다.

이것을 합친



은 가로줄에 작은 직사각형이 6개씩, 세로줄에 작은 직사각형이 5개씩 있는 직사각형을 이룬다.

그러므로 다음이 성립한다.

$(1+2+3+4+5)+(5+4+3+2+1)$
$=5\times 6$

$\therefore 1+2+3+4+5=\dfrac{5\times 6}{2}=15$

이 과정을 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{array}{rl} & 1+2+3+4+5=S \\ +) & 5+4+3+2+1=S \\ \hline & 6+6+6+6+6=2S \end{array}$$

$5\times 6=2S$이므로

$S=\dfrac{5\times 6}{2}=15$

같은 방법으로 $1+2+3+\cdots+20$의 값을 구하면

$$\begin{array}{rl} & 1+\ 2+\ 3+\cdots+20=S \\ +) & 20+19+18+\cdots+1\ \ =S \\ \hline & 21+21+21+\cdots+21=2S \end{array}$$

$20\times 21=2S$이므로

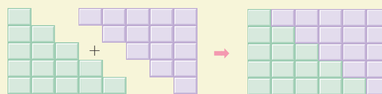
$S=\dfrac{20\times 21}{2}=$**210**

76

04 등차수열의 합

탐 구 하 기 / 등차수열의 합을 구하는 방법

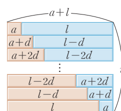
다음은 $1+2+3+4+5$의 값을 구하는 한 방법이다.



$2(1+2+3+4+5)=5\times 6$ $\quad\therefore 1+2+3+4+5=\dfrac{5\times 6}{2}$

이와 같은 방법으로 $1+2+3+\cdots+20$의 값을 구하여 보자.

알 아 보 기 / 등차수열의 합을 구하는 공식을 알아보자.



등차수열의 합을 구하는 공식을 유도하여 보자.

첫째항이 a이고, 공차가 d인 등차수열의 제n항을 l이라고 하면 첫째항부터 제n항까지의 합은

$a+(a+d)+(a+2d)+\cdots+(l-2d)+(l-d)+l$ ······ ㉠

㉠에서 각 항의 순서를 거꾸로 하여 쓰면

$l+(l-d)+(l-2d)+\cdots+(a+2d)+(a+d)+a$ ······ ㉡

㉠, ㉡을 변끼리 더하면

$\underbrace{(a+l)+(a+l)+\cdots+(a+l)+(a+l)}_{n\text{개}}$ ······ ㉢

$=n(a+l)$

이때, ㉢은 첫째항부터 제n항까지의 합의 2배이다.

따라서 첫째항부터 제n항까지의 합은

$\dfrac{n(a+l)}{2}$ ······ ㉣

이다. 한편 $l=a+(n-1)d$이므로 이것을 ㉣에 대입하여 정리하면 첫째항부터 제n항까지의 합은

$\dfrac{n\{2a+(n-1)d\}}{2}$

이다.

참고 | 가우스의 덧셈

독일의 수학자 가우스(Gauss, K. F. ; 1777∼1855)는 어릴 적에 1부터 100까지의 모든 자연수의 합을 다음과 같이 구했다고 한다.

$1+2+\cdots+100$
$=(1+100)+(2+99)+\cdots+(50+51)$
$=101\times 50=5050$

이것은 등차수열의 합을 구하는 공식 $\dfrac{n(a+l)}{2}$을 유도하는 과정과 같다.

77

이상을 정리하면 다음과 같다.

등차수열의 합

첫째항이 a, 공차가 d, 제n항이 l인 등차수열의 첫째항부터 제n항까지의 합은

$$\frac{n(a+l)}{2}=\frac{n\{2a+(n-1)d\}}{2}$$

| 보기 | (1) 첫째항이 2이고, 제26항이 77인 등차수열의 첫째항부터 제26항까지의 합은

$$\frac{26(2+77)}{2}=1027$$

(2) 첫째항이 -3, 공차가 4이고 항의 개수가 30개인 등차수열의 합은

$$\frac{30\{2\times(-3)+29\times4\}}{2}=1650$$

스스로 하기 /

익힘책 65쪽 | 익힘책 66쪽 | 익힘책 67쪽

1 다음 등차수열의 합을 구하여라.

(1) 첫째항이 5, 끝항이 35, 항의 개수가 100개인 등차수열

(2) 첫째항이 4, 공차가 -3, 항의 개수가 20개인 등차수열

2 다음 등차수열의 첫째항부터 제n항까지의 합을 구하여라.

(1) 2, 4, 6, 8, 10, ⋯

(2) -2, 1, 4, 7, 10, ⋯

3 어느 공연장의 좌석은 첫 번째 줄이 24석이고, 그 다음 줄부터 3석씩 늘어나 15번째 줄까지 배치되어 있다. 이때, 전체 좌석의 수를 구하여라.

알아보기 / 해설

• 등차수열의 첫째항과 끝항을 알 때는 다음 공식을 이용한다.

$$\frac{n(a+l)}{2}$$

• 등차수열의 첫째항과 공차를 알 때는 다음 공식을 이용한다.

$$\frac{n\{2a+(n-1)d\}}{2}$$

스스로 하기 / 풀이

1 (1) $a=5$, $l=35$, $n=100$이므로 첫째항부터 제100항까지의 합은

$$\frac{100(5+35)}{2}=\mathbf{2000}$$

(2) $a=4$, $d=-3$, $n=20$이므로 첫째항부터 제20항까지의 합은

$$\frac{20\{2\times4+(20-1)\times(-3)\}}{2}$$
$$=\mathbf{-490}$$

2 (1) 첫째항이 2, 공차가 2이므로 첫째항부터 제n항까지의 합은

$$\frac{n\{2\times2+(n-1)\times2\}}{2}$$
$$=\boldsymbol{n(n+1)}$$

(2) 첫째항이 -2, 공차가 3이므로 첫째항부터 제n항까지의 합은

$$\frac{n\{2\times(-2)+(n-1)\times3\}}{2}$$
$$=\boldsymbol{\frac{n(3n-7)}{2}}$$

3 첫째항이 24, 공차가 3인 등차수열의 첫째항부터 제15항까지의 합과 같으므로

$$\frac{15\{2\times24+(15-1)\times3\}}{2}$$
$$=675$$

따라서 전체 좌석은 **675**석이다.

Plus 문제

첫째항이 26, 공차가 -4인 등차수열에서 첫째항부터 제 몇 항까지의 합이 최대가 되는가?

| 풀이 |

$a=26$, $d=-4$이므로 첫째항부터 제n항까지의 합은

$$\frac{n\{2\times26+(n-1)\times(-4)\}}{2}=-2n(n-14)$$
$$=-2(n-7)^2+98$$

따라서 $n=7$일 때, 즉 제7항까지의 합이 최대가 된다.

소단원의 학습 목표

1. 등비수열과 공비의 뜻을 알고, 일반항을 구할 수 있다.
2. 등비중항의 뜻을 알고, 이를 이용하여 등비수열의 임의의 두 항을 알 때 다른 항을 구할 수 있다.
3. 등비수열에서 첫째항부터 제n항까지의 합을 구할 수 있다.

여기서 배우는 용어 및 기호

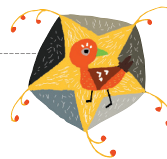
등비수열, 공비, 등비중항

1 등차수열과 등비수열

2 등비수열

학습 목표

- 등비수열을 이해하고, 일반항을 구할 수 있다.
- 등비수열의 합을 구할 수 있다.



다 가 서 기 / 인구론과 수열

영국의 경제학자인 맬서스(Thomas Robert Malthus ; 1766~1834)는 그의 저서 "인구론"에서 다음과 같이 말하였다.

"생활 수단은 산술급수적으로 증가하지만
인구는 기하급수적으로 증가한다."

어떤 시점에서 세계 인구수가 1억 명이고, 식량도 그들이 먹을 만큼 생산된다고 하자.

맬서스의 인구론에 의하면 한 세대(25년)씩 지남에 따라 인구는

$$1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 16,\ \cdots$$

의 비율로 증가하지만 식량은

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \cdots$$

의 비율로 증가한다.

이렇게 되면 200년 뒤에 인구와 식량의 비율은 256 : 9, 300년 뒤에는 4096 : 13이 된다.

그 이유는 다음 표에서 알 수 있다.

세대	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
인구수(억 명)	1	2	2^2	2^3	2^4	2^5	2^6	2^7	2^8	2^9	2^{10}	2^{11}	2^{12}
식량	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13

"인구론"이 처음 발표되었을 때에는 맬서스의 예측이 거의 정확히 맞았지만 현재에는 그의 예측이 상당히 어긋난다.

이것은 식량의 증가, 인구의 증가에 대한 맬서스의 가정이 현재에는 적합하지 않기 때문이다.

수학 이야기 |

쌀 한 톨의 새경과 등비수열

옛날 어느 욕심 많은 양반과 이 집에서 일하는 영리한 머슴이 있었다.

심술 많은 이 양반은 머슴에게 아침 일찍부터 밤늦은 시간까지 쉴 새 없이 일을 시켰지만 새경(월급)을 주지 않았다.

그러던 어느 날 머슴은 한 가지 꾀를 내어 조용히 양반을 찾아가 말했다.

"주인님, 부탁이 있습니다. 그동안 주인님 말씀을 거스르는 일 없이 정말 열심히 일을 했으니 그에 대한 보상으로 새경을 주셨으면 합니다. 오늘은 새경으로 쌀을 한 톨만 받겠습니다. 대신 내일은 두 톨, 그 다음날은 네 톨, 이런 식으로 매일 두 배씩 늘려서 주셨으면 합니다."

머슴이 새경 얘기를 꺼내자 처음에 기분이 상했던 양반은 이야기를 끝까지 듣고 속으로 안도의 한숨을 내쉬었다.

'이런 어리석은 놈. 쌀 한 되나 한 말도 아니고 몇 톨씩 받겠다고? 그 정도 쌀이야 줘도 아까울 것 없지.'

양반은 흔쾌히 머슴의 제안을 받아들였고 나중에 딴소리를 할까봐 계약서까지 써 두었다.

그런데 양반은 새경을 주기 시작한 지 한 두 달 사이에 가진 재산을 모두 머슴에게 새경으로 내주고 말았다.

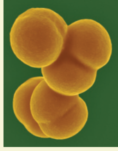
이 단원에서 배우게 될 '등비수열'을 이용해서 풀어보면 쌀 한 가마니에 약 2억 7000만 톨의 쌀이 들어있다고 가정했을 때, 새경을 쌀 한 톨에서 시작해 매일 두 배로 늘릴 때 한 가마니가 되는데까지 걸리는 시간은 28일이다.

그 후로 머슴에게 주는 새경이 가파른 속도로 불어나 주인은 얼마 지나지 않아서 가진 재산을 모두 잃고 만 것이다.

79

01 등비수열의 뜻

탐구하기 / 세포 분열



어떤 세포는 10분마다 분열하여 그 수가 2배로 증가한다고 한다. 다음 물음에 답하여 보자.

1. 세포 1개가 분열을 시작하여 60분 후에는 몇 개의 세포로 분열되는지 구하여라.
2. 한 개의 세포가 분열하여 어떤 용기를 가득 채우는 데 24시간이 걸린다고 할 때, 그 용기의 절반을 채우는 데 걸리는 시간을 구하여라.

알아보기 / 등비수열에 대하여 알아보자.

다음은 첫째항 1부터 차례로 2를 곱하여 그 다음 항이 만들어진 수열이다.

$$1,\quad 2,\quad 4,\quad 8,\quad 16,\quad \cdots$$
×2 ×2 ×2 ×2

이와 같이 첫째항부터 차례로 일정한 수를 곱하여 만들어지는 수열을 **등비수열**이라 하고, 그 일정한 수를 **공비**라고 한다.

따라서 공비가 r인 등비수열 $\{a_n\}$의 모든 항에 대하여

$$a_{n+1}=a_nr\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

인 관계가 성립한다.

등비수열(等比數列)은 영어로 geometric sequence라고 한다.
또 공비(公比)는 common ratio라 하고, 보통 r로 나타낸다.

| **보기** | (1) 수열 1, 3, 9, 27, ⋯은 첫째항이 1, 공비가 3인 등비수열이다.

(2) 수열 6, 3, $\frac{3}{2}$, $\frac{3}{4}$, ⋯은 첫째항이 6, 공비가 $\frac{1}{2}$인 등비수열이다.

스스로 하기 / 익힘책 70쪽 | 익힘책 71쪽 | 익힘책 74쪽

1 다음 수열이 등비수열을 이룰 때, 공비를 구하고 □ 안에 알맞은 수를 써넣어라.

(1) 2, −6, □, □, ⋯ (2) 9, □, □, $\frac{1}{3}$, ⋯

탐구하기 / 풀이

10분 단위로 2배씩 증가하는 수열이다.

1. 10분: 2개

20분: $2^2=4$(개)

30분: $2^3=8$(개)

40분: $2^4=16$(개)

50분: $2^5=32$(개)

60분: $2^6=64$(개)

따라서 세포 1개가 분열을 시작하여 60분 후에는 **64**개의 세포로 분열된다.

2. 10분마다 2배씩 되므로 24시간 10분 전에는 용기의 절반을 채운다.

∴ **23시간 50분**

알아보기 / 해설

• 등비수열 $\{a_n\}$은 일정한 수 r(공비)를 곱해 나간 수열로서 $a_{n+1}=a_nr$가 성립하는 수열이다. 따라서 이웃한 두 항 사이의 비가 일정하므로 $\frac{a_{n+1}}{a_n}=r$임을 알 수 있다.

• 공비가 1인 수열은 각 항이 모두 같다. 따라서 공차가 0인 등차수열과 같다.

스스로 하기 / 풀이

1 (1) $\frac{-6}{2}=-3$이므로

공비: $\mathbf{-3}$

따라서 첫째항 2부터 차례로 −3을 곱하여 만들어지는 수열이므로

2, −6, **18**, **−54**, ⋯

(2) 공비를 r라고 하면 주어진 수열은

$9,\ 9r,\ 9r^2,\ 9r^3,\ \cdots$

이때, $9r^3=\frac{1}{3}$이므로

$r^3=\frac{1}{27}=\frac{1}{3^3}$

$\therefore r=\mathbf{\frac{1}{3}}$

따라서 첫째항 9부터 차례로 $\frac{1}{3}$을 곱하여 만들어지는 수열이므로

9, **3**, **1**, $\frac{1}{3}$, ⋯

알아보기 / 해설

0이 아닌 세 수 a, b, c가 있을 때, b가 a와 c의 등비중항이기 위한 필요충분조건은 $b^2=ac$임을 밝혀 보자.

(i) b가 a와 c의 등비중항이면 a, b, c는 이 순서대로 등비수열을 이루므로 공비를 r라고 하면

$b=ar,\ c=ar^2$

$\therefore b^2=(ar)^2=a^2r^2=a\cdot ar^2=ac$

(ii) $b^2=ac$이면

$\dfrac{b}{a}=\dfrac{c}{b}$

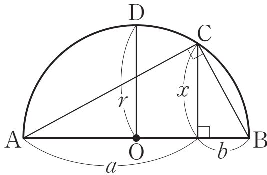
이므로 a, b, c는 등비수열을 이룬다.

따라서 b가 a와 c의 등비중항이기 위한 필요충분조건은 $b^2=ac$이다.

보충 학습

도형에서의 등차수열과 등비수열

a, b, r, x가 다음 그림과 같을 때



(i) $r=\dfrac{a+b}{2}$이므로 r는 a와 b의 등차중항이다.

(ii) $x^2=ab$이므로 x는 a와 b의 등비중항이다.

스스로 하기 / 풀이

1 (1) $a_n=3\cdot 3^{n-1}=\mathbf{3^n}$

(2) 첫째항이 1이고, 공비가 $-\dfrac{1}{2}$이므로

$a_n=1\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}=\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$

80

02 등비수열의 일반항

알 아 보 기 / 등비수열의 일반항과 등비중항에 대하여 알아보자.

첫째항이 a이고, 공비가 r인 등비수열 $\{a_n\}$의 각 항을 다음과 같이 차례로 쓸 수 있다.

$a_1=a=ar^0$
$a_2=a_1r=ar^1$
$a_3=a_2r=(ar)r=ar^2$
$\vdots$
$a_n=a_{n-1}r=(ar^{n-2})r=ar^{n-1}$
$\vdots$

따라서 등비수열의 일반항은 다음과 같다.

등비수열의 일반항
첫째항이 a이고, 공비가 r인 등비수열 $\{a_n\}$의 일반항 a_n은

$a_n=ar^{n-1}$

| 보기 | (1) 첫째항이 3이고, 공비가 4인 등비수열의 일반항 a_n은

$a_n=3\cdot 4^{n-1}$

(2) 수열 5, -10, 20, -40, $\cdots$은 첫째항이 5이고, 공비가 -2인 등비수열이므로 일반항 a_n은

$a_n=5\cdot(-2)^{n-1}$

한편 0이 아닌 세 수 a, b, c가 이 순서대로 등비수열을 이룰 때, b를 a와 c의 **등비중항**이라고 한다. 이때, b가 a와 c의 등비중항이기 위한 필요충분조건은 $b^2=ac$이다.

a, b, c가 등비수열 $\iff \frac{b}{a}=\frac{c}{b}$ $\iff b^2=ac$

스 스 로 하 기 / 익힘책 70쪽 | 익힘책 71쪽 | 익힘책 74쪽

1 다음 등비수열 $\{a_n\}$의 일반항을 구하여라. (단, r는 공비이다.)

(1) $a_1=3$, $r=3$ (2) 1, $-\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $-\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$, $\cdots$

Plus 문제

다음 등비수열 $\{a_n\}$의 일반항을 구하여라.

(단, r는 공비이다.)

(1) $a_1=2$, $r=2$ (2) 1, $\dfrac{1}{2}$, $\dfrac{1}{4}$, $\dfrac{1}{8}$, $\dfrac{1}{16}$, $\cdots$

(3) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, -1, $\sqrt{2}$, -2, $\cdots$

| 풀이 |

(1) $a_n=2\cdot 2^{n-1}=2^n$

(2) $a=1$, $r=\dfrac{1}{2}$이므로 $a_n=1\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$

(3) $a=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $r=-\sqrt{2}$이므로

$a_n=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cdot(-\sqrt{2})^{n-1}=(-1)^{n-1}\cdot(\sqrt{2})^{n-2}$

81

함께하기 /

익힘책 70쪽 | 익힘책 71쪽 | 익힘책 74쪽

1 각 항이 실수이고, 제2항이 -10, 제5항이 1250인 등비수열 $\{a_n\}$의 일반항을 구하여라.

풀이

첫째항을 a, 공비를 r라고 하면

$a_2=ar=-10$ ……㉠

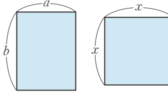
$a_5=ar^4=1250$ ……㉡

㉡÷㉠을 하면 $r^3=-125$ $\therefore r=-5$

$r=-5$를 ㉠에 대입하면 $-5a=-10$ $\therefore a=2$

$\therefore a_n=2\cdot(-5)^{n-1}$

2 오른쪽 그림과 같이 가로, 세로의 길이가 각각 a와 b인 직사각형이 있다. 이 직사각형과 넓이가 같은 정사각형의 한 변의 길이를 x라고 할 때, x는 a와 b의 등비중항임을 보여라.



증명

$ab=x^2$이므로 $\frac{x}{a}=\frac{b}{x}$

따라서 a, x, b는 이 순서대로 등비수열을 이루므로 x는 a와 b의 등비중항이다.

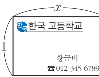
스스로 하기 /

익힘책 70쪽 | 익힘책 71쪽 | 익힘책 74쪽

2 각 항이 실수이고, 제3항이 45, 제6항이 1215인 등비수열 $\{a_n\}$의 일반항을 구하여라.

3 가로, 세로의 길이의 비가 $x:1$인 직사각형 모양의 명함에서 1, x, $x+1$이 이 순서대로 등비수열을 이룬다. 이때, 이 수열 1, x, $x+1$의 공비를 구하여라.

이런 종류의 직사각형을 황금 직사각형이라고 한다.



함께하기 / 해설

1 첫째항이 a, 공비가 r인 등비수열의 일반항 a_n은 $a_n=ar^{n-1}$임을 이용하여 a_2와 a_5를 a와 r에 관한 식으로 나타낸 후 연립방정식을 푼다.

2 등비중항을 영어로 Geometric Mean(기하평균)이라고 한다. 그 의미는 두 변의 길이가 각각 a, b인 직사각형과 넓이가 같은 정사각형의 한 변의 길이라는 뜻이다. 길이라는 관점에서 보면 a, b의 등비중항은 $\sqrt{ab}$이다. 그러나 수로 주어지면 $-\sqrt{ab}$도 a, b의 등비중항이다.

스스로 하기 / 풀이

2 첫째항을 a, 공비를 r라고 하면

$a_3=ar^2=45$ ……㉠

$a_6=ar^5=1215$ ……㉡

㉡÷㉠을 하면

$r^3=27$ $\therefore r=3$

$r=3$을 ㉠에 대입하면

$9a=45$ $\therefore a=5$

따라서 구하는 일반항은

$\boldsymbol{a_n=5\cdot 3^{n-1}}$

3 1, x, $x+1$이 이 순서대로 등비수열을 이루므로 x는 공비이면서 1과 $x+1$의 등비중항이다.

$x^2=1\cdot(x+1)$

$x^2-x-1=0$

$\therefore x=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$

이때, $x>0$이므로

$x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

따라서 수열 1, x, $x+1$의 공비는 $\boldsymbol{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$이다.

참고 | 황금 직사각형

중세 사람들은 황금 직사각형을 가장 아름다운 형태의 사각형으로 여기고 황금 직사각형의 두 변의 길이의 비를 '신이 만들어 낸 비율'이라 하여 이를 황금비라고 하였다.

황금 직사각형은 처음 직사각형에서 정사각형을 떼어 내고 남는 직사각형과 처음 직사각형이 서로 닮음일 경우, 처음 직사각형을 말한다.

탐구하기 / 풀이

$T=1+2+2^2+2^3+2^4+2^5$일 때

$$\begin{array}{rl} 2T= & \quad\;\; 2+2^2+2^3+2^4+2^5+2^6 \\ -)\;\; T= & 1+2+2^2+2^3+2^4+2^5 \\ \hline T= & 2^6-1 \end{array}$$

$\therefore T=\mathbf{63}$

알아보기 / 해설

• 공비가 $r\neq1$일 때와 $r=1$일 때의 등비수열의 합 공식이 다르다.
이는 공식 유도 과정 중
$(1-r)S=a(1-r^n)$
에서 $r=1$이면 양변을 $1-r$로 나눌 수 없기 때문이다.

• $r\neq1$일 때

(i) $r>1$이면 다음 공식을 이용한다.

$$\frac{a(r^n-1)}{r-1}$$

(ii) $r<1$이면 다음 공식을 이용한다.

$$\frac{a(1-r^n)}{1-r}$$

그러면 분모와 분자가 모두 양수가 되어 계산하기가 편리해진다.

함께하기 / 해설

1 $1+2+2^2+2^3+\cdots+2^{10}$의 값을 구하여 보자.
이것은 첫째항이 1이고, 공비가 2인 등비수열의 첫째항부터 제11항까지의 합이므로

$$\frac{1(2^{11}-1)}{2-1}=2^{11}-1=2047$$

끝항의 지수와 공비만 보고 주어진 문제와 같은 문제라고 혼동하지 않도록 주의해야 한다.

2 ㉠에서 $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$를 이용한다.

82

03 등비수열의 합

탐 구 하 기 / 등비수열의 합

$S=1+3+3^2+3^3+3^4$일 때, 다음은 S의 값을 구하는 한 방법이다.

$$\begin{array}{rl} 3S= & \quad\; 3+3^2+3^3+3^4+3^5 \\ -)\;\; S= & 1+3+3^2+3^3+3^4 \\ \hline 2S= & 3^5-1 \end{array} \;\Rightarrow\; S=\frac{3^5-1}{2}=121$$

이와 같은 방법으로 $T=1+2+2^2+2^3+2^4+2^5$일 때, T의 값을 구하여 보자.

알 아 보 기 / 등비수열의 합을 구하는 공식을 알아보자.

첫째항이 a이고, 공비가 r인 등비수열의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S라고 하면

$$S=a+ar+ar^2+\cdots+ar^{n-2}+ar^{n-1} \quad \cdots\cdots ㉠$$

㉠의 양변에 r를 곱하면

$$rS=ar+ar^2+ar^3+\cdots+ar^{n-1}+ar^n \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠에서 ㉡을 변끼리 빼면

$$(1-r)S=a(1-r^n)$$

따라서 $r\neq1$이면 $S=\dfrac{a(1-r^n)}{1-r}=\dfrac{a(r^n-1)}{r-1}$

$r=1$이면 ㉠에서 $S=\underbrace{a+a+a+\cdots+a}_{n\text{개}}=na$

이상을 정리하면 다음과 같다.

등비수열의 합

첫째항이 a이고, 공비가 r인 등비수열의 첫째항부터 제n항까지의 합은

(i) $r\neq1$일 때, $\dfrac{a(1-r^n)}{1-r}=\dfrac{a(r^n-1)}{r-1}$

(ii) $r=1$일 때, na

등비수열의 합을 구할 때 $r>1$이면 $\dfrac{a(r^n-1)}{r-1}$, $r<1$이면 $\dfrac{a(1-r^n)}{1-r}$을 이용하면 편리하다.

스스로 하기 / 풀이

1 (1) 첫째항이 3, 공비가 2인 등비수열의 첫째항부터 제n항까지의 합이므로

$$\frac{3(2^n-1)}{2-1}=\mathbf{3(2^n-1)}$$

(2) 첫째항이 1, 공비가 -3인 등비수열의 첫째항부터 제n항까지의 합이므로

$$\frac{1\{1-(-3)^n\}}{1-(-3)}=\mathbf{\frac{1-(-3)^n}{4}}$$

(3) 첫째항이 $\frac{1}{2}$, 공비가 $\frac{1}{2}$인 등비수열의 첫째항부터 제n항까지의 합이므로

$$\frac{\frac{1}{2}\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}}{1-\frac{1}{2}}=\mathbf{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}$$

83

함께하기 / 익힘책 70쪽 | 익힘책 71쪽 | 익힘책 74쪽

1 $2+2^2+2^3+\cdots+2^{10}$의 값을 구하여라.

풀이

첫째항이 2이고, 공비가 2인 등비수열의 첫째항부터 제10항까지의 합이므로

$$2+2^2+2^3+\cdots+2^{10}=\frac{2(2^{10}-1)}{2-1}=2(2^{10}-1)=\mathbf{2046}$$

2 각 항이 실수이고, 첫째항부터 제3항까지의 합이 21, 첫째항부터 제6항까지의 합이 189인 등비수열 $\{a_n\}$의 일반항을 구하여라.

풀이

첫째항을 a, 공비를 r라 하고, 첫째항부터 제3항까지의 합을 T, 첫째항부터 제6항까지의 합을 S라고 하면

$$T=\frac{a(r^3-1)}{r-1}=21,\ S=\frac{a(r^6-1)}{r-1}=189$$

S를 변형하면

$$\frac{a(r^6-1)}{r-1}=\frac{a(r^3-1)(r^3+1)}{r-1}=189 \quad \cdots\cdots ㉠$$

T를 ㉠에 대입하면

$21(r^3+1)=189,\ r^3+1=9 \quad \therefore r^3=8$

그런데 r는 실수이므로 $r=2$

$r=2$를 T에 대입하면 $7a=21 \quad \therefore a=3$

$\therefore \mathbf{a_n=3\cdot 2^{n-1}}$

스스로 하기 / 익힘책 70쪽 | 익힘책 71쪽 | 익힘책 74쪽

1 다음 등비수열의 첫째항부터 제n항까지의 합을 구하여라.

(1) 3, 6, 12, 24, 48, $\cdots$ (2) 1, -3, 9, -27, 81, $\cdots$

(3) $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{32}$, $\cdots$ (4) 1, $\sqrt{2}$, 2, $2\sqrt{2}$, 4, $\cdots$

2 공비가 자연수이고, 첫째항부터 제2항까지의 합이 10, 첫째항부터 제4항까지의 합이 170인 등비수열 $\{a_n\}$의 일반항을 구하여라.

(4) 첫째항이 1, 공비가 $\sqrt{2}$인 등비수열의 첫째항부터 제n항까지의 합이므로

$$\frac{1\{(\sqrt{2})^n-1\}}{\sqrt{2}-1}=\mathbf{(\sqrt{2}+1)\{(\sqrt{2})^n-1\}}$$

2 첫째항을 a, 공비를 r라 하고, 첫째항부터 제2항까지의 합을 T, 첫째항부터 제4항까지의 합을 S라고 하면

$T=10$이므로

$$T=\frac{a(r^2-1)}{r-1}=10$$

$S=170$이므로

$$S=\frac{a(r^4-1)}{r-1}=170$$

S를 변형하면

$$\frac{a(r^4-1)}{r-1}=\frac{a(r^2-1)(r^2+1)}{r-1}$$

$=170 \quad \cdots\cdots ㉠$

T를 ㉠에 대입하면

$10(r^2+1)=170,\ r^2+1=17$

$\therefore r^2=16$

그런데 r는 자연수이므로 $r=4$

$r=4$를 T에 대입하면

$5a=10 \quad \therefore a=2$

따라서 구하는 일반항은

$a_n=2\cdot 4^{n-1}=2\cdot 2^{2n-2}=\mathbf{2^{2n-1}}$

중단원 확인하기 / 풀이

1 (1) 공차: **2**, 일반항: $\mathbf{2n-3}$

(2) 공차: $\mathbf{-3}$, 일반항: $\mathbf{-3n+13}$

2 (1) 첫째항을 a, 공차를 d라고 하면

$a_3=a+2d=-5 \quad \cdots\cdots ㉠$

$a_9=a+8d=43 \quad \cdots\cdots ㉡$

㉡$-$㉠을 하면 $6d=48$

$\therefore d=8$

$d=8$을 ㉠에 대입하면

$a+16=-5 \quad \therefore a=-21$

따라서 첫째항이 -21, 공차가 8인 등차수열의 첫째항부터 제n항까지의 합은

$$\frac{n\{2\times(-21)+(n-1)\times 8\}}{2}$$

$=\mathbf{n(4n-25)}$

(2) 첫째항을 a, 공차를 d라고 하면

$a_{10}=a+9d=61 \quad \cdots\cdots ㉠$

$\frac{10\{a+(a+9d)\}}{2}=340 \quad \cdots\cdots ㉡$

㉠을 ㉡에 대입하면

$$\frac{10(a+61)}{2}=340 \qquad \therefore a=7$$

$a=7$을 ㉠에 대입하면 $7+9d=61$

$\therefore d=6$

따라서 첫째항이 7, 공차가 6인 등차수열의 첫째항부터 제n항까지의 합은

$$\frac{n\{2\times7+(n-1)\times6\}}{2}$$

$$=\mathbf{n(3n+4)}$$

3 (1) $\frac{\sqrt{3}}{1}=\sqrt{3}$이므로

공비: $\mathbf{\sqrt{3}}$

첫째항이 1, 공비가 $\sqrt{3}$인 등비수열의 일반항은

$$1\cdot(\sqrt{3})^{n-1}=\mathbf{3^{\frac{n-1}{2}}}$$

(2) $\dfrac{-\frac{1}{3}}{1}=-\frac{1}{3}$이므로

공비: $\mathbf{-\frac{1}{3}}$

첫째항이 1, 공비가 $-\frac{1}{3}$인 등비수열의 일반항은

$$1\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}=\mathbf{\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}}$$

4 (1) $1=1$

$1+3=2^2$

$1+3+5=3^2$

$1+3+5+7=4^2$

⋮

$\therefore 1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$

(2) $\frac{1}{2}$, $\left(\frac{1}{2}\right)^2$, $\left(\frac{1}{2}\right)^3$, …을 차례로 색칠하여 보면 색칠한 부분의 넓이는 각각

$\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

$\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2=1-\left(\frac{1}{2}\right)^2$

중 단 원 확 인 하 기

새로 나온 용어와 기호

수열, 항, 유한수열, 무한수열, 일반항, 등차수열, 공차, 등차중항, 등비수열, 공비, 등비중항, a_n, $\{a_n\}$

1. 등차수열과 등비수열

등차수열

이해

1 다음 등차수열의 공차와 일반항을 구하여라.

(1) $-1,\ 1,\ 3,\ 5,\ 7,\ \cdots$ (2) $10,\ 7,\ 4,\ 1,\ -2,\ \cdots$

등차수열의 합

이해

2 다음 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 구하여라.

(1) $a_3=-5,\ a_9=43$ (2) $a_{10}=61,\ a_1+a_2+\cdots+a_{10}=340$

등비수열

이해

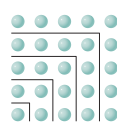
3 다음 등비수열의 공비와 일반항을 구하여라.

(1) $1,\ \sqrt{3},\ 3,\ 3\sqrt{3},\ 9,\ \cdots$ (2) $1,\ -\frac{1}{3},\ \frac{1}{9},\ -\frac{1}{27},\ \frac{1}{81},\ \cdots$

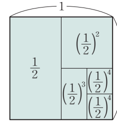
등비수열의 합

계산

4 다음 그림을 보고, 물음에 답하여라.



| 그림1 |



| 그림2 |

(1) | 그림1 | 을 이용하여 $1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$임을 설명하여라.

(2) | 그림2 | 를 이용하여 $\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^3+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^n=1-\left(\frac{1}{2}\right)^n$임을 설명하여라.

장면 묘사 기법

문제 해결

5 만화 영화에서 어떤 인물이 사라지는 장면을 묘사하기 위하여 그림의 넓이를 한 번에 50 %씩 줄여 간다고 한다. 처음 그림의 넓이를 10 cm²라고 할 때, 8번째 그림의 넓이를 구하여라.

$\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^3=1-\left(\frac{1}{2}\right)^3$

⋮

$\frac{1}{2}$부터 n번째 $\left(\frac{1}{2}\right)^n$까지 칠하면 색칠하지 않은 부분은 $\left(\frac{1}{2}\right)^n$이다.

$$\therefore \frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^3+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^n=1-\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

5 첫째항이 10이고, 공비가 $\frac{1}{2}$인 등비수열의 일반항 a_n은

$$a_n=10\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

따라서 8번째 그림의 넓이는

$$a_8=10\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{8-1}=\frac{10}{2^7}=\mathbf{\frac{5}{64}\ (cm^2)}$$

중단원 평가 문제

정답과 풀이 p.236

a_n에 $n=1$, 2, 3, 4를 각각 대입하여 a_1, a_2, a_3, a_4를 구한다.

01 바탕

다음 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제4항까지의 합을 구하여라.

(1) $a_n=2-3n$ (2) $a_n=1-\frac{1}{n}$

02 기본

제3항이 -8이고 제10항이 13인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 a_{15}의 값은?

① 18 ② 23 ③ 28 ④ 33 ⑤ 38

03 기본

다음 수열이 등차수열을 이루도록 하는 실수 x, y, z에 대하여 $x+y+z$의 값은?

$$-1,\ x,\ y,\ z,\ 35$$

① 11 ② 21 ③ 31 ④ 41 ⑤ 51

04 실력

1과 11 사이에 99개의 수 a_1, a_2, a_3, $\cdots$, a_{99}를 넣어

$$1,\ a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_{99},\ 11$$

이 이 순서대로 등차수열을 이루도록 할 때 이 수열의 공차를 구하고, 수열 $\{a_n\}$의 일반항을 구하여라.

05 실력

어느 직각삼각형의 세 변의 길이가 작은 것부터 순서대로 a, b, 3이고, 이 순서대로 등차수열을 이룬다고 할 때, 이 직각삼각형의 넓이는?

① $\frac{13}{24}$ ② $\frac{17}{24}$ ③ $\frac{12}{25}$ ④ $\frac{54}{25}$ ⑤ $\frac{56}{25}$

06 바탕

다음 물음에 답하여라.

(1) 등차수열 $\{a_n\}$의 일반항이 $a_n=3n-4$일 때, 첫째항부터 제9항까지의 합을 구하여라.

(2) 첫째항이 12, 첫째항부터 제10항까지의 합이 435인 등차수열에서 공차를 구하여라.

07 기본

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제10항까지의 합이 100이고, 제11항부터 제20항까지의 합이 300일 때, 제21항부터 제30항까지의 합은?

① 500 ② 600 ③ 700 ④ 800 ⑤ 1000

08 기본

첫째항이 23, 공차가 -3인 등차수열은 첫째항부터 제 몇 항까지의 합이 최대가 되는가?

① 제6항 ② 제7항 ③ 제8항 ④ 제9항 ⑤ 제10항

자연수 d로 나누었을 때의 나머지가 a인 자연수를 작은 것부터 나열하면
a, $a+d$, $a+2d$, $\cdots$

09 실력

10 이상 100 이하의 자연수 중에서 4로 나누었을 때의 나머지가 3인 수의 총합을 구하여라.

10 바탕

다음 보기 중 등비수열을 찾고, 등비수열인 경우 그 공비를 구하여라.

보기

ㄱ. 1, 3, 9, 27, $\cdots$
ㄴ. 1, 3, 6, 10, $\cdots$
ㄷ. 9, 3, 1, $\frac{1}{3}$, $\cdots$
ㄹ. 2, -6, 18, -54, $\cdots$

11 기본

제2항이 -12, 제5항이 324인 등비수열 $\{a_n\}$의 일반항 a_n을 구하여라.
(단, 공비는 실수이다.)

12 기본

두 수 3과 768 사이에 세 양수 a_1, a_2, a_3을 넣어 3, a_1, a_2, a_3, 768이 이 순서대로 등비수열을 이루도록 할 때, $a_1+a_2+a_3$의 값은?

① 192 ② 238 ③ 252 ④ 264 ⑤ 286

13 기본

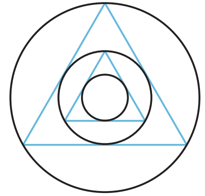
1이 아닌 세 양수 a, b, c가 이 순서대로 등비수열을 이룰 때,

$\frac{1}{\log_a b}+\frac{1}{\log_c b}$의 값을 구하여라.

처음 몇 개의 항을 나열하여 규칙성을 파악한다.

14 실력

오른쪽 그림과 같이 반지름의 길이가 1인 원에 내접하는 정삼각형을 그리고, 이 정삼각형에 내접하는 두 번째 원을 그린다. 다시 두 번째 원에 내접하는 정삼각형을 그리고, 이 정삼각형에 내접하는 세 번째 원을 그린다. 이와 같은 과정을 반복할 때, 8번째 원의 넓이는?



① $\frac{1}{2^6}\pi$ ② $\frac{1}{2^7}\pi$ ③ $\frac{1}{4^6}\pi$ ④ $\frac{1}{4^7}\pi$ ⑤ $\frac{1}{4^8}\pi$

15 기본

제3항이 4, 첫째항부터 제3항까지의 합이 7인 등비수열에서 첫째항과 공비를 구하여라. (단, 공비는 양수이다.)

16 기본

준기는 방학 기간을 이용하여 30일 동안 여행하는 계획을 세웠다. 첫째 날에는 10 km를 이동하고 둘째 날부터는 이동 거리를 전날의 10 %씩 줄여서 여행할 때, 30일 동안 준기가 이동할 거리는?

(단, $0.9^{30}=0.04$로 계산한다.)

① 90 km ② 92 km ③ 94 km ④ 96 km ⑤ 98 km

2 수열의 합

이 단원을 배우면

- 수열의 합을 구할 수 있다.
- 수열을 활용하여 실생활에 관련된 문제를 해결할 수 있다.

1 수열의 합과 그 활용

소단원의 학습 목표

1. $\sum$의 뜻과 성질을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.
2. 자연수의 거듭제곱의 합을 구하는 공식을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.
3. 계차수열의 뜻을 안다.
4. 계차수열을 이용하여 수열의 일반항을 구할 수 있다.
5. 수열을 활용하여 실생활의 문제를 해결할 수 있다.

여기서 배우는 용어 및 기호

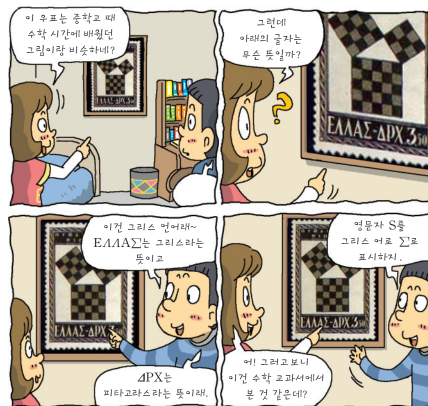
$\sum_{k=1}^{n} a_k$, **계차수열**, **원리합계**

1 수열의 합과 그 활용

학습 목표

- $\sum$의 뜻과 성질을 이해한다.
- 계차수열을 이해한다.
- 수열을 활용하여 실생활의 문제를 해결할 수 있다.

다 가 서 기 / **우표 속의 수학 기호**



수학의 특징 중 하나는 기호를 사용하여 길고 복잡한 문장을 간결하게 전달한다는 것이다. 일반적으로 수학 기호는 알파벳이나 이를 변형한 특수한 문자를 사용한다.

오른쪽 그림은 1955년 그리스에서 발행한 우표이다. 이 우표에 있는 글자에서도 우리는 앞으로 배우게 될 수학 기호를 발견할 수 있다.

다가서기 / 해설

기호 $\sum$는 1755년 스위스의 수학자 오일러(Euler, L. ; 1707～1783)가 처음으로 사용하였다. $\sum$는 영어의 S에 해당하는 그리스 알파벳의 하나인 시그마(sigma)의 대문자이다. 이런 이유에서 기호 $\sum$를 '시그마'라고 읽는다.

오일러가 '합 구하기'를 나타내는 라틴어 summam(영어로는 summation)의 첫 글자인 S 대신, 그리스 알파벳인 $\sum$를 택한 것은 아마도 S가 그 당시 다른 의미로 사용되고 있었기 때문이 아닐까?

탐구하기 / 풀이

수열 $\{a_n\}$에서 첫째항부터 제n항까지의 합은

$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$

1. $a_n=3n$이므로

$a_1+a_2+a_3+a_4+a_5$

$=\mathbf{3+6+9+12+15}$

2. $b_n=n^2$이므로

$b_1+b_2+b_3+b_4+b_5$

$=1^2+2^2+3^2+4^2+5^2$

$=\mathbf{1+4+9+16+25}$

87

01 합의 기호 $\sum$

탐구하기 / 수열의 합 나타내기

일반항이 다음과 같은 수열에서 첫째항부터 제5항까지의 합을 각각 덧셈으로 나타내어 보자.

1. $a_n=3n$　　2. $b_n=n^2$

알아보기 / $\sum$의 뜻을 알아보자.

기호 $\sum$는 영어 sum의 첫 글자 s에 해당하는 그리스 알파벳의 대문자로서 '시그마(sigma)'라고 읽는다.

수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합 $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$은 기호 $\sum$를 사용하여 다음과 같이 간단하게 나타낸다.

$$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$$

이때, k 대신에 i 또는 j 등의 다른 문자를 써서 $\sum_{i=1}^{n}a_i$, $\sum_{j=1}^{n}a_j$와 같이 나타낼 수도 있다.

즉, $\sum_{k=1}^{n}a_k$에서 기호 $\sum_{k=1}^{n}$는 a_k의 k에 1, 2, 3, ⋯, n을 차례로 대입하여 얻은 항 a_1, a_2, a_3, ⋯, a_n의 합을 뜻한다.

| 보기 | (1) $1+2+3+\cdots+n=\sum_{l=1}^{n}l$　(2) $3+6+9+\cdots+3n=\sum_{i=1}^{n}3i$

(3) $\sum_{k=1}^{n}4=\underbrace{4+4+4+\cdots+4}_{n개}$　(4) $\sum_{k=1}^{n}2^{k-1}=1+2+4+\cdots+2^{n-1}$

스스로 하기 / 익힘책 81쪽 | 익힘책 83쪽 | 익힘책 84쪽

1 다음 식을 기호 $\sum$를 사용하여 나타내어라.

(1) $1+4+7+\cdots+28$　(2) $1+3+3^2+\cdots+3^{n-1}$

2 다음을 기호 $\sum$를 사용하지 않은 합의 꼴로 나타내어라.

(1) $\sum_{k=1}^{10}(3k+1)$　(2) $\sum_{k=1}^{10}2^k$　(3) $\sum_{k=1}^{5}k^4$

알아보기 / 해설

- 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합은 다음과 같이 간단히 나타낸다.

$$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$$

(제n항까지 / 일반항 / 첫째항부터)

- k 대신 i, j 등과 같은 다른 문자를 사용하여 다음과 같이 표현해도 같은 수열의 합을 나타낸다.

$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$

$=\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{i=1}^{n}a_i=\sum_{j=1}^{n}a_j$

수열에서는 흔히 k를 사용하여 $\sum_{k=1}^{n}a_k$로 나타낸다.

스스로 하기 / 풀이

1 (1) 수열 1, 4, 7, ⋯, 28은 첫째항이 1이고, 공차가 3인 등차수열이므로 일반항 a_n은

$a_n=1+(n-1)\times 3=3n-2$

$3n-2=28$에서 $n=10$

즉, 항의 개수는 10이므로 주어진 식을 기호 $\sum$를 사용하여 나타내면

$1+4+7+\cdots+28$

$=\mathbf{\sum_{k=1}^{10}(3k-2)}$

다른 문자를 사용하여

$\sum_{i=1}^{10}(3i-2)$, $\sum_{j=1}^{10}(3j-2)$와

같이 나타낼 수도 있다.

(2) 수열 1, 3, 3^2, ⋯, 3^{n-1}은 첫째항이 1이고, 공비가 3인 등비수열이므로 일반항 a_n은

$a_n=1\cdot 3^{n-1}=3^{n-1}$

따라서 주어진 식을 기호 $\sum$를 사용하여 나타내면

$1+3+3^2+\cdots+3^{n-1}=\mathbf{\sum_{k=1}^{n}3^{k-1}}$

2 (1) $3k+1$의 k에 1, 2, 3, ⋯, 10을 차례로 대입하면

$\sum_{k=1}^{10}(3k+1)$

$=(3\cdot 1+1)+(3\cdot 2+1)+(3\cdot 3+1)+\cdots+(3\cdot 10+1)$

$=\mathbf{4+7+10+\cdots+31}$

(2) 2^k의 k에 1, 2, 3, ⋯, 10을 차례로 대입하면

$\sum_{k=1}^{10}2^k=\mathbf{2^1+2^2+2^3+\cdots+2^{10}}$

(3) k^4의 k에 1, 2, 3, 4, 5를 차례로 대입하면

$\sum_{k=1}^{5}k^4=\mathbf{1^4+2^4+3^4+4^4+5^4}$

알아보기 / 해설

- $\sum$의 기본 성질 [1], [3]에서 다음 성질이 성립함을 알 수 있다.

  상수 p, q에 대하여

  $$\sum_{k=1}^{n}(pa_k+qb_k)=p\sum_{k=1}^{n}a_k+q\sum_{k=1}^{n}b_k$$

  상수 p, q, r에 대하여

  $$\sum_{k=1}^{n}(pa_k+qb_k+r)$$
  $$=p\sum_{k=1}^{n}a_k+q\sum_{k=1}^{n}b_k+rn$$

- $$\sum_{k=1}^{n}1=\underbrace{1+1+1+\cdots+1}_{n\text{개}}=n$$

- $\sum$의 성질을 이용하여 계산할 때, 다음을 주의하자.

  $$\sum_{k=1}^{n}a_kb_k\neq\left(\sum_{k=1}^{n}a_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n}b_k\right)$$

  $$\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{b_k}\neq\frac{\sum_{k=1}^{n}a_k}{\sum_{k=1}^{n}b_k}$$

  $$\sum_{k=1}^{n}a_k^2\neq\left(\sum_{k=1}^{n}a_k\right)^2$$

88

알아보기 / $\sum$의 성질을 알아보자.

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$과 상수 c에 대하여

[1] $\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)=(a_1+b_1)+(a_2+b_2)+(a_3+b_3)+\cdots+(a_n+b_n)$
$=(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n)+(b_1+b_2+b_3+\cdots+b_n)$
$=\sum_{k=1}^{n}a_k+\sum_{k=1}^{n}b_k$

[2] $\sum_{k=1}^{n}(a_k-b_k)=(a_1-b_1)+(a_2-b_2)+(a_3-b_3)+\cdots+(a_n-b_n)$
$=(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n)-(b_1+b_2+b_3+\cdots+b_n)$
$=\sum_{k=1}^{n}a_k-\sum_{k=1}^{n}b_k$

[3] $\sum_{k=1}^{n}ca_k=ca_1+ca_2+ca_3+\cdots+ca_n$
$=c(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n)=c\sum_{k=1}^{n}a_k$

[4] $\sum_{k=1}^{n}c=\underbrace{c+c+c+\cdots+c}_{n\text{개}}=cn$

이상을 정리하면 다음과 같다.

$\sum$의 기본 성질

[1] $\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)=\sum_{k=1}^{n}a_k+\sum_{k=1}^{n}b_k$

[2] $\sum_{k=1}^{n}(a_k-b_k)=\sum_{k=1}^{n}a_k-\sum_{k=1}^{n}b_k$

[3] $\sum_{k=1}^{n}ca_k=c\sum_{k=1}^{n}a_k$ (단, c는 상수)

[4] $\sum_{k=1}^{n}c=cn$ (단, c는 상수)

스스로 하기 /

익힘책 81쪽 | 익힘책 83쪽 | 익힘책 84쪽

3 $\sum_{k=1}^{10}a_k=100$, $\sum_{k=1}^{10}b_k=120$일 때, 다음 식의 값을 구하여라.

(1) $\sum_{k=1}^{10}(-3a_k+50)$　　(2) $\sum_{k=1}^{10}(2a_k-3b_k)$

스스로 하기 / 풀이

3 (1) $\sum_{k=1}^{10}(-3a_k+50)$

$=\sum_{k=1}^{10}(-3a_k)+\sum_{k=1}^{10}50$

$=-3\sum_{k=1}^{10}a_k+50\times10$

$=-3\times100+500$

$=$**200**

(2) $\sum_{k=1}^{10}(2a_k-3b_k)$

$=2\sum_{k=1}^{10}a_k-3\sum_{k=1}^{10}b_k$

$=2\times100-3\times120$

$=$**-160**

Plus 문제

$\sum_{k=1}^{10}a_k=10$, $\sum_{k=1}^{10}a_k^2=20$일 때, $\sum_{k=1}^{10}(2a_k-1)^2$의 값을 구하여라.

| 풀이 |

$\sum_{k=1}^{10}(2a_k-1)^2=\sum_{k=1}^{10}(4a_k^2-4a_k+1)$

$=4\sum_{k=1}^{10}a_k^2-4\sum_{k=1}^{10}a_k+\sum_{k=1}^{10}1$

$=4\times20-4\times10+1\times10$

$=50$

89

02 자연수의 거듭제곱의 합

탐 구 하 기 / 도형을 이용하여 자연수의 합 구하기

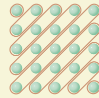
오른쪽 도형을 이용하면

$$1+2+3+4+5+4+3+2+1$$

의 값이 $5^2=25$임을 알 수 있다. 같은 방법으로

$$1+2+3+4+5+6+5+4+3+2+1$$

을 계산하여 보자.



알 아 보 기 / 자연수의 거듭제곱의 합을 구하는 공식을 알아보자.

첫째항이 1이고, 공차가 1일 때, 첫째항부터 제n항까지의 합은 $\frac{n\{2\cdot1+(n-1)\cdot1\}}{2}=\frac{n(n+1)}{2}$

$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

등차수열의 합의 공식을 이용하면 다음이 성립한다.

$$1+2+3+\cdots+n=\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2}$$

이제 자연수의 거듭제곱의 합, 즉 $\sum_{k=1}^{n}k^2=1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2$을 구하여 보자.

항등식 $(k+1)^3-k^3=3k^2+3k+1$의 k에 1, 2, 3, $\cdots$, n을 각각 대입하면

$k=1$일 때, $2^3-1^3=3\cdot1^2+3\cdot1+1$

$k=2$일 때, $3^3-2^3=3\cdot2^2+3\cdot2+1$

$k=3$일 때, $4^3-3^3=3\cdot3^2+3\cdot3+1$

$\vdots$

$k=n$일 때, $(n+1)^3-n^3=3n^2+3n+1$

이 등식들을 변끼리 더하여 정리하면

$$(n+1)^3-1^3=3(1^2+2^2+\cdots+n^2)+3(1+2+\cdots+n)+(\underbrace{1+1+\cdots+1}_{n\text{개}})$$

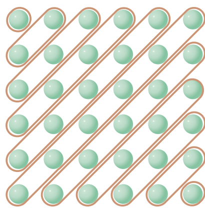
$$=3\sum_{k=1}^{n}k^2+3\cdot\frac{n(n+1)}{2}+n$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{1}{3}\left\{(n+1)^3-3\cdot\frac{n(n+1)}{2}-n-1\right\}$$

$$=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

탐구하기 / 풀이

$1+2+3+4+5+6+5+4+3+2+1=6^2=$ **36**

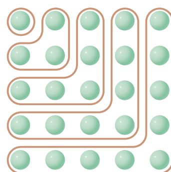


보충 학습

탐구하기에 주어진 도형을 오른쪽 그림과 같이 이용하면

$1+3+5+7+9=5^2=25$

임을 알 수 있다.



같은 방법으로 $1+3+5+7+9+11$을 계산하면 $6^2=36$임을 알 수 있다.

알아보기 / 해설

$\sum_{k=1}^{n}k^3=\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$임을 증명하여 보자.

항등식

$(k+1)^4-k^4=4k^3+6k^2+4k+1$

의 k에 1, 2, 3, $\cdots$, n을 각각 대입하면

$k=1$일 때

$2^4-1^4=4\cdot1^3+6\cdot1^2+4\cdot1+1$

$k=2$일 때

$3^4-2^4=4\cdot2^3+6\cdot2^2+4\cdot2+1$

$k=3$일 때

$4^4-3^4=4\cdot3^3+6\cdot3^2+4\cdot3+1$

$\vdots$

$k=n$일 때

$(n+1)^4-n^4=4n^3+6n^2+4n+1$

이 n개의 등식을 변끼리 더하여 정리하면

$$(n+1)^4-1^4$$

$$=4(1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3)$$

$$+6(1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2)$$

$$+4(1+2+3+\cdots+n)$$

$$+(\underbrace{1+1+1+\cdots+1}_{n\text{개}})$$

$$=4\sum_{k=1}^{n}k^3+6\sum_{k=1}^{n}k^2+4\sum_{k=1}^{n}k+n$$

$$=4\sum_{k=1}^{n}k^3+6\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$+4\cdot\frac{n(n+1)}{2}+n$$

$$4\sum_{k=1}^{n}k^3=(n+1)^4-n(n+1)(2n+1)$$

$$-2n(n+1)-(n+1)$$

$$=n^2(n+1)^2$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{n}k^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}=\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$$

함께하기 / 해설

1 (1) $\sum$의 기본 성질로 식을 분리한 후 자연수의 거듭제곱의 합의 공식을 이용하여 구한다.

(2) $\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \neq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k\right)$이므로 $\sum_{k=1}^{n} k(k^2+2)$를

$\sum_{k=1}^{n} k \sum_{k=1}^{n} (k^2+2)$

로 계산하지 않도록 한다.

스스로 하기 / 풀이

1 (1) $1^2+2^2+3^2+\cdots+10^2$

$=\sum_{k=1}^{10} k^2=\frac{10\times11\times21}{6}$

$=\mathbf{385}$

(2) $1^3+2^3+3^3+\cdots+10^3$

$=\sum_{k=1}^{10} k^3$

$=\left(\frac{10\times11}{2}\right)^2$

$=\mathbf{3025}$

(3) $6+7+8+\cdots+15$

$=\sum_{k=6}^{15} k=\sum_{k=1}^{15} k-\sum_{k=1}^{5} k$

$=\frac{15\times16}{2}-\frac{5\times6}{2}$

$=\mathbf{105}$

(4) $6^2+7^2+8^2+\cdots+15^2$

$=\sum_{k=6}^{15} k^2=\sum_{k=1}^{15} k^2-\sum_{k=1}^{5} k^2$

$=\frac{15\times16\times31}{6}-\frac{5\times6\times11}{6}$

$=\mathbf{1185}$

일반적으로 자연수의 거듭제곱의 합은 다음과 같다.

자연수의 거듭제곱의 합

(1) $\sum_{k=1}^{n} k=1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$

(2) $\sum_{k=1}^{n} k^2=1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

(3) $\sum_{k=1}^{n} k^3=1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$

함께하기 / 익힘책 81쪽 | 익힘책 83쪽 | 익힘책 84쪽

1 다음을 구하여라.

(1) $\sum_{k=1}^{n} (k^2+k)$ (2) $\sum_{k=1}^{n} k(k^2+2)$

풀이

(1) $\sum_{k=1}^{n} (k^2+k)=\sum_{k=1}^{n} k^2+\sum_{k=1}^{n} k=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{n(n+1)}{2}$

$=\frac{n(n+1)}{2}\left(\frac{2n+1+3}{3}\right)=\mathbf{\frac{n(n+1)(n+2)}{3}}$

(2) $\sum_{k=1}^{n} k(k^2+2)=\sum_{k=1}^{n} (k^3+2k)=\sum_{k=1}^{n} k^3+2\sum_{k=1}^{n} k$

$=\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2+2\cdot\frac{n(n+1)}{2}$

$=\frac{n(n+1)}{4}\{n(n+1)+4\}=\mathbf{\frac{n(n+1)(n^2+n+4)}{4}}$

스스로 하기 / 익힘책 81쪽 | 익힘책 83쪽 | 익힘책 84쪽

1 다음 합을 구하여라.

(1) $1^2+2^2+3^2+\cdots+10^2$ (2) $1^3+2^3+3^3+\cdots+10^3$

(3) $6+7+8+\cdots+15$ (4) $6^2+7^2+8^2+\cdots+15^2$

2 다음 합을 구하여라.

(1) $\sum_{k=1}^{n} (k^2-2k)$ (2) $\sum_{k=1}^{n} k^2(k+1)$

2 (1) $\sum_{k=1}^{n} (k^2-2k)$

$=\sum_{k=1}^{n} k^2-2\sum_{k=1}^{n} k$

$=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-2\cdot\frac{n(n+1)}{2}$

$=\mathbf{\frac{n(n+1)(2n-5)}{6}}$

(2) $\sum_{k=1}^{n} k^2(k+1)$

$=\sum_{k=1}^{n} (k^3+k^2)$

$=\sum_{k=1}^{n} k^3+\sum_{k=1}^{n} k^2$

$=\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2+\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

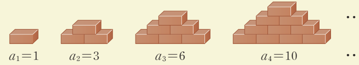
$=\mathbf{\frac{n(n+1)(n+2)(3n+1)}{12}}$

91

03 계차수열의 뜻과 활용

탐구하기 / 벽돌 쌓기

다음 그림과 같은 벽돌 쌓기의 각 단계에 있는 벽돌의 개수를 a_n이라고 할 때, 물음에 답하여 보자.



1. a_5와 a_6을 각각 구하여라.
2. 수열 $\{a_n\}$에서 a_n과 a_{n+1} 사이의 관계를 말하여라.

알아보기 / 계차수열의 뜻을 알아보자.

다음과 같은 수열 $\{a_n\}$에서 이웃하는 두 항의 차는 등차수열을 이룬다.

$\{a_n\}$: 1, 3, 6, 10, 15, 21, …

2, 3, 4, 5, 6, …

이와 같이 수열이 어떤 규칙에 의하여 만들어져 있는지를 알아보기 위하여 이웃한 두 항의 차를 구하여 조사하는 경우가 있다.

수열 a_1, a_2, a_3, …, a_n, … 에 대하여 b_n을 다음과 같이 정의하자.

$$b_n=a_{n+1}-a_n \ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

이때, 수열 $\{b_n\}$을 주어진 수열 $\{a_n\}$의 **계차수열**이라고 한다.

계차수열(階差數列)을 영어로 sequence of difference라고 한다.

1, 4, 9, 16, 25, …
3, 5, 7, 9, …

| 보기 | (1) 수열 1, 4, 9, 16, 25, …의 계차수열은 3, 5, 7, 9, …이므로 첫째항이 3이고, 공차가 2인 등차수열이다.
(2) 수열 5, 6, 8, 12, 20, 36, …의 계차수열은 1, 2, 4, 8, 16, …이므로 첫째항이 1이고, 공비가 2인 등비수열이다.

스스로 하기 / 익힘책 81쪽 | 익힘책 83쪽 | 익힘책 84쪽

1 다음 수열의 계차수열을 구하여라.
(1) 1, 2, 7, 16, 29, … (2) 2, 7, 32, 157, 782, …

탐구하기 / 풀이

각 단계의 벽돌의 개수가 증가하는 규칙을 알아보기 쉽게 표로 나타내면 다음과 같다.

단계	벽돌의 개수
1	1
2	$1+2=3$
3	$1+2+3=6$
4	$1+2+3+4=10$
5	$1+2+3+4+5=15$
6	$1+2+3+4+5+6=21$

1. 2단계, 3단계, 4단계의 벽돌은 각각 전단계에서 2개, 3개, 4개씩 더 증가하였으므로 5단계와 6단계의 벽돌은 각각 전단계에서 5개, 6개가 더 증가할 것이다.

$\therefore a_5=10+5=\mathbf{15},\ a_6=15+6=\mathbf{21}$

2. 이웃하는 두 항의 차는 차례로 2, 3, 4, 5, 6, …으로 $(n+1)$단계에는 n단계보다 $(n+1)$개의 벽돌이 더 필요하다.

$\therefore \boldsymbol{a_{n+1}=a_n+n+1}$

알아보기 / 해설

- 수열 $\{a_n\}$에서 이웃하는 두 항의 차
  $b_n=a_{n+1}-a_n(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$
  을 a_{n+1}과 a_n의 계차라 하고, 계차로 이루어진 수열을 수열 $\{a_n\}$의 계차수열이라고 한다.
- 주어진 수열이 등차수열이나 등비수열이 아닐 때에는 계차를 구해 본다.

스스로 하기 / 풀이

1 (1) 수열 1, 2, 7, 16, 29, …의 계차수열은
1, 5, 9, 13, …
따라서 첫째항이 **1**이고, 공차가 **4**인 등차수열이다.

(2) 수열 2, 7, 32, 157, 782, …의 계차수열은
5, 25, 125, 625, …
따라서 첫째항이 **5**이고, 공비가 **5**인 등비수열이다.

알 아 보 기 / 계차수열을 이용하여 수열의 일반항을 알아보자.

수열 $\{a_n\}$의 계차수열을 $\{b_n\}$이라고 하면

$$b_1 = a_2 - a_1$$
$$b_2 = a_3 - a_2$$
$$b_3 = a_4 - a_3$$
$$\vdots$$
$$b_{n-1} = a_n - a_{n-1}$$

$a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ \cdots,\ a_{n-1},\ a_n$
$b_1,\ b_2,\ b_3,\ \cdots,\ b_{n-1}$

이들을 변끼리 더하면

$$b_1+b_2+\cdots+b_{n-1}=a_n-a_1$$
$$\therefore a_n=a_1+b_1+b_2+\cdots+b_{n-1}=a_1+\sum_{k=1}^{n-1} b_k \text{ (단, } n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$$

이상을 정리하면 다음과 같다.

계차수열과 수열의 일반항

수열 $\{a_n\}$의 계차수열을 $\{b_n\}$이라고 하면

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1} b_k \text{ (단, } n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$$

$\{a_n\}$: 3, 4, 7, 12, 19, …
$\{b_n\}$: 1, 3, 5, 7, …
이므로 계차수열 $\{b_n\}$은 첫째항이 1, 공차가 2인 등차수열이다.
$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1} b_k$는 일반적으로 $n\geq 2$일 때 성립하므로 $n=1$일 때에도 성립하는지 확인해야 한다.

| 보기 | 수열 $\{a_n\}$이 3, 4, 7, 12, 19, …일 때, 이 수열의 계차수열을 $\{b_n\}$이라고 하면 수열 $\{b_n\}$은

1, 3, 5, 7, …

즉, $b_n=2n-1$이므로

$$a_n=3+\sum_{k=1}^{n-1}(2k-1)=3+2\cdot\frac{(n-1)n}{2}-(n-1)$$
$$=n^2-2n+4\ (n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$$

그런데 이것은 $n=1$일 때에도 성립하므로

$$a_n=n^2-2n+4$$

스 스 로 하 기 / 익힘책 81쪽 | 익힘책 83쪽 | 익힘책 84쪽

2 다음 수열의 일반항 a_n을 구하여라.

(1) 1, 3, 8, 16, 27, 41, … (2) 1, 1, 2, 4, 7, 11, …
(3) 2, 3, 5, 9, 17, 33, … (4) −1, 0, 3, 12, 39, 120, …

스스로 하기 / 풀이

2 (1) 주어진 수열의 계차수열을 $\{b_n\}$이라고 하면 수열 $\{b_n\}$은 2, 5, 8, 11, 14, …이다.

즉, $b_n=3n-1$이므로

$$a_n=1+\sum_{k=1}^{n-1}(3k-1)$$
$$=1+3\cdot\frac{(n-1)n}{2}-(n-1)$$
$$=\frac{3}{2}n^2-\frac{5}{2}n+2$$
$$(n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$$

그런데 이것은 $n=1$일 때에도 성립하므로 구하는 일반항은

$$\mathbf{\frac{3}{2}n^2-\frac{5}{2}n+2}$$

(2) 주어진 수열의 계차수열을 $\{b_n\}$이라고 하면 수열 $\{b_n\}$은 0, 1, 2, 3, 4, …이다.

즉, $b_n=n-1$이므로

$$a_n=1+\sum_{k=1}^{n-1}(k-1)$$
$$=1+\frac{(n-1)n}{2}-(n-1)$$
$$=\frac{1}{2}n^2-\frac{3}{2}n+2\ (n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$$

그런데 이것은 $n=1$일 때에도 성립하므로 구하는 일반항은

$$\mathbf{\frac{1}{2}n^2-\frac{3}{2}n+2}$$

(3) 주어진 수열의 계차수열을 $\{b_n\}$이라고 하면 수열 $\{b_n\}$은 1, 2, 4, 8, 16, …이다.

즉, $b_n=2^{n-1}$이므로

$$a_n=2+\sum_{k=1}^{n-1}2^{k-1}$$
$$=2+\frac{1(2^{n-1}-1)}{2-1}$$
$$=2^{n-1}+1\ (n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$$

그런데 이것은 $n=1$일 때에도 성립하므로 구하는 일반항은

$$\mathbf{2^{n-1}+1}$$

(4) 주어진 수열의 계차수열을 $\{b_n\}$이라고 하면 수열 $\{b_n\}$은 1, 3, 9, 27, 81, …이다.

즉, $b_n=3^{n-1}$이므로

$$a_n=-1+\sum_{k=1}^{n-1}3^{k-1}$$
$$=-1+\frac{1(3^{n-1}-1)}{3-1}$$
$$=\frac{1}{2}(3^{n-1}-3)\ (n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$$

그런데 이것은 $n=1$일 때에도 성립하므로 구하는 일반항은

$$\mathbf{\frac{1}{2}(3^{n-1}-3)}$$

93

04 원리합계

알 아 보 기 / 단리법에 의한 원리합계를 계산하여 보자.

은행에 돈을 저축하면 저축 기간과 이율에 따라 이자를 받는다. 또 돈을 빌렸을 때에도 빌린 기간과 이율에 따라 이자를 지불해야 한다.

이때, 저축하거나 빌린 금액을 원금이라 하고, 원금과 이자의 합계를 **원리합계**라고 한다.

이자를 계산하는 방법에는 단리법과 복리법이 있다.

단리법은 처음의 원금에 대해서만 이자를 계산하는 방법이다. 단리법에 의한 이자와 원리합계는 다음과 같다.

(이자)
=(원금)×(이율)×(기간)
(원리합계)
=(원금)+(이자)

단리법에 의한 이자와 원리합계

원금을 P, 이율을 i, 기간을 n이라고 할 때, 단리법에 의한 이자 I와 원리합계 S는

$$I=P\times i\times n$$
$$S=P+I=P(1+i\times n)$$

함 께 하 기 / 익힘책 81쪽 | 익힘책 83쪽 | 익힘책 84쪽

1 원금 1,000,000원을 연이율 4 %의 단리로 3년 동안 예금하였을 때, 이자와 원리합계를 구하여라.

풀이
이자는 $1{,}000{,}000\times0.04\times3=120{,}000$(원)
원리합계는 $1{,}000{,}000+120{,}000=1{,}120{,}000$(원)

스 스 로 하 기 / 익힘책 81쪽 | 익힘책 83쪽 | 익힘책 84쪽

1 원금 2,000,000원을 월이율 0.5 %의 단리로 10개월 동안 예금하였을 때, 원리합계를 구하여라.

알아보기 / 해설

P원을 n년간 연이율 i로 단리로 예금할 때, n년 후의 원리합계는 다음과 같다.

1년 후 원리합계
$P+Pi=P(1+i)$

2년 후 원리합계
$P(1+i)+Pi=P(1+2i)$

3년 후 원리합계
$P(1+2i)+Pi=P(1+3i)$

⋮

n년 후 원리합계
$P\{1+(n-1)i\}+Pi=P(1+ni)$

스스로 하기 / 풀이

1 $P=2{,}000{,}000$, $i=0.005$, $n=10$ 이고 이자는
$2{,}000{,}000\times0.005\times10$
$=100{,}000$(원)
이므로 구하는 원리합계는
$2{,}000{,}000+100{,}000$
$=$**2,100,000**(원)

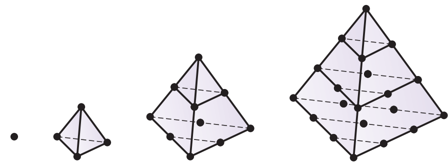
익힘책 코너

읽기 자료_ 82쪽

특정한 평면도형에 수를 대응시킬 수 있는 것처럼 특정한 입체도형에 수를 대응시키는 것도 가능하다.

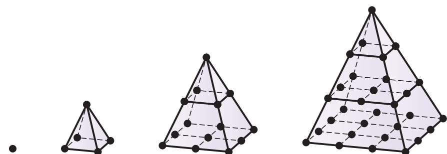
• 삼각뿔수

점의 수를 늘려가면서 정삼각뿔 모양을 계속해서 배열하여 만들어지는 점의 수로 이루어진 수열 1, 4, 10, 20, …에서 각각의 수가 삼각뿔수이다.



• 사각뿔수

점의 수를 늘려가면서 정사각뿔 모양을 계속해서 배열하여 만들어지는 점의 수로 이루어진 수열 1, 5, 14, 30, …에서 각각의 수가 사각뿔수이다.



알 아 보 기 / 복리법에 의한 원리합계를 계산하여 보자.

복리법은 일정 기간 동안에 발생한 이자와 처음 원금을 더한 원리합계가 다음 기간의 원금이 되어 이자를 계산하는 방법이다.

일반적으로 원금 P를 연이율 r의 복리로 n년 동안 예금하면

$$\begin{aligned}(1\text{년 후의 원리합계})&=P+Pr=P(1+r)\\(2\text{년 후의 원리합계})&=P(1+r)+P(1+r)r\\&=P(1+r)(1+r)=P(1+r)^2\\(3\text{년 후의 원리합계})&=P(1+r)^2+P(1+r)^2r\\&=P(1+r)^2(1+r)=P(1+r)^3\\&\vdots\\(n\text{년 후의 원리합계})&=P(1+r)^n\end{aligned}$$

이상을 정리하면 다음과 같다.

이율이 연이율로 주어지면 이자 계산도 연단위로 하고, 이율이 월이율로 주어지면 이자 계산도 월단위로 한다.

복리법에 의한 원리합계의 계산

원금을 P, 이율을 r, 기간을 n이라고 할 때, 복리법에 의한 원리합계 S는

$$S=P(1+r)^n$$

| **보기** | 원금 1,000,000원을 연이율 5 %의 복리로 3년 동안 예금하였을 때의 원리합계는

$$1{,}000{,}000\times(1+0.05)^3=1{,}157{,}625(\text{원})$$

이다.

스 스 로 하 기 / 익힘책 81쪽 | 익힘책 83쪽 | 익힘책 84쪽

2 3,000,000원을 연이율 6 %의 복리로 5년 동안 예금하였을 때, 원리합계를 구하여라. (단, 계산값은 반올림하여 원 단위로 구한다.)

3 2,500,000원을 6개월마다 4 %의 복리로 4년 동안 예금하였을 때, 원리합계를 구하여라. (단, 계산값은 반올림하여 원 단위로 구한다.)

알아보기 / 해설

P원을 n년간 연이율 r로 예금할 때, 단리법과 복리법 중 어느 것이 더 유리한지 알아보자.

예를 들어 $P=100$(만 원), $n=10$(년), $r=10(\%)$일 때, 10년 후 100만 원에 대한 원리합계는 다음과 같다.

(단위: 만 원, $1.1^8 \fallingdotseq 2.143$)

원리합계	단리법	복리법
현재	100	100
1년 후	110	$100+10=110$
2년 후	120	$110+(110\times0.1)$ $=110+11=121$
3년 후	130	$121+(121\times0.1)$ $=121+12.1=133.1$
⋮	⋮	⋮
9년 후	190	$214.3+(214.3\times0.1)$ $=214.3+21.43=235.73$
10년 후	200	$235.73+(235.73\times0.1)$ $=235.73+23.573$ $=259.303$

위의 표에서 알아본 바와 같이 같은 금액을 같은 기간, 같은 이율로 예금을 한다면 복리법이 더 유리하다.

스스로 하기 / 풀이

2 $P=3{,}000{,}000$, $r=0.06$, $n=5$이므로 구하는 원리합계는

$3{,}000{,}000\times(1+0.06)^5=\mathbf{4{,}014{,}677}$(원)

3 $P=2{,}500{,}000$, $r=0.04$, $n=8$이므로 구하는 원리합계는

$2{,}500{,}000\times(1+0.04)^8=\mathbf{3{,}421{,}423}$(원)

모둠 학습

| 모둠 과제 |

1

원리합계
$a_1=x\times1.05^{10}$
$a_2=x\times1.05^9$
$a_3=x\times1.05^8$
⋮
$a_9=x\times1.05^2$
$a_{10}=x\times1.05$

95

모 둠 학 습

*각 모둠별로 토론하여 모둠 과제를 해결한 후, 발표자가 그 결과를 발표해 보세요.

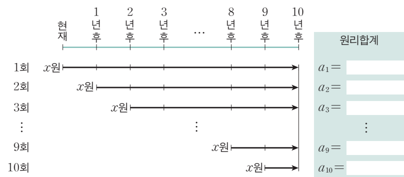
- **학습 목표_** 수열을 이용하여 적립금을 계산할 수 있다.
- **학습 방법_** 수열을 이용하여 각 모둠 과제를 해결한다.
- **모둠의 구성_** 각자가 속한 모둠에 대하여 다음 표에 적어 보자.

모둠 이름	모둠 인원: 명 으뜸이: 발표자:
	모둠 구성원 이름:

| **모둠 과제** | 매년 초에 일정한 금액을 적립하여 10년 후에 벤처 기업의 창업 자금으로 1억 원을 마련하려고 한다. 연이율 5 %의 복리로 계산할 때, 매년 얼마씩 적립해야 하는지 구하여 보자.

(단, $1.05^{10}=1.63$으로 계산한다.)

❶ 매회의 적립금을 x원이라고 할 때, x원에 대한 10년 후, 9년 후, …, 1년 후의 원리합계를 차례로 a_1, a_2, …, a_{10}이라고 하자. 이때, 이들을 각각 구하여 빈칸에 써넣어라.



❷ ❶에서 구한 a_1, a_2, a_3, …, a_{10}의 합 $S=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{10}$을 x로 나타내어라.

❸ $S=100{,}000{,}000$을 만족하는 x의 값을 구하여라.

(단, 소수 첫째 자리에서 반올림하여 계산한다.)

❷ 등비수열의 합의 공식을 이용하면

$$\begin{aligned}S&=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_9+a_{10}\\&=a_{10}+a_9+a_8+\cdots+a_2+a_1\\&=x\times1.05+x\times1.05^2+x\times1.05^3+\cdots\\&\quad+x\times1.05^{10}\\&=\frac{1.05x(1.05^{10}-1)}{1.05-1}\\&=\frac{1.05x(1.63-1)}{0.05}\\&=21x(1.63-1)\\&=\mathbf{13.23x}\end{aligned}$$

❸ $13.23x=100{,}000{,}000$

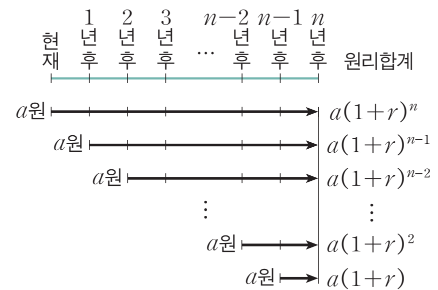
$$\therefore x=\frac{100{,}000{,}000}{13.23}=\mathbf{7{,}558{,}579}(\text{원})$$

보충 학습

적금은 적립 시점에 따라 매기간 초에 적립하는 기수불과 매기간 말에 적립하는 기말불로 나눌 수 있다. 이때, 이자 계산은 항상 기간 말에 한다는 것을 주의해야 한다.

매년 연이율 r의 복리로 a원씩 적립할 때, n년 말의 적립금의 원리합계를 기수불과 기말불로 구하여 보자.

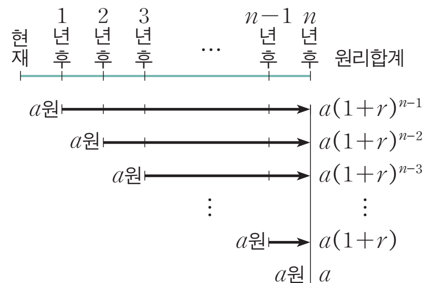
• 기수불



따라서 구하는 적립금의 원리합계는

$$a(1+r)+a(1+r)^2+a(1+r)^3+\cdots+a(1+r)^n=\frac{a(1+r)\{(1+r)^n-1\}}{(1+r)-1}$$

• 기말불



따라서 구하는 적립금의 원리합계는

$$a+a(1+r)+a(1+r)^2+\cdots+a(1+r)^{n-1}=\frac{a\{(1+r)^n-1\}}{(1+r)-1}$$

중단원 확인하기 / 풀이

1 (1) $1+2+2^2+2^3+\cdots+2^{20}$

$=\sum_{k=1}^{21} 2^{k-1}$

(2) $1+3+5+7+9+\cdots+99$

$=\sum_{k=1}^{50}(2k-1)$

2 (1) $1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4+\cdots+10\cdot11$

$=\sum_{k=1}^{10}k(k+1)$

$=\sum_{k=1}^{10}k^2+\sum_{k=1}^{10}k$

$=\frac{10\cdot11\cdot21}{6}+\frac{10\cdot11}{2}$

$=\mathbf{440}$

(2) $1\cdot3+2\cdot5+3\cdot7+\cdots+20\cdot41$

$=\sum_{k=1}^{20}k(2k+1)$

$=2\sum_{k=1}^{20}k^2+\sum_{k=1}^{20}k$

$=2\cdot\frac{20\cdot21\cdot41}{6}+\frac{20\cdot21}{2}$

$=\mathbf{5950}$

(3) $1\cdot20+2\cdot19+3\cdot18+\cdots+20\cdot1$

$=\sum_{k=1}^{20}k(21-k)$

$=21\sum_{k=1}^{20}k-\sum_{k=1}^{20}k^2$

$=21\cdot\frac{20\cdot21}{2}-\frac{20\cdot21\cdot41}{6}$

$=\mathbf{1540}$

3 (1) $\{a_n\}$: 3, 6, 10, 15, 21, 28, $\cdots$

$\{b_n\}$: 3, 4, 5, 6, 7, $\cdots$

이므로 $b_n=n+2$

$\therefore a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}b_k=3+\sum_{k=1}^{n-1}(k+2)$

$=3+\frac{(n-1)n}{2}+2(n-1)$

$=\frac{n^2+3n+2}{2}$

$=\mathbf{\frac{(n+1)(n+2)}{2}}$

중 단 원 확 인 하 기

새로 나온 용어와 기호
계차수열, 원리합계, $\sum_{k=1}^{n}a_k$

2. 수열의 합

합의 기호 Σ

계산

1 다음을 합의 기호 Σ를 사용하여 나타내어라.

(1) $1+2+2^2+2^3+\cdots+2^{20}$

(2) $1+3+5+7+9+\cdots+99$

자연수의 거듭제곱의 합

계산

2 다음 합을 구하여라.

(1) $1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4+\cdots+10\cdot11$

(2) $1\cdot3+2\cdot5+3\cdot7+\cdots+20\cdot41$

(3) $1\cdot20+2\cdot19+3\cdot18+\cdots+20\cdot1$

계차수열

계산

3 다음 수열의 일반항을 구하여라.

(1) 3, 6, 10, 15, 21, 28, $\cdots$

(2) 2, 3, 6, 15, 42, 123, $\cdots$

원리합계

문제 해결

4 다음을 구하여라.

(1) 연이율 6 %의 단리로 3년 동안 예금하였을 때의 이자가 720,000원이었을 때, 원금을 구하여라.

(2) 원금 2,000,000원을 연이율 6 %의 복리로 3년 동안 예금하였을 때, 원리합계를 구하여라.

원리합계

의사소통

5 10,000,000원의 목돈을 마련하기 위하여 월 불입금 100,000원, 월이율 0.5 %, 매달 복리로 계산하는 적금에 가입하려고 한다. 다음을 구하여라.

(단, 계산값은 반올림하여 원 단위로 구한다.)

(1) 2달 후의 원리합계를 구하여라.

(2) 10달 후의 원리합계를 구하여라.

(3) 10,000,000원이 넘는 것은 몇 번 불입한 후인지 구하여라.

(2) $\{a_n\}$: 2, 3, 6, 15, 42, 123, $\cdots$

$\{b_n\}$: 1, 3, 9, 27, 81, $\cdots$

이므로 $b_n=3^{n-1}$

$\therefore a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}b_k$

$=2+\sum_{k=1}^{n-1}3^{k-1}$

$=2+\frac{3^{n-1}-1}{3-1}$

$=\mathbf{\frac{3^{n-1}+3}{2}}$

4 (1) 원금이 x원이라고 하면

$x\times0.06\times3=720,000$

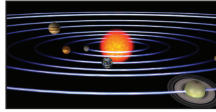
$\therefore x=\mathbf{4,000,000}$(원)

(2) $2,000,000(1+0.06)^3=\mathbf{2,382,032}$(원)

97

읽을 거리

수열로 찾은 행성_ 티티우스 수열



국제 천문 연맹(IAU)은 2006년 8월 24일 IAU 총회에서 태양계 안에 있는 천체에 국한하여 행성을 다음과 같이 정의하였다.

1. 태양 주위를 돈다.
2. 충분한 질량을 가져서 정역학적 평형을 이루며, 구형에 가까운 형태를 가지고 있다.
3. 주변 궤도의 천체에서 지배적인 위치를 차지한다.

이 조건을 모두 만족하는 태양계의 행성은 수성, 금성, 지구, 화성, 목성, 토성, 천왕성, 해왕성의 여덟 개이다. 그러나 이전까지 행성으로 분류되었던 명왕성은 세 번째 조건을 만족하지 못하여 행성이 아닌 왜소행성으로 분류되었다.

이와 같은 행성을 찾는 데 수열이 이용된 역사가 있다.

1766년 독일의 천문학자 티티우스(Titius)는 그때까지 발견된 행성인 수성, 금성, 지구, 화성, 목성, 토성과 태양 사이의 거리에 대한 일정한 규칙을 발견하였다.

즉, 지구와 태양과의 거리를 10으로 했을 때 당시까지 알려진 6개 행성과 태양과의 거리는 수성은 4, 금성은 7, 화성은 15, 목성은 52, 토성은 95이었다. 이를 바탕으로 다음과 같은 '티티우스 수열'을 생각하였다.

$$4,\ 7,\ 10,\ 16,\ 28,\ 52,\ 100,\ 196,\ 388,\ 772,\ \cdots$$

1781년 3월 13일 영국의 윌리엄 허셀은 티티우스 수열에서 196에 해당하는 새로운 행성인 천왕성을 발견하였다. 실제 거리는 195로 측정되었다.

1801년 1월 1일 이탈리아 천문학자 피아치는 티티우스 수열에서 28의 위치에 있는 왜소행성 세레스(Ceres)를 발견하였다.

1848년에 독일의 요한 갈레는 거리가 301인 해왕성을 발견하고, 1930년에 미국의 클라이드 톰보는 거리가 395인 명왕성을 발견하였다.

이와 같이 티티우스 수열은 정확한 것은 아니지만 행성을 찾는 데 도움이 되었다.

티티우스 수열	4	7	10	16	28	52	100	196	388	772
태양에서 행성까지의 평균 거리	4	7	10	15	28	52	95	195	301	395
해당 행성	수성	금성	지구	화성	세레스 (왜소 행성)	목성	토성	천왕성	해왕성	명왕성 (왜소 행성)

5 매월 100,000원, 월이율 0.5 %의 복리로 계산되는 적금에 가입하면

(1) 2달 후의 원리합계는

$100{,}000(1+0.005)^2+100{,}000(1+0.005)$

$=\mathbf{201{,}503}$(원)

(2) 10달 후의 원리합계는

첫째항이 $100{,}000(1+0.005)$이고,

공비가 1.005이므로

$100{,}000(1+0.005)^{10}$

$+100{,}000(1+0.005)^9+\cdots$

$+100{,}000(1+0.005)$

$$=\frac{100{,}000(1+0.005)(1.005^{10}-1)}{1.005-1}$$

$=\mathbf{1{,}027{,}917}$(원)

(3) n번 불입했을 때 그 원리합계는

$$\frac{100{,}000(1+0.005)(1.005^n-1)}{1.005-1}$$

이므로

$$\frac{100{,}000\times1.005\times(1.005^n-1)}{0.005}$$

$>10{,}000{,}000$

$$1.005^n-1>\frac{100\times0.005}{1.005}$$

$1.005^n-1>0.4975$

$1.005^n>1.4975$

$n\log1.005>\log1.4975$

$$n>\frac{\log1.4975}{\log1.005}$$

$\therefore n>80.\times\times\times$

따라서 10,000,000원이 넘는 것은 **81**번 불입한 후이다.

읽을거리 / 해설

1766년 독일의 천문학자 티티우스(Titius)는 그때까지 발견된 행성인 수성, 금성, 지구, 화성, 목성, 토성과 태양 사이의 거리에 대한 일정한 규칙을 발견하였다. 그것은 이웃하는 두 행성들 간의 거리는 두 배의 관계에 있다는 것이다. 즉, 처음에는 0, 두 번째는 3, 세 번째는 앞의 두 행성 사이의 거리의 두 배인 6이다.

따라서 다음과 같은 수열이 만들어진다.

0, 3, 6, 12, 24, 48, 96, 192, 384, 768, ⋯

위의 각각의 숫자에 4를 더하면 다음과 같다.

4, 7, 10, 16, 28, 52, 100, 196, 388, 772, ⋯

독일의 천문학자 보데만이 여기에 관심을 가지고 이 수열에 의거하여 새 행성의 위치를 예측하는 논문을 1772년에 발표했다. 그 법칙을 티티우스-보데의 법칙이라고 한다.

중단원 평가 문제

정답과 풀이 p.238

01 바탕

다음 중 옳지 않은 것은?

① $3+3+3+3+3=\sum_{k=1}^{5}3$

② $1+3+5+\cdots+15=\sum_{k=1}^{8}(2k-1)$

③ $1+2+2^2+\cdots+2^n=\sum_{k=1}^{n}2^k$

④ $1-1+1-1+1-1=\sum_{k=1}^{6}(-1)^{k-1}$

⑤ $9+3+1+\cdots+\left(\frac{1}{3}\right)^{n-3}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{3}\right)^{k-3}$

02 기본

$\sum_{k=1}^{20}a_k=5$, $\sum_{k=1}^{20}(a_k-2)^2=78$일 때, $\sum_{k=1}^{20}{a_k}^2$의 값은?

① 10 ② 14 ③ 18 ④ 22 ⑤ 26

03 기본

$\sum_{k=1}^{100}(-1)^{k-1}(2k-1)$의 값은?

① -100 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 100

$k=1, 2, 3, \cdots, 100$을 대입하여 간단히 한다.

04 기본

$\sum_{n=1}^{10}\left(\sum_{k=1}^{n} k\right)$의 값은?

① 210 ② 220 ③ 230 ④ 240 ⑤ 250

05 기본

수열 1, 1+2, 1+2+4, 1+2+4+8, …의 첫째항부터 제8항까지의 합은?

① 2^7-1 ② 2^8-1 ③ 2^8-9 ④ 2^8-10 ⑤ 2^9-10

06 실력

$\frac{2}{1^2+2}+\frac{2}{2^2+4}+\frac{2}{3^2+6}+\cdots+\frac{2}{10^2+20}$의 값이 $\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값은? (단, p, q는 서로소인 자연수)

① 305 ② 306 ③ 307 ④ 308 ⑤ 309

분모의 유리화를 이용하여 $\frac{1}{f(k)}$을 간단히 한다.

07 실력

$f(x)=\sqrt{x}+\sqrt{x+1}$일 때, $\sum_{k=1}^{80}\frac{1}{f(k)}$의 값은?

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

08 바탕

수열 $\{a_n\}$이 다음과 같을 때, 그 계차수열을 $\{b_n\}$이라고 하자. 이때, b_5와 a_6의 값을 구하여라.

(1) 1, 2, 7, 16, 29, …

(2) 1, 6, 31, 156, 781, …

09 기본

수열 1, 3, 7, 15, 31, 63, …의 제10항은?

① 257 ② 513 ③ 1023 ④ 2049 ⑤ 4197

10 실력

다음과 같이 1부터 연속된 자연수가 규칙적으로 나열되어 있다.

〔제1행〕	1								
〔제2행〕	2	3	4						
〔제3행〕	5	6	7	8	9				
〔제4행〕	10	11	12	13	14	15	16		
〔제5행〕	17	18	19	20	21	22	23	24	25
⋮									

이때, 제12행에 나열되는 모든 수의 합을 구하여라.

11 기본

연이율 6 %, 1년마다 복리로 매년 초에 6만 원 씩 적립할 때, 10년 후의 원리합계는? (단, $1.06^{10}=1.8$로 계산한다.)

① 825000원 ② 848000원 ③ 860000원
④ 868000원 ⑤ 870000원

12 실력

50만 원짜리 TV를 이달 초에 구입하여 5만 원은 일시불로 지불하고, 나머지 금액은 이달 말부터 매월 말에 일정한 금액으로 12회에 걸쳐 모두 갚으려고 한다. 월이율 3 %, 1개월마다 복리로 계산할 때, 매월 말에 갚아야 할 금액을 구하여라. (단, $1.03^{12}=1.4$로 계산한다.)

13 실력

올해부터 매년 말에 100만 원씩 10년 동안 지급받는 연금이 있다. 이 연금을 올해 초에 한꺼번에 받는다면 얼마를 받게 되는가?

(단, $1.05^{10}=1.6$, 연이율 5 %, 1년마다 복리로 계산한다.)

① 700만 원 ② 750만 원 ③ 800만 원
④ 850만 원 ⑤ 900만 원

대단원 평가 문제

정답과 풀이 p.240

01

다음 수열이 등비수열을 이룰 때, ( ) 안에 알맞은 수의 합은?

$-2,\ (\quad),\ -8,\ (\quad),\ (\quad),\ 64,\ \cdots$

① -10 ② -12 ③ -14
④ -16 ⑤ -18

02

$\sum_{k=1}^{10} a_k=25$, $\sum_{k=1}^{10} b_k=35$일 때,
$\sum_{k=1}^{10} (2a_k+3b_k-2)$의 값은?

① 135 ② 140 ③ 145
④ 150 ⑤ 165

03

수열 $\{a_n\}$의 일반항이 $a_n=pn+q$일 때, $a_3=7$, $a_6=13$이다. 이때, $p+q$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

04

$\sum_{k=1}^{10} a_k=7$, $\sum_{k=2}^{11} a_k=20$일 때, $a_{11}-a_1$의 값은?

① 7 ② 13 ③ 20
④ 27 ⑤ 33

05

각 항이 실수인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_2=3$, $a_5=24$일 때, a_{10}의 값은?

① $2\cdot3^8$ ② $2\cdot3^9$ ③ $3\cdot2^8$
④ $3\cdot2^9$ ⑤ $3\cdot2^{10}$

06

$\sum_{k=1}^{10} k(k-1)(k+2)$의 값은?

① 3025 ② 3100 ③ 3140
④ 3225 ⑤ 3300

07

첫째항이 1, 공비가 2인 등비수열에서 처음으로 1000보다 크게 되는 항은 제 몇 항인가?

(단, $\log 2=0.3010$)

① 제10항 ② 제11항 ③ 제12항
④ 제13항 ⑤ 제14항

08

8과 30 사이에 n개의 수 a_1, a_2, a_3, $\cdots$, a_n을 넣어 만든 수열 8, a_1, a_2, a_3, $\cdots$, a_n, 30은 등차수열이고, 그 합이 228이다. 이때, 공차와 상수 n의 합은?

① 10 ② 11 ③ 12
④ 13 ⑤ 14

09

첫째항이 35, 첫째항부터 제10항까지의 합이 215인 등차수열 $\{a_n\}$이 있다. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 몇 항까지의 합이 최대가 되는가?

① 제8항 ② 제9항 ③ 제10항
④ 제11항 ⑤ 제12항

10

수열 2, 6, 12, 20, 30, $\cdots$에서 제n항을 a_n이라고 할 때, a_{20}의 값은?

① 410 ② 420 ③ 430
④ 440 ⑤ 450

11

수열 -1, 0, 2, 6, 14, 30 $\cdots$의 첫째항부터 제10항까지의 합은?

① 1003 ② 1013 ③ 1023
④ 1024 ⑤ 1034

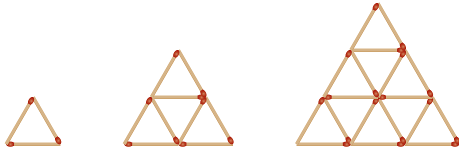
12

$1\cdot1+2\cdot2+3\cdot2^2+4\cdot2^3+\cdots+11\cdot2^{10}$의 값은?

① $9\cdot2^{10}+1$ ② $9\cdot2^{11}+1$ ③ $10\cdot2^{10}+1$
④ $10\cdot2^{11}+1$ ⑤ $11\cdot2^{11}+1$

13

다음 그림과 같이 정삼각형 모양으로 성냥개비를 배열하여 한 변에 놓인 성냥개비가 n개일 때의 전체 성냥개비의 개수를 a_n이라고 하자. 예를 들어 $a_1=3$, $a_2=9$이다. 이때, a_9의 값은?



① 108 ② 135 ③ 165
④ 198 ⑤ 234

14

다음과 같이 홀수가 배열되어 있을 때, 제10행의 7번째 수는?

제1행				1			
제2행			3	5	7		
제3행		9	11	13	15	17	
제4행	19	21	23	25	27	29	31
⋮				⋮			

① 139 ② 151 ③ 163
④ 175 ⑤ 205

15

매년 초에 일정한 금액을 적립하여 10년 후에 벤처 기업의 창업 자금으로 1억 1000만 원을 마련하려고 한다. 연이율 10 %이고 1년마다 복리로 계산할 때, 매년 얼마씩 적립해야 하는가?

(단, $1.1^{10}=2.6$으로 계산한다.)

① 6200000원 ② 6225000원
③ 6250000원 ④ 6300000원
⑤ 6350000원

16

이달 초 가격이 1000만 원인 오토바이를 할부로 구입하고 이달 말부터 매달 일정한 금액을 12개월에 걸쳐 갚는다면 매달 얼마씩 갚아야 하는가? (단, $1.015^{12}=1.2$, 월이율 1.5 %, 1개월마다 복리로 계산한다.)

① 90만 원 ② 94만 원 ③ 98만 원
④ 100만 원 ⑤ 105만 원

17 UP!!

수열 9, 99, 999, 9999, …의 첫째항부터 제 n항까지의 합은?

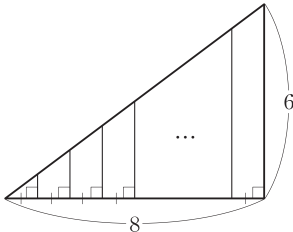
① $\frac{1}{9}(10^n-7n-1)$ ② $\frac{1}{9}(10^n-9n-10)$

③ $\frac{1}{9}(10^{n+1}-9n-1)$ ④ $\frac{1}{9}(10^{n+1}-9n-10)$

⑤ $\frac{1}{81}(10^{n+1}-9n-1)$

18 UP!!

다음 그림과 같이 밑변의 길이와 높이가 각각 8, 6인 직각삼각형의 내부에 높이와 평행한 n개의 선분을 일정한 간격으로 그을 때, 이 n개의 선분의 길이의 총합은?



① $2n$ ② $3n$ ③ $6n$

④ $8n$ ⑤ $10n$

19 서술형

세 수 x, -4, y가 이 순서대로 등차수열을 이루고, 세 수 x, 3, y가 이 순서대로 등비수열을 이룰 때, $(x-y)^2$의 값을 구하여라.

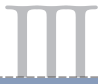
20 서술형

$$1+\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+2+3}+\cdots+\frac{1}{1+2+3+\cdots+20}$$

의 값을 구하여라.

21 서술형

김부장은 무역 회사에서 일하다가 올해 초에 정년퇴직을 하였다. 퇴직금으로 2억 2천만 원을 받을 예정이지만 이 돈을 매년 말에 일정한 금액의 연금 형식으로 받기를 원한다. 정년퇴직한 해의 연말부터 연이율 6 %의 복리로 20년간 지급받는다면 김부장이 매년 말에 받는 금액은 얼마인지 구하여라. (단, $1.06^{20}=3.2$로 계산한다.)

 수열

중단원 평가 문제

▶ 1. 등차수열과 등비수열 / P_99

01 (1) $a_1=2-3\cdot1=-1$

$a_2=2-3\cdot2=-4$

$a_3=2-3\cdot3=-7$

$a_4=2-3\cdot4=-10$

$\therefore a_1+a_2+a_3+a_4=-1-4-7-10=-22$

(2) $a_1=1-\frac{1}{1}=0$

$a_2=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

$a_3=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$

$a_4=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$

$\therefore a_1+a_2+a_3+a_4=0+\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}=\frac{23}{12}$

답 (1) -22 (2) $\frac{23}{12}$

02 제3항이 -8이므로

$a_3=a+2d=-8$ ……㉠

제10항이 13이므로

$a_{10}=a+9d=13$ ……㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-14$, $d=3$

$\therefore a_n=-14+(n-1)\times3=3n-17$

따라서 a_{15}의 값은

$a_{15}=3\times15-17=28$

답 ③

03 이 등차수열의 공차를 d라고 하면 첫째항이 -1, 제5항이 35이므로

$-1+4d=35$ $\therefore d=9$

$\therefore x=-1+9=8$

$y=8+9=17$

$z=17+9=26$

$\therefore x+y+z=8+17+26=51$

답 ⑤

04 수열 1, a_1, a_2, $\cdots$, a_{99}, 11을 $\{b_n\}$이라고 하면 첫째항이 1이고 제101항이 11인 등차수열을 이루므로 공차를 d라고 하면

$b_{101}=1+100d=11$

$\therefore d=\frac{1}{10}$

수열 $\{a_n\}$에서 $a_1=1+\frac{1}{10}=\frac{11}{10}$이고,

공차 $d=\frac{1}{10}$이므로

$a_n=\frac{11}{10}+(n-1)\times\frac{1}{10}$

$=\frac{1}{10}n+1$

답 공차: $\frac{1}{10}$, $a_n=\frac{1}{10}n+1$

05 a, b, 3은 직각삼각형의 세 변의 길이이고, 빗변이 길이가 3이므로

$a^2+b^2=3^2$ ……㉠

또 a, b, 3이 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$2b=a+3$ $\therefore a=2b-3$ ……㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$(2b-3)^2+b^2=9$

$5b^2-12b=0$

$b(5b-12)=0$

$b\neq0$이므로

$b=\frac{12}{5}$

$b=\frac{12}{5}$를 ㉡에 대입하면

$a=\frac{9}{5}$

따라서 구하는 넓이는

$\frac{1}{2}ab=\frac{1}{2}\times\frac{9}{5}\times\frac{12}{5}=\frac{54}{25}$

답 ④

06 (1) $a_1=-1$, $a_9=23$이므로 첫째항부터 제9항까지의 합은

$\frac{9(-1+23)}{2}=99$

(2) 공차를 d라고 하면 첫째항이 12, 첫째항부

터 제10항까지의 합이 435이므로

$\frac{10(2\times12+9d)}{2}=435$

$\therefore d=7$

답 (1) 99 (2) 7

07 첫째항을 a, 공차를 d라 하고, 첫째항부터 제10항까지의 합을 T, 첫째항부터 제20항까지의 합을 S라고 하자.

제11항부터 제20항까지의 합은 $S-T$와 같으므로

$S=\frac{20(2a+19d)}{2}=400$ ……㉠

$T=\frac{10(2a+9d)}{2}=100$ ……㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=1,\ d=2$

제21항부터 제30항까지의 합은 첫째항부터 제30항까지의 합에서 S를 뺀 것과 같으므로

$\frac{30(2\times1+29\times2)}{2}-400=900-400=500$

답 ①

08 첫째항이 23, 공차가 -3이므로

$a_n=23+(n-1)\times(-3)=-3n+26$

$-3n+26>0$에서

$n<\frac{26}{3}=8.66\cdots$

따라서 제8항까지의 합이 최대가 된다.

답 ③

09 10 이상 100 이하의 자연수 중에서 4로 나누었을 때의 나머지가 3인 수를 작은 것부터 나열하면

11, 15, 19, …, 99

이때, $11=4\times2+3$, $99=4\times24+3$에서 항의 개수가 23개이므로 첫째항이 11, 끝항이 99인 등차수열의 합은

$\frac{23(11+99)}{2}=1265$

답 1265

10 ㄱ. 차례로 3씩 곱하여 다음 항이 만들어지므로 공비가 3인 등비수열이다.

ㄴ. 등비수열이 아니다.

ㄷ. 차례로 $\frac{1}{3}$씩 곱하여 다음 항이 만들어지므로 공비가 $\frac{1}{3}$인 등비수열이다.

ㄹ. 차례로 -3씩 곱하여 다음 항이 만들어지므로 공비가 -3인 등비수열이다.

답 ㄱ: 3, ㄷ: $\frac{1}{3}$, ㄹ: -3

11 첫째항을 a, 공비를 r라고 하면

$a_2=ar=-12$ ……㉠

$a_5=ar^4=324$ ……㉡

㉡÷㉠을 하면

$r^3=-27$

$\therefore r=-3$

$r=-3$을 ㉠에 대입하면

$-3a=-12$

$\therefore a=4$

따라서 구하는 일반항은

$a_n=4\cdot(-3)^{n-1}$

답 $a_n=4\cdot(-3)^{n-1}$

12 공비를 $r(r>0)$라고 하면 첫째항이 3, 제5항이 768이므로

$3r^4=768,\ r^4=256$

$\therefore r=4(\because r>0)$

따라서 $a_1=12,\ a_2=48,\ a_3=192$이므로

$a_1+a_2+a_3=12+48+192$

$=252$

답 ③

13 $a,\ b,\ c$가 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$b^2=ac$

$\therefore \frac{1}{\log_a b}+\frac{1}{\log_c b}=\log_b a+\log_b c$

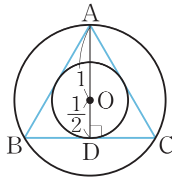
$=\log_b ac$

$=\log_b b^2$

$=2$

답 2

14 오른쪽 그림에서 원의 중심 O는 삼각형 ABC의 무게중심이므로 점 A에서 $\overline{\text{BC}}$에 내린 수선의 발을 D라고 하면



$\overline{\text{DO}}=\frac{1}{2}\overline{\text{AO}}$

이때, $\overline{\text{AO}}$는 첫 번째 원의 반지름이고, $\overline{\text{DO}}$는 두 번째 원의 반지름이므로 두 번째 원의 넓이는 첫 번째 원의 넓이의 $\frac{1}{4}$배가 된다.

첫 번째 원의 넓이가 π이므로

두 번째 원의 넓이는 $\frac{1}{4}\pi$

세 번째 원의 넓이는 $\left(\frac{1}{4}\right)^2\pi$

⋮

따라서 8번째 원의 넓이는 $\left(\frac{1}{4}\right)^7\pi=\frac{1}{4^7}\pi$이다.

답 ④

15 첫째항을 a, 공비를 r라고 하면

제3항이 4이므로

$ar^2=4$ ……㉠

첫째항부터 제3항까지의 합이 7이므로

$\frac{a(1-r^3)}{1-r}=7$ ……㉡

㉡에서

$\frac{a(1-r^3)}{1-r}=\frac{a(1-r)(1+r+r^2)}{1-r}$

$=a(1+r+r^2)$

이므로 $a(1+r+r^2)=7$

㉠에서 $a=\frac{4}{r^2}$를 위의 식에 대입하면

$\frac{4}{r^2}+\frac{4}{r}+4=7,\ 3r^2-4r-4=0$

$(r-2)(3r+2)=0$

$r>0$이므로 $r=2$

$r=2$를 ㉠에 대입하면

$a=1$

답 첫째항: 1, 공비: 2

16 이동 거리를 전날의 10 %씩 줄여서 여행하므로

첫째 날 이동 거리는 10 km

둘째 날 이동 거리는 10×0.9 (km)

셋째 날 이동 거리는 10×0.9^2 (km)

⋮

30째 날 이동 거리는 10×0.9^{29} (km)

따라서 30일 동안 이동할 거리는

$10+10\times0.9+10\times0.9^2+\cdots+10\times0.9^{29}$

$=\frac{10(1-0.9^{30})}{1-0.9}=\frac{10(1-0.04)}{0.1}$

$=96$ (km)

답 ④

▶ 2. 수열의 합 / P_116

01 ③ $1+2+2^2+\cdots+2^n=\sum_{k=1}^{n+1}2^{k-1}$

답 ③

02 $\sum_{k=1}^{20}(a_k-2)^2=78$에서

$\sum_{k=1}^{20}(a_k{}^2-4a_k+4)=78$

$\sum_{k=1}^{20}a_k{}^2-4\sum_{k=1}^{20}a_k+\sum_{k=1}^{20}4=78$

$\sum_{k=1}^{20}a_k=5$이므로

$\sum_{k=1}^{20}a_k{}^2-4\cdot5+4\cdot20=78$

$\therefore \sum_{k=1}^{20}a_k{}^2=78+20-80=18$

답 ③

03 $\sum_{k=1}^{100}(-1)^{k-1}(2k-1)$

$=\sum_{k=1}^{100}(-1)^{k-1}\cdot2k-\sum_{k=1}^{100}(-1)^{k-1}$

$=2-4+6-8+\cdots+198-200$

$\quad-(1-1+1-1+\cdots+1-1)$

$=\underbrace{(-2)+(-2)+\cdots+(-2)}_{50\text{개}}-0$

$=-100$

답 ①

04 $\sum_{n=1}^{10}\left(\sum_{k=1}^{n}k\right)=\sum_{n=1}^{10}\frac{n(n+1)}{2}$

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{10}(n^2+n)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{10\cdot11\cdot21}{6}+\frac{10\cdot11}{2}\right)$$

$$=220$$

답 ②

05 주어진 수열의 제k항을 a_k라고 하면

$a_k=1+2+2^2+\cdots+2^{k-1}$

$$=\frac{1(2^k-1)}{2-1}$$

$$=2^k-1$$

따라서 주어진 수열의 첫째항부터 제8항까지의 합은

$$\sum_{k=1}^{8}a_k=\sum_{k=1}^{8}(2^k-1)=\frac{2(2^8-1)}{2-1}-8=2^9-10$$

답 ⑤

06 $\frac{2}{1^2+2}+\frac{2}{2^2+4}+\frac{2}{3^2+6}+\cdots+\frac{2}{10^2+20}$

$$=\sum_{k=1}^{10}\frac{2}{k^2+2k}$$

$$=\sum_{k=1}^{10}\frac{2}{k(k+2)}$$

$$=\sum_{k=1}^{10}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)$$

$$=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots$$

$$+\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{11}\right)+\left(\frac{1}{10}-\frac{1}{12}\right)$$

$$=1+\frac{1}{2}-\frac{1}{11}-\frac{1}{12}$$

$$=\frac{175}{132}$$

따라서 $p=132$, $q=175$이므로

$p+q=307$

답 ③

07 $\frac{1}{f(k)}=\frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}$

$$=\frac{\sqrt{k}-\sqrt{k+1}}{(\sqrt{k}+\sqrt{k+1})(\sqrt{k}-\sqrt{k+1})}$$

$$=-(\sqrt{k}-\sqrt{k+1})$$

$\therefore \sum_{k=1}^{80}\frac{1}{f(k)}$

$$=\sum_{k=1}^{80}\{-(\sqrt{k}-\sqrt{k+1})\}$$

$$=-\{(1-\sqrt{2})+(\sqrt{2}-\sqrt{3})+\cdots$$

$$+(\sqrt{80}-\sqrt{81})\}$$

$$=-(1-\sqrt{81})=8$$

답 ③

08 (1) $\{b_n\}$: 1, 5, 9, 13, $\cdots$

즉, 첫째항이 1이고 공차가 4인 등차수열이므로

$b_5=13+4=17$

$\therefore a_6=29+17=46$

(2) $\{b_n\}$: 5, 25, 125, 625, $\cdots$

즉, 첫째항이 5이고 공비가 5인 등비수열이므로

$b_5=625\times5=3125$

$\therefore a_6=781+3125=3906$

답 (1) $b_5=17$, $a_6=46$ (2) $b_5=3125$, $a_6=3906$

09 주어진 수열의 계차수열을 $\{b_n\}$이라고 하면

$\{b_n\}$: 2, 4, 8, 16, 32, $\cdots$

즉, $\{b_n\}$은 공비가 2인 등비수열이므로 주어진 수열의 제10항은

$$1+(2+2^2+2^3+\cdots+2^9)=1+\frac{2(2^9-1)}{2-1}$$

$$=1023$$

답 ③

10 각 행의 첫 번째 수로 이루어진 수열을 $\{a_n\}$이라고 하면

$\{a_n\}$: 1, 2, 5, 10, 17, $\cdots$

수열 $\{a_n\}$의 계차수열을 $\{b_n\}$이라고 하면 $\{b_n\}$은 1, 3, 5, 7, $\cdots$이다.

즉, $b_n=2n-1$이므로

$a_n=1+\sum_{k=1}^{n-1}(2k-1)$

$$=1+2\cdot\frac{(n-1)n}{2}-(n-1)$$

$$=n^2-2n+2$$

따라서 제12행의 첫 번째 수는

$a_{12}=12^2-2\cdot12+2=122$

이때, 제1행에 나열된 수는 1개, 제2행에 나열된 수는 3개, 제3행에 나열된 수는 5개, …, 제n행에 나열된 수는 $(2n-1)$개이므로 제12행에 나열된 수는 $2\cdot12-1=23$(개)

따라서 제12행에 나열된 수는 첫째항이 122, 공차가 1, 항의 개수가 23개인 등차수열을 이루므로 그 합은

$\dfrac{23(2\cdot122+22\cdot1)}{2}=3059$

답 3059

11 10년 후의 적립금의 원리합계를 S라고 하면

$S=6(1+0.06)+6(1+0.06)^2+\cdots$
$+6(1+0.06)^{10}$

$=\dfrac{6(1+0.06)(1.06^{10}-1)}{1.06-1}$

$=\dfrac{6\times1.06\times(1.8-1)}{0.06}=84.8$(만 원)

따라서 10년 후의 원리합계는 848000원이다.

답 ②

12 50만 원 중 5만 원은 일시불로 지불하였으므로 나머지 45만 원만 생각하면 된다.

45만 원의 12개월 후의 원리합계는

$450000\times1.03^{12}=450000\times1.4$(원) ……㉠

매월 말에 a원씩 상환한다고 하면 12회에 걸쳐 상환할 금액의 원리합계는

$a+a(1+0.03)+a(1+0.03)^2+\cdots$
$+a(1+0.03)^{11}$

$=\dfrac{a(1.03^{12}-1)}{1.03-1}$

$=\dfrac{0.4}{0.03}a=\dfrac{40}{3}a$(원) ……㉡

㉠=㉡이어야 하므로

$\dfrac{40}{3}a=450000\times1.4$

$\therefore a=450000\times1.4\times\dfrac{3}{40}=47250$(원)

따라서 매달 47250원씩 갚아야 한다.

답 47250원

13 올해 초에 한꺼번에 받는 금액을 S만 원이라고 하면 S의 10년 후의 원리합계와 매년 말에 100만 원씩 10년 동안 받는 금액의 원리합계가 같아야 한다.

S만 원의 10년 후의 원리합계는

$S\times1.05^{10}=1.6S$(만 원) ……㉠

매년 말에 100만 원씩 10년 동안 받는 금액의 원리합계는

$100+100\times1.05+100\times1.05^2+\cdots+100\times1.05^9$

$=\dfrac{100(1.05^{10}-1)}{1.05-1}$

$=\dfrac{100(1.6-1)}{0.05}$

$=1200$(만 원) ……㉡

㉠=㉡이어야 하므로

$1.6S=1200$

$\therefore S=750$(만 원)

답 ②

대단원 평가 문제 p.120~123

01 공비를 r라고 하면

$-2\cdot r^2=-8 \quad \therefore r^2=4$

$-2\cdot r^5=64 \quad \therefore r^5=-32=(-2)^5$

따라서 $r=-2$이므로 ( ) 안에 알맞은 수는 차례대로

4, 16, -32

$\therefore 4+16-32=-12$

답 ②

02 $\displaystyle\sum_{k=1}^{10}(2a_k+3b_k-2)=2\sum_{k=1}^{10}a_k+3\sum_{k=1}^{10}b_k-\sum_{k=1}^{10}2$

$=2\times25+3\times35-10\times2$

$=135$

답 ①

03 $a_3=7$에서

$3p+q=7$ ……㉠

$a_6=13$에서

$6p+q=13$ ……㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$p=2,\ q=1$

$\therefore p+q=3$

답 ③

04 $\sum_{k=2}^{11}a_k-\sum_{k=1}^{10}a_k$

$=(a_2+a_3+a_4+\cdots+a_{11})$

$\quad-(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{10})$

$=a_{11}-a_1$

$\therefore a_{11}-a_1=20-7=13$

답 ②

05 $a_2=ar=3$ ……㉠

$a_5=ar^4=24$ ……㉡

㉡÷㉠을 하면

$r^3=8 \qquad \therefore r=2$

$r=2$를 ㉠에 대입하면 $a=\frac{3}{2}$

$\therefore a_n=\frac{3}{2}\cdot 2^{n-1}=3\cdot 2^{n-2}$

$\therefore a_{10}=3\cdot 2^{10-2}=3\cdot 2^8$

답 ③

06 $\sum_{k=1}^{10}k(k-1)(k+2)$

$=\sum_{k=1}^{10}(k^3+k^2-2k)$

$=\sum_{k=1}^{10}k^3+\sum_{k=1}^{10}k^2-2\sum_{k=1}^{10}k$

$=\left(\frac{10\cdot 11}{2}\right)^2+\frac{10\cdot 11\cdot 21}{6}-2\cdot\frac{10\cdot 11}{2}$

$=3300$

답 ⑤

07 첫째항이 1, 공비가 2인 등비수열의 일반항 a_n은

$a_n=1\cdot 2^{n-1}=2^{n-1}$

$a_n=2^{n-1}>1000$을 만족하는 정수 n의 최솟값을 구하여야 하므로 위의 식의 양변에 밑이 10인 로그를 취하면

$(n-1)\log 2>3$

$n-1>\frac{3}{\log 2}=9.9\times\times\times$

$\therefore n>10.9\times\times\times$

따라서 처음으로 1000보다 크게 되는 항은 제11항이다.

답 ②

08 수열 8, a_1, a_2, a_3, $\cdots$, a_n, 30은 첫째항이 8, 끝항이 30, 항의 개수가 $(n+2)$개이므로

$\frac{(n+2)(8+30)}{2}=228$

$n+2=12 \qquad \therefore n=10$

제12항이 30이므로

$30=8+11d \qquad \therefore d=2$

$\therefore d+n=12$

답 ③

09 첫째항부터 제10항까지의 합이 215이므로 공차를 d라고 하면

$\frac{10(2\cdot 35+9d)}{2}=215 \qquad \therefore d=-3$

따라서 일반항 a_n은

$a_n=35+(n-1)\times(-3)=-3n+38$

$a_n>0$인 항까지의 합이 최대가 되므로

$-3n+38>0$에서

$n<12.6\times\times\times$

따라서 제12항까지의 합이 최대가 된다.

답 ⑤

10 수열 $\{a_n\}$의 계차수열을 $\{b_n\}$이라고 하면 $\{b_n\}$은 4, 6, 8, 10, $\cdots$이므로 첫째항이 4, 공차가 2인 등차수열이다.

$\therefore b_n=4+(n-1)\times 2$

$\quad=2n+2$

$\therefore a_{20}=2+\sum_{k=1}^{19}(2k+2)$

$\quad=2+2\cdot\frac{19\cdot 20}{2}+38$

$\quad=420$

답 ②

11 주어진 수열을 $\{a_n\}$, 그 계차수열을 $\{b_n\}$이라고 하면 $\{b_n\}$은 1, 2, 4, 8, 16, …이므로 첫째항이 1, 공비가 2인 등비수열이다.

$\therefore b_n=1\cdot 2^{n-1}=2^{n-1}$

$\therefore a_n=-1+\sum_{k=1}^{n-1} 2^{k-1}$

$=-1+\frac{1(2^{n-1}-1)}{2-1}$

$=2^{n-1}-2$

따라서 첫째항부터 제10항까지의 합은

$\sum_{k=1}^{10} a_k=\sum_{k=1}^{10}(2^{k-1}-2)=\sum_{k=1}^{10}2^{k-1}-2\cdot 10$

$=\frac{1(2^{10}-1)}{2-1}-20=1003$

답 ①

12 $S=1\cdot 1+2\cdot 2+3\cdot 2^2+\cdots+11\cdot 2^{10}$ ……㉠

$2S=1\cdot 2+2\cdot 2^2+3\cdot 2^3+\cdots+11\cdot 2^{11}$ ……㉡

㉠−㉡에서

$-S=1+2+2^2+\cdots+2^{10}-11\cdot 2^{11}$

$=\frac{2^{11}-1}{2-1}-11\cdot 2^{11}$

$=-10\cdot 2^{11}-1$

$\therefore S=10\cdot 2^{11}+1$

$\therefore 1\cdot 1+2\cdot 2+3\cdot 2^2+\cdots+11\cdot 2^{10}$

$=10\cdot 2^{11}+1$

답 ④

13 수열 $\{a_n\}$의 계차수열을 $\{b_n\}$이라고 하면 $\{b_n\}$은 6, 9, 12, …이다.

즉, $b_n=3(n+1)$이므로

$a_9=3+\sum_{k=1}^{8}3(k+1)$

$=3+3\left(\frac{8\cdot 9}{2}+8\right)=135$

답 ②

14 각 행의 첫 번째 수로 이루어진 수열 1, 3, 9, 19, …를 수열 $\{a_n\}$이라 하고, 수열 $\{a_n\}$의 계차수열을 $\{b_n\}$이라고 하면 $\{b_n\}$은 2, 6, 10, …이므로 첫째항이 2, 공차가 4인 등차수열이다.

$\therefore b_n=4n-2$

$\therefore a_n=1+\sum_{k=1}^{n-1}(4k-2)$

$=1+4\cdot\frac{(n-1)n}{2}-2(n-1)$

$=2n^2-4n+3$

제10행의 첫 번째 수는

$a_{10}=2\cdot 10^2-4\cdot 10+3=163$

이고 각 행은 공차가 2인 등차수열을 이루므로 제10행의 7번째 수는

$163+6\cdot 2=175$

답 ④

15 적립할 일정한 금액을 a원이라고 하면 10년 후의 원리합계는

$a(1+0.1)+a(1+0.1)^2+\cdots+a(1+0.1)^{10}$

$=\frac{a(1+0.1)(1.1^{10}-1)}{1.1-1}$

$=\frac{1.1a(2.6-1)}{0.1}$

$=110000000$

$\therefore\ a=\frac{110000000}{11\times 1.6}=6250000$(원)

답 ③

16 이달 말부터 a만 원씩 갚는다고 하면 갚는 금액의 12개월 후의 원리합계는

$a+a\times 1.015+\cdots+a\times 1.015^{11}$

$=\frac{a(1.015^{12}-1)}{1.015-1}=\frac{a(1.2-1)}{0.015}$

$=\frac{40}{3}a$(만 원) ……㉠

한편 1000만 원의 12개월 후의 원리합계는

$1000\times 1.015^{12}=1000\times 1.2=1200$(만 원) ……㉡

㉠=㉡이어야 하므로

$\frac{40}{3}a=1200\qquad\therefore a=90$

따라서 매달 90만 원씩 갚아야 한다.

답 ①

17 주어진 수열을 $\{a_n\}$이라고 하면 $\{a_n\}$은

$10-1,\ 10^2-1,\ 10^3-1,\ 10^4-1,\ \cdots$

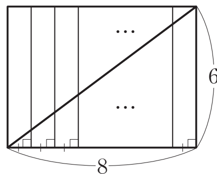
이므로 $a_n=10^n-1$

따라서 첫째항부터 제n항까지의 합은

$$\sum_{k=1}^{n}(10^k-1)=\sum_{k=1}^{n}10^k-n$$
$$=\frac{10(10^n-1)}{10-1}-n$$
$$=\frac{1}{9}(10^{n+1}-9n-10)$$

답 ④

18 오른쪽 그림과 같이 2개의 삼각형을 모아 가로, 세로의 길이가 각각 8, 6인 직사각형에서 생각하면 길이가 6인 n개의 선분의 길이의 총합의 $\frac{1}{2}$이 된다.



$\therefore \frac{6n}{2}=3n$

답 ②

19 1단계 등차중항을 이용한다.

세 수 $x,\ -4,\ y$가 이 순서대로 등차수열을 이루므로 -4는 x와 y의 등차중항이다.

$\therefore -8=x+y$ ……㉠

2단계 등비중항을 이용한다.

세 수 $x,\ 3,\ y$가 이 순서대로 등비수열을 이루므로 3은 x와 y의 등비중항이다.

$\therefore 9=xy$ ……㉡

3단계 $(x-y)^2$의 값을 구한다.

$$(x-y)^2=(x+y)^2-4xy$$
$$=(-8)^2-4\cdot 9\ (\because ㉠,\ ㉡)$$
$$=28$$

답 28

20 1단계 일반항을 구한다.

$1+2+3+\cdots+k=\frac{k(k+1)}{2}$이므로

$$\frac{1}{1+2+3+\cdots+k}=\frac{1}{\frac{k(k+1)}{2}}$$
$$=\frac{2}{k(k+1)}$$
$$=2\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$

2단계 주어진 식의 값을 구한다.

$$\sum_{k=1}^{20}\frac{1}{1+2+3+\cdots+k}$$
$$=\sum_{k=1}^{20}2\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$
$$=2\sum_{k=1}^{20}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$
$$=2\left\{\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{20}-\frac{1}{21}\right)\right\}$$
$$=2\left(1-\frac{1}{21}\right)=\frac{40}{21}$$

답 $\frac{40}{21}$

21 1단계 퇴직금의 20년 후의 원리합계를 구한다.

김부장이 매년 말에 받을 금액을 a만 원이라고 하면 2억 2천만 원의 20년 후의 원리합계와 매년 말에 a만 원씩 20년간 받는 금액의 원리합계가 같아야 한다.

2억 2천만 원의 20년 후의 원리합계는

$22000\times1.06^{20}=22000\times3.2$(만 원) ……㉠

2단계 연금으로 받을 때의 원리합계를 구한다.

매년 말에 a만 원씩 20년간 받는 금액의 원리합계는

$$a+a\times1.06+a\times1.06^2+\cdots+a\times1.06^{19}$$
$$=\frac{a(1.06^{20}-1)}{1.06-1}=\frac{a(3.2-1)}{0.06}$$
$$=\frac{2.2}{0.06}a\text{(만 원)}$$ ……㉡

3단계 매년 말에 받는 금액을 구한다.

㉠=㉡이어야 하므로

$$\frac{2.2}{0.06}a=22000\times3.2$$

$$\therefore a=22000\times3.2\times\frac{0.06}{2.2}=1920\text{(만 원)}$$

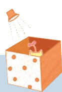
답 1920만 원

IV 확률과 통계

1 확률과 그 활용　　2 통계와 그 활용

복잡하고 방대한 자료를 과학적으로 정리하고 분석하여 미래를 예측할 때, 확률과 통계가 널리 사용된다. 예를 들어 과거의 자료 및 구름 사진 등과 같은 기상 자료를 바탕으로 다가올 날씨를 예측할 수 있다. 또 표본조사를 통해 상품의 불량률을 알아볼 수 있으며 여론 조사를 통해 대중의 의견을 파악하여 합리적으로 의사 결정을 할 수 있다.

단원의 흐름



이미 배운 내용

▶**중학교 1학년**
- 도수분포와 그래프

▶**중학교 2학년**
- 확률과 그 기본 성질

▶**고등학교 1학년**
- 경우의 수

이번에 배울 내용

- 확률의 뜻
- 확률의 기본 성질과 그 활용
- 확률변수와 확률분포의 뜻
- 기댓값과 분산
- 이항분포의 뜻과 활용
- 정규분포의 뜻과 그 성질
- 간단한 통계 조사 결과의 해석

이 단원의 학습 목표

1. 확률의 뜻을 안다.
2. 확률의 기본 성질을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.
3. 확률변수와 확률분포의 뜻을 안다.
4. 기댓값과 분산을 구할 수 있다.
5. 이항분포의 뜻을 이해하고, 실생활 문제 해결에 이를 활용할 수 있다.
6. 정규분포의 뜻과 그 성질을 이해한다.
7. 간단한 통계 조사의 결과를 해석할 수 있다.

단원을 시작하기 전에 …

집합의 연산 **1** 두 집합 $A=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $B=\{2, 4, 6, 8\}$에 대하여 다음을 구하여라.
(1) $A\cup B$ (2) $A\cap B$ (3) $A-B$

여집합의 뜻 **2** 전체집합 $U=\{n \mid n$은 10 이하의 자연수$\}$에 대하여 집합 $A=\{1, 2, 4, 8\}$의 여집합 A^C을 구하여라.

순열과 조합 **3** 다음 값을 구하여라.
(1) ${}_8P_2$ (2) ${}_8C_2$

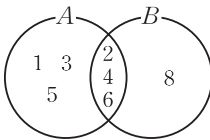
확률의 뜻 **4** 정십이면체로 만들어진 주사위의 각 면에 1부터 12까지의 수가 적혀 있다. 이 주사위를 던져서 윗면에 나오는 수를 조사할 때, 다음을 구하여라.
(1) 홀수가 나올 확률 (2) 3의 배수가 나올 확률

평균, 표준편차 **5** 다음은 어느 학생의 5번의 수학 시험 점수이다. 이 학생의 수학 시험 점수의 평균과 표준편차를 구하여라.

85, 81, 88, 89, 82

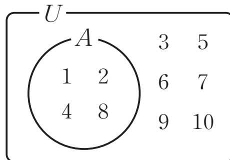
단원을 시작하기 전에 ……………………• 풀이

1 두 집합 A, B를 벤 다이어그램으로 나타내면 다음과 같다.



(1) $A\cup B=\mathbf{\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8\}}$
(2) $A\cap B=\mathbf{\{2, 4, 6\}}$
(3) $A-B=\mathbf{\{1, 3, 5\}}$

2 전체집합 U를 원소나열법으로 나타내면
$U=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$
$A=\{1, 2, 4, 8\}$이므로
두 집합 U, A를 벤 다이어그램으로 나타내면 다음과 같다.



$\therefore A^C=\mathbf{\{3, 5, 6, 7, 9, 10\}}$

3 (1) ${}_8P_2=8\times7=\mathbf{56}$
(2) ${}_8C_2=\dfrac{{}_8P_2}{2!}=\dfrac{8\times7}{2\times1}=\mathbf{28}$

4 정십이면체를 던질 때, 윗면에 나오는 수의 경우는
1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12
의 12가지이다.
(1) 홀수가 나오는 경우는 1, 3, 5, 7, 9, 11의 6가지이므로 구하는 확률은 $\dfrac{6}{12}=\mathbf{\dfrac{1}{2}}$
(2) 3의 배수가 나오는 경우는 3, 6, 9, 12의 4가지이므로 구하는 확률은 $\dfrac{4}{12}=\mathbf{\dfrac{1}{3}}$

5 (평균)$=(85+81+88+89+82)\div5$
$=425\div5=\mathbf{85}$(점)
(분산)$=\{(85-85)^2+(81-85)^2+(88-85)^2+(89-85)^2+(82-85)^2\}\div5$
$=50\div5=10$
(표준편차)$=\sqrt{(\text{분산})}=\mathbf{\sqrt{10}}$

1 확률과 그 활용

이 단원을 배우면

- 확률의 뜻을 알 수 있다.
- 확률의 기본 성질을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.

1 확률의 뜻과 기본 성질

소단원의 학습 목표

1. 수학적 확률의 뜻을 안다.
2. 통계적 확률의 뜻을 안다.
3. 확률의 기본 성질을 이해한다.
4. 확률의 덧셈정리를 이해한다.
5. 임의의 사건의 여사건의 확률을 구하고, 이를 활용할 수 있다.

여기서 배우는 용어 및 기호

수학적 확률, 통계적 확률

1 확률과 그 활용

1 확률의 뜻과 기본 성질

학습 목표
- 확률의 뜻을 안다.
- 확률의 기본 성질을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.

다 가 서 기 / **상금의 배분**

확률론에 대한 연구는 프랑스의 드 메레(de Méré, C.)가 그의 친구이자 수학자인 파스칼(Pascal, B. ; 1623～1662)에게 질문한 다음의 물음에서 시작되었다.

"실력이 같은 두 사람이 내기를 하여 먼저 3번을 이기는 사람이 상금을 다 가져가기로 하였다. 그런데 두 사람이 각각 2번과 1번을 이긴 상태에서 내기가 중단되었다. 상금을 어떻게 나누어야 할까?"

파스칼은 이 문제를 해결하기 위하여 페르마(Fermat, P. ; 1601～1665)와 편지를 주고받았고, 이러한 노력은 확률론의 기초 확립에 이바지하였다.

다가서기 / 해설

확률론은 지중해 연안에 있는 이탈리아에서 시작되어 프랑스에서 정립되었다. 그 이유는 르네상스로 인하여 지중해 연안의 항구 도시에서는 항해와 상업이 번창하였고, 이곳에 모인 사람들은 여가 시간에 주사위 또는 카드 놀이 등을 즐기는 때가 많았기 때문이다.

놀이에 대한 승률의 관심이 커지면서 확률론도 함께 발전하였던 것이다. 또한 이 시대의 계몽적 합리주의 정신은 우연적인 사건에 대해서도 수학적으로 생각하는 풍조를 갖고 있었으므로 이러한 정신도 확률론을 발전시키는 원동력이 되었다.

이탈리아의 수도사인 파촐리(Pacioli, L. ; 1445～1517)는 그의 저서 「산술, 기하학, 비와 비례의 요약집 Summa de Arithmetica, geometrica, proportioni et proportionalita」에서 도박의 문제를 소개하여 확률의 시초로서 평가받고 있다. 그는 이 책에서 실력이 같은 두 경기자의 승부가 중단되었을 경우 상금을 어떻게 분배하는가에 대한 문제를 다루었다. 1654년 프랑스의 도박사인 드 메레가 파스칼에게 질문한 다가서기의 물음을 파스칼은 다음과 같이 해결하였다.

두 사람 A, B에게 앞으로 일어날 수 있는 모든 경우는

- A가 이기는 경우
- B가 계속해서 2번 이기는 경우
- B가 이긴 다음에 A가 이기는 경우

의 3가지뿐이다. 따라서 A와 B가 각각 32프랑씩 돈을 내어 먼저 3번 이기는 사람이 64프랑을 모두 갖기로 하였다면

$$(\text{A의 기대금액})=64\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\right)=48(\text{프랑})$$

$$(\text{B의 기대금액})=64\left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\right)=16(\text{프랑})$$

이므로 A, B가 각각 48프랑, 16프랑씩 분배하는 것이 좋다.

103

01 시행의 뜻

탐구하기 / 같은 조건에서 반복 가능한 실험이나 관찰

다음은 우리 생활 주변에서 찾을 수 있는 여러 가지 실험 또는 관찰이다. 조건을 같게 하여 몇 번이고 반복할 수 있는 실험 또는 관찰을 찾아보자.

(1) 개구리를 해부하여 심장의 박동을 조사한다.
(2) 윷을 던져서 도, 개, 걸, 윷, 모가 나오는 횟수를 조사한다.
(3) 어떤 회사에서 생산된 형광등의 수명 시간을 조사한다.
(4) 여러 곳의 밭에 품종별로 옥수수를 심고, 그 수확량을 조사한다.

알아보기 / 시행의 뜻을 알아보자.

주사위 또는 동전을 던지거나 제비를 뽑는 경우와 같이 같은 조건에서 몇 번이고 반복할 수 있으며 그 결과가 우연에 의해서 정해지는 실험이나 관찰을 시행이라고 한다.

어떤 시행에서 일어날 수 있는 모든 결과의 집합을 표본공간이라 하고, 표본공간의 부분집합을 사건이라고 한다. 또 표본공간 S의 부분집합 중에서 한 개의 원소로 이루어진 사건을 근원사건이라고 한다.

한 개의 주사위를 던져서 윗면에 나오는 눈의 수를 관찰하는 것은 시행이다. 특별한 언급이 없는 한, '주사위를 던져서 윗면에 나오는 눈의 수를 관찰하는 시행'을 간단히 '주사위를 던지는 시행'으로 쓴다.

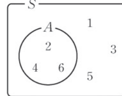
| 보기 | 한 개의 주사위를 던지는 시행에서 표본공간 S는

$S=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

이 시행의 근원사건은

$\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{6\}$

한편 짝수의 눈이 나오는 사건을 A라고 하면 $A=\{2, 4, 6\}$



스스로 하기 / 익힘책 93쪽 | 익힘책 94쪽 | 익힘책 95쪽

1 한 개의 동전을 두 번 던지는 시행에서 표본공간 S를 구하여라. 또 서로 다른 면이 나오는 사건 A를 구하여라.
(단, 동전의 앞면을 H, 뒷면을 T로 나타낸다.)

탐구하기 / 풀이

(1) 개구리마다 생체 조건이 다르므로 이 실험에서는 조건을 같게 할 수 없다.

(2) 윷을 던져서 도, 개, 걸, 윷, 모가 나오는 횟수를 조사하는 것은 자연 현상이나 사회 현상의 영향을 받는 것이 아니므로 조건을 같게 하여 반복할 수 있다.

(3) 한 회사에서 생산된 형광등의 수명 시간을 조사할 때, 전압, 온도 등의 조건을 같게 하여 반복할 수 있다.

(4) 밭에 옥수수를 심을 때, 올해의 강우량, 일조량 등과 작년 또는 내년의 그것 등이 같다고 할 수 없으므로 이 실험에서는 조건을 같게 할 수 없다.

따라서 조건을 같게 하여 몇 번이고 반복할 수 있는 실험 또는 관찰은 (2), (3)이다.

알아보기 / 해설

• 주사위를 던지거나 동전을 던지는 경우에 각각의 시행에서 어떤 결과가 나올지 정확하게 알 수는 없다. 그러나 나올 수 있는 모든 결과의 집합은 알 수 있다. 이러한 집합을 표본공간(sample space)이라 하고, 표본공간의 부분집합을 사건(event)이라고 한다. 또 사건에 있는 원소의 개수를 경우의 수라고 한다.

• 한 개의 주사위를 던져서 윗면에 나오는 눈의 수의 전체의 집합을 S라고 하면
$S=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
이고, 사건은 S의 부분집합이다. 예를 들어 $A=\{2, 4, 6\}$은 '짝수의 눈이 나온다.' 라는 사건이고, $B=\{1, 2, 3, 6\}$은 '6의 약수의 눈이 나온다.' 라는 사건이다. 또 $\{1\}, \{2\}, \cdots, \{6\}$과 같이 원소 하나로 된 사건을 근원사건(fundamental event)이라고 한다.

한편 공집합 $\varnothing$도 사건으로 보고 이것을 공사건(null event)이라고 한다.

스스로 하기 / 풀이

1 한 개의 동전을 두 번 던지는 시행에서 표본공간 S는
$S=\{\text{HH, HT, TH, TT}\}$
한편 서로 다른 면이 나오는 사건 A는
$A=\{\text{HT, TH}\}$

02 수학적 확률

탐구하기 / 주사위 던지기

한 개의 주사위를 던지는 시행에서 다음 물음에 답하여 보자.

1. 나오는 눈의 수를 모두 구하여라.
2. 나오는 눈의 수가 짝수인 경우를 구하여라.
3. 나오는 눈의 수가 짝수일 확률을 구하여라.

알아보기 / 수학적 확률의 의미를 알아보자.

한 개의 주사위를 던지는 시행에서 어떤 눈이 나올지 정확하게 예측할 수는 없다. 그러나 나오는 눈의 수는 1, 2, 3, 4, 5, 6 중에서 어느 하나이므로 각 눈이 나올 가능성은 모두 $\frac{1}{6}$이라고 할 수 있다.

이와 같이 어떤 시행에서 사건 A가 일어날 가능성을 수로 나타낸 것을 사건 A의 확률이라 하고, 이것을 기호로

$$\mathrm{P}(A)$$

와 같이 나타낸다.

P(A)의 P는 확률을 뜻하는 Probability의 첫 글자이다.

일반적으로 어떤 시행의 표본공간 S가 n개의 근원사건으로 이루어져 있고, 각 근원사건이 일어날 가능성이 모두 같은 정도로 기대될 때, 사건 A가 r개의 근원사건으로 이루어져 있으면 사건 A가 일어날 확률 P(A)를

$$\mathrm{P}(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{r}{n}$$

와 같이 정의하고, 이것을 **수학적 확률**이라고 한다.

$n(A)$는 사건 A의 근원사건의 개수이다.

특별한 언급이 없는 한, 동전의 앞면을 H, 뒷면을 T로 나타낸다.

| 보기 | 한 개의 동전을 두 번 던지는 시행에서 앞면을 H, 뒷면을 T라고 하면 표본공간 S는

$S=\{(\mathrm{H}, \mathrm{H}), (\mathrm{H}, \mathrm{T}), (\mathrm{T}, \mathrm{H}), (\mathrm{T}, \mathrm{T})\}$

이때, 두 번 모두 앞면이 나오는 사건을 A라고 하면

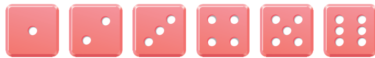
$A=\{(\mathrm{H}, \mathrm{H})\}$

이므로 사건 A의 수학적 확률은

$\mathrm{P}(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{1}{4}$

탐구하기 / 풀이

한 개의 주사위를 던져서 윗면에 나오는 수를 관찰하면 다음과 같다.



1. 나오는 눈의 수는

   1, 2, 3, 4, 5, 6

2. 나오는 눈의 수가 짝수인 경우는

   2, 4, 6

3. 모든 경우의 수는 6이고, 눈의 수가 짝수인 경우의 수는 3이므로 구하는 확률은

   $\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$

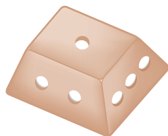
알아보기 / 해설

- 어떤 시행에서 표본공간 S에서 사건 A가 일어날 수학적 확률은

$$\mathrm{P}(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{(\text{사건 } A\text{의 원소의 개수})}{(\text{표본공간 } S\text{의 원소의 개수})}=\frac{(\text{사건 } A\text{가 일어날 경우의 수})}{(\text{일어날 수 있는 모든 경우의 수})}$$

- 각 근원사건이 일어날 가능성이 모두 같은 정도로 기대될 때 수학적 확률을 이용할 수 있다.

  그런데 오른쪽 그림과 같이 정다면체 모양이 아닌 주사위에서는 1의 눈, 2의 눈, ⋯, 6의 눈이 나올 가능성이 같다고 볼 수 없다.



  따라서 수학적 확률을 이용할 수 없다.

- |보기|에서 표본공간 S를

  $S=\{\mathrm{HH}, \mathrm{HT}, \mathrm{TH}, \mathrm{TT}\}$

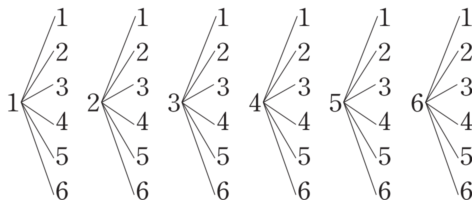
  로 나타내어도 된다.

이때, 서로 다른 면이 나오는 사건을 B라고 하면 $B=\{\mathrm{HT}, \mathrm{TH}\}$이므로 사건 B의 수학적 확률은

$\mathrm{P}(B)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$

함께하기 / 해설

1 표본공간 S를 좌표평면 위에 격자점으로 나타낼 수도 있고, 다음과 같이 그림(수형도)으로 나타낼 수도 있다.



105

함께 하기 / 익힘책 93쪽 | 익힘책 94쪽 | 익힘책 95쪽

1 한 개의 주사위를 두 번 던질 때, 나오는 눈의 수의 합이 9가 될 확률을 구하여라.

한 개의 주사위를 두 번 던질 때, 일어날 수 있는 모든 경우의 수는 $6\times6=36$(가지)

풀이

한 개의 주사위를 두 번 던지는 시행에서 표본공간 S는

$S=\{(1,\ 1),\ (1,\ 2),\ \cdots,\ (6,\ 5),\ (6,\ 6)\}$

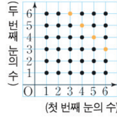
이므로 $n(S)=36$

또 나오는 눈의 합이 9인 사건을 A라고 하면

$A=\{(3,\ 6),\ (4,\ 5),\ (5,\ 4),\ (6,\ 3)\}$

이므로 $n(A)=4$

따라서 구하는 확률은 $\quad \mathrm{P}(A)=\dfrac{n(A)}{n(S)}=\dfrac{4}{36}=\dfrac{1}{9}$



2 남학생 2명과 여학생 3명이 한 줄로 설 때, 남학생 2명이 이웃하게 될 확률을 구하여라.

풀이

전체 학생 5명이 한 줄로 서는 경우의 수는 $5!$가지

남학생 2명을 하나로 묶어서 1명으로 생각하면, 4명이 한 줄로 서는 경우의 수는 $4!$가지, 이 줄 각각에 대하여 남학생 2명이 자리를 바꾸는 경우의 수는 $2!$가지이므로 남학생 2명이 이웃하게 되는 경우의 수는 $4!\times2!$가지

따라서 구하는 확률은 $\quad \dfrac{4!\times2!}{5!}=\dfrac{2}{5}$

스스로 하기 / 익힘책 93쪽 | 익힘책 94쪽 | 익힘책 95쪽

1 한 개의 주사위를 두 번 던질 때, 다음을 구하여라.

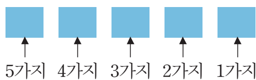
(1) 나오는 눈의 수의 합이 3의 배수일 확률

(2) 나오는 눈의 수의 차가 2일 확률

2 파란색 볼펜 세 자루, 검은색 볼펜 네 자루, 빨간색 볼펜 세 자루 중 임의로 볼펜 세 자루를 뽑을 때, 빨간색 볼펜이 한 자루 뽑힐 확률을 구하여라.

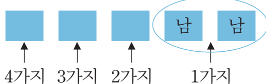
---

2 남학생 2명과 여학생 3명이 한 줄로 서는 전체 경우의 수는



$\therefore 5\times4\times3\times2\times1=5!$(가지)

남학생 2명을 하나로 묶어 4명이 한 줄로 서는 경우의 수는



$\therefore 4\times3\times2\times1=4!$(가지)

그런데 ◯ 안의 남학생 2명이 자리를 바꾸는 경우가 $2!$가지 있으므로 남학생 2명이 이웃하는 경우의 수는

$4!\times2!$(가지)

스스로 하기 / 풀이

1 한 개의 주사위를 두 번 던질 때, 나오는 모든 경우의 수는

$6\times6=36$(가지)

(1) (i) 3이 되는 경우의 수는

$(1,\ 2),\ (2,\ 1)$의 2가지

(ii) 6이 되는 경우의 수는

$(1,\ 5),\ (2,\ 4),\ (3,\ 3),$

$(4,\ 2),\ (5,\ 1)$의 5가지

(iii) 9가 되는 경우의 수는

$(3,\ 6),\ (4,\ 5),\ (5,\ 4),$

$(6,\ 3)$의 4가지

(iv) 12가 되는 경우의 수는

$(6,\ 6)$의 1가지

이상에서 나오는 눈의 수의 합이 3의 배수인 경우의 수는

$2+5+4+1=12$(가지)

따라서 구하는 확률은 $\dfrac{12}{36}=\mathbf{\dfrac{1}{3}}$

(2) 나오는 눈의 수의 차가 2인 경우는

$(1,\ 3),\ (2,\ 4),\ (3,\ 5),\ (4,\ 6),$

$(3,\ 1),\ (4,\ 2),\ (5,\ 3),\ (6,\ 4)$

의 8가지이므로 구하는 확률은 $\dfrac{8}{36}=\mathbf{\dfrac{2}{9}}$

2 볼펜은 전체 열 자루이고, 이 중에서 세 자루를 뽑는 경우의 수는

$${}_{10}\mathrm{C}_3=\frac{10\times9\times8}{3\times2\times1}=120(\text{가지})$$

빨간색 볼펜이 한 자루 뽑히는 경우는 빨간색 볼펜 세 자루 중 한 자루를 뽑고 나머지 일곱 자루 중 두 자루를 뽑는 것이므로

$${}_3\mathrm{C}_1\times{}_7\mathrm{C}_2=3\times\frac{7\times6}{2\times1}=63(\text{가지})$$

따라서 구하는 확률은 $\dfrac{63}{120}=\mathbf{\dfrac{21}{40}}$

106

03 통계적 확률

탐 구 하 기 / 동전 던지기에서 앞면이 나오는 사건의 상대도수

한 개의 동전을 다음 표에 나타난 횟수만큼 던져 보고, 앞면이 나온 횟수와 그 상대도수 및 상대도수와 $\frac{1}{2}$의 차를 구하여 표를 완성하여 보자.

던진 횟수(n)	10	20	30	40	50	60	80	100
앞면이 나온 횟수(r)								
상대도수$\left(\frac{r}{n}\right)$								
상대도수와 $\frac{1}{2}$의 차								

알 아 보 기 / 통계적 확률의 의미를 알아보자.

수학적 확률은 각 근원사건이 일어날 가능성이 모두 같은 정도로 기대된다는 가정 하에 정의하였지만, 자연현상이나 사회현상 중에는 각 근원사건이 같은 정도로 일어나지 않는 경우가 흔히 있다.

이와 같은 경우는 시행을 여러 번 반복함으로써 어떤 사건이 일어나는 전체적인 경향을 알아볼 수 있다.

일반적으로 어떤 시행을 n번 반복할 때 사건 A가 r_n번 일어난다고 하자. 이때, n을 한없이 크게 함에 따라 상대도수 $\frac{r_n}{n}$이 일정한 값 p에 가까워지면 p를 사건 A가 일어날 **통계적 확률**이라고 한다.

통계적 확률을 경험적 확률이라고도 한다.

그러나 실제로는 시행 횟수 n을 한없이 크게 할 수가 없으므로 시행 횟수 n이 충분히 클 때의 상대도수를 보통 그 사건의 통계적 확률로 본다.

한편 어떤 사건 A가 일어날 수학적 확률이 p일 때, 시행 횟수를 충분히 크게 하면 사건 A가 일어나는 상대도수는 수학적 확률 p에 가까워짐이 알려져 있다.

| 보기 | 어떤 윷을 1000번 던져서 모가 27번 나왔다면, 이 윷을 한 번 던질 때 모가 나올 통계적 확률은 $\frac{27}{1000}$로 본다.

탐구하기 / 풀이

한 개의 동전을 여러 번 반복하여 던지는 활동을 통해 상대도수를 구하고 이를 이용하여 통계적 확률의 의미를 이해하려는 것이다.

다음 표는 한 예로써 학생들이 실제로 구한 것과는 차이가 날 것이다. 그러나 던진 횟수가 점점 커질 수록 그 차이는 줄어들 것이다.

던진 횟수(n)	10	20	30	40	50	60	80	100
앞면이 나온 횟수(r)	6	11	15	21	24	30	44	54
상대도수$\left(\frac{r}{n}\right)$	0.6	0.55	0.5	0.525	0.48	0.5	0.55	0.54
상대도수와 $\frac{1}{2}$의 차	0.1	0.05	0	0.025	0.02	0	0.05	0.04

한편 이 실험은 10개의 동전을 한 번에 던져서 앞면이 나온 횟수를 세도 된다.

또한 A와 B가 각각 한 개의 동전을 100번 던진 결과를 합하여 200번 던진 결과로 하여도 된다.

알아보기 / 해설

- 다음 표는 한 개의 동전을 여러 번 반복하여 던져서 얻은 결과이다.

던진 횟수(n)	400	500	600	700	800	900	1000
앞면이 나온 횟수(r)	204	248	298	352	392	451	498
상대도수$\left(\frac{r}{n}\right)$	0.51	0.496	0.497	0.503	0.49	0.501	0.498
상대도수와 $\frac{1}{2}$의 차	0.01	0.004	0.003	0.003	0.01	0.001	0.002

앞의 표에서 시행 횟수 n이 점점 커지면 상대도수와 $\frac{1}{2}$의 차는 점점 0에 가까워짐을 알 수 있다.

즉, 시행 횟수 n이 커짐에 따라 상대도수(통계적 확률)가 수학적 확률 $\frac{1}{2}$에 가까워짐을 알 수 있다.

- 실제 생활에서 확률은 수학적 확률로 구할 수 없는 경우가 많다.

예를 들어 생산된 제품이 불량품일 확률, 버스가 연착할 확률, 내일 눈이 올 확률 등은 각 근원사건이 일어날 가능성이 같다고 볼 수 없으므로 수학적 확률을 구할 수 없는데 이런 경우에는 통계적 확률로 그 확률을 구해야 한다.

함께하기 /

익힘책 93쪽 | 익힘책 94쪽 | 익힘책 95쪽

생명표
한 나라의 국민을 대상으로 사망 상황을 관찰하여 연령별, 인구별, 남녀별, 직업별 따위로 분류하여 생존율, 사망률 등을 나타낸 통계표이다.

1 오른쪽 표는 2006년에 우리나라에서 출생한 남녀 각 10만 명당 나이에 따른 생존자 수를 조사하여 나타낸 것이다. 다음을 구하여라.
(단, 소수 셋째 자리에서 반올림한다.)
(1) 40세의 남자가 앞으로 40년간 생존할 확률
(2) 60세의 여자가 앞으로 20년간 생존할 확률

| 표1 |

나이 \ 성별	남자(명)	여자(명)
0	100000	100000
20	99029	99247
40	97352	98348
60	87632	94748
80	45216	68921

풀이
(1) 40세의 남자 97352명이 80세에는 45216명이 되므로 구하는 확률은

$$\frac{45216}{97352}=0.464\cdots\fallingdotseq\mathbf{0.46}$$

(2) 60세의 여자 94748명이 80세에는 68921명이 되므로 구하는 확률은

$$\frac{68921}{94748}=0.727\cdots\fallingdotseq\mathbf{0.73}$$

스스로 하기 /

익힘책 93쪽 | 익힘책 94쪽 | 익힘책 95쪽

1 함께하기 **1**의 | 표1 | 에서 다음을 구하여라.
(단, 소수 셋째 자리에서 반올림한다.)
(1) 20세의 남자가 앞으로 40년간 생존할 확률
(2) 20세의 여자가 앞으로 60년간 생존할 확률

2 2007년 우리나라의 신생아의 수는 496710명이었고, 이 중 쌍둥이의 수는 13537명이었다. 신생아가 쌍둥이로 태어날 확률을 구하여라.
(단, 소수 셋째 자리에서 반올림한다.)

생명표, 출산 현황 등의 자료 찾아보기
생명표, 출산 현황 등은 통계청 홈페이지나 국가 통계 포털(KOSIS) 홈페이지에서 알아볼 수 있다.
• http://www.nso.go.kr • http://www.kosis.kr

함께하기 / 해설

1 생명표는 현재의 사망 수준이 그대로 유지된다는 가정하에 어떤 출생 집단이 연령별로 몇 세까지 살 수 있는가를 정리한 표이다.

생명표는 보건, 의료 정책 수립, 보험료율, 인명 피해 보상비 산정 등에 활용되고 있으며 장래의 인구 추계 작성, 국가 간 경제 · 사회 · 보건 수준 비교에 널리 이용되고 있다.

함께하기에 주어진 생명표는 2006년 우리나라의 생명표이다.
다음의 표는 2009년 12월 9일에 발표한 2008년 생명표의 일부이다. 이 표에서 보는 바와 같이 우리나라의 평균 수명은 매년 증가하고 있다.

나이 \ 성별	남자(명)	여자(명)
0	100000	100000
10	99418	99488
20	99156	99333
30	98505	98907
40	97447	98293
50	94627	97155
60	88429	94891
70	75675	89440
80	48442	71889
90	13252	30817
100^{+}	704	2810

스스로 하기 / 풀이

1 (1) 20세의 남자 99029명이 앞으로 40년 후인 60세에는 87632명이 되므로 구하는 확률은

$$\frac{87632}{99029}=0.884\cdots$$
$$\fallingdotseq\mathbf{0.88}$$

(2) 20세의 여자 99247명이 앞으로 60년 후인 80세에는 68921명이 되므로 구하는 확률은

$$\frac{68921}{99247}=0.694\cdots$$
$$\fallingdotseq\mathbf{0.69}$$

2 전체 496710명 중 쌍둥이가 13537명이므로 구하는 확률은

$$\frac{13537}{496710}=0.027\cdots$$
$$\fallingdotseq\mathbf{0.03}$$

탐구하기 / 풀이

1. 음료수는 700원, 1000원, 1500원짜리만 있으므로 500원을 넣고 임의로 버튼을 한 번 누르면 나오는 음료수가 없다.

   따라서 구하는 확률은 $\frac{0}{3}=\mathbf{0}$

2. 1000원을 넣고 임의로 버튼을 한 번 누르면 700원 또는 1000원짜리 음료수가 나올 수 있다.

   따라서 구하는 확률은 $\mathbf{\frac{2}{3}}$

3. 2000원을 넣고 임의로 버튼을 한 번 누르면 700원 또는 1000원 또는 1500원짜리 음료수가 나올 수 있다.

   따라서 구하는 확률은 $\frac{3}{3}=\mathbf{1}$

108

04 확률의 기본 성질

탐 구 하 기 / 자판기에서 음료수 뽑기

자판기에 700원, 1000원, 1500원짜리 음료수가 들어 있다. 각 음료수를 택하는 버튼의 수가 같을 때, 다음을 구하여 보자.

1. 500원을 넣고 임의로 버튼을 한 번 누를 때, 음료수가 나올 확률
2. 1000원을 넣고 임의로 버튼을 한 번 누를 때, 음료수가 나올 확률
3. 2000원을 넣고 임의로 버튼을 한 번 누를 때, 음료수가 나올 확률

알 아 보 기 / 확률의 기본 성질을 알아보자.

어떤 시행에서 임의의 사건 A는 표본공간 S의 부분집합이므로

$$0\le n(A)\le n(S)$$

따라서 $0\le \frac{n(A)}{n(S)}\le 1$이므로 확률의 정의에 의하여 $0\le \mathrm{P}(A)\le 1$

반드시 일어나는 사건을 전사건이라 하고, 절대로 일어나지 않는 사건을 공사건이라고 한다.

특히 반드시 일어나는 사건 S에 대하여 $\mathrm{P}(S)=\frac{n(S)}{n(S)}=1$

또 절대로 일어나지 않는 사건 $\varnothing$에 대하여 $\mathrm{P}(\varnothing)=\frac{n(\varnothing)}{n(S)}=0$

이상을 정리하면 다음과 같다.

확률의 기본 성질

(1) 임의의 사건 A에 대하여 $0\le \mathrm{P}(A)\le 1$
(2) 반드시 일어나는 사건 S에 대하여 $\mathrm{P}(S)=1$
(3) 절대로 일어나지 않는 사건 $\varnothing$에 대하여 $\mathrm{P}(\varnothing)=0$

스 스 로 하 기 / 익힘책 93쪽 | 익힘책 94쪽 | 익힘책 95쪽

1 어른 2명과 어린이 3명이 앉아 있는 의자에서 동시에 3명을 일어나게 할 때, 다음을 구하여라.
(1) 어린이가 3명 이하로 일어날 확률 (2) 어른이 3명 일어날 확률

알아보기 / 해설

임의의 사건 A가 일어날 확률의 뜻을 이해하면 확률의 기본 성질을 쉽게 이해할 수 있다. 즉,

$$\mathrm{P}(A)=\frac{(\text{사건 }A\text{가 일어날 경우의 수})}{(\text{일어날 수 있는 모든 경우의 수})}=\frac{n(A)}{n(S)}$$

이고, 이때 사건 A가 일어날 경우의 수는 0 이상이고 일어날 수 있는 모든 경우의 수보다 작거나 같기 때문에 $0\le\mathrm{P}(A)\le 1$이다.

특히, $A=S$이면 $\mathrm{P}(S)=\frac{n(S)}{n(S)}=1$이다.

이때, 전사건의 확률이 1이라는 것은 전사건의 모든 사건이 한꺼번에 일어난다는 것이 아니라 어떤 시행을 하면 전사건 중의 한 사건이 반드시 일어난다는 뜻이다.

한편 절대로 일어나지 않는 공사건 $\varnothing$의 원소의 개수는 0이므로

$$\mathrm{P}(\varnothing)=\frac{n(\varnothing)}{n(S)}=\frac{0}{n(S)}=0$$

스스로 하기 / 풀이

1 전체 5명 중에서 3명을 일어나게 하는 경우의 수는 ${}_5\mathrm{C}_3=10$(가지)

(1) 어른이 2명뿐이므로 어린이는 반드시 포함된다. 따라서 어린이가 3명 이하로 일어나는 경우는 반드시 일어나는 사건이므로 구하는 확률은 **1**이다.

(2) 어른이 2명뿐이므로 어른이 3명 일어나는 경우는 절대로 일어나지 않는 사건이다. 따라서 구하는 확률은 **0**이다.

수학 실험실

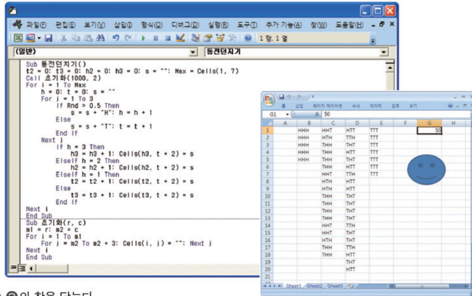
동전 던지기 모의실험

컴퓨터 소프트웨어를 이용하여 동전 3개를 동시에 50번 던지는 시행을 모의실험하여 보자.

❶ 메뉴 표시줄에서 [삽입] - [도형]을 클릭하고, 도형 하나(☺)를 클릭한 후 마우스 끌기를 하여 도형을 만든다.

❷ ❶에서 만든 도형 위에 커서를 놓고, 마우스의 오른쪽 버튼을 눌러 [매크로 지정]을 선택하여 클릭한다.

❸ 매크로 이름란에 '동전던지기'를 입력하고, [새로 만들기]를 클릭하면 새로운 창이 뜬다. 여기에 다음 그림과 같이 입력한다.



❹ ❸의 창을 닫는다.

❺ 셀 G1에 '50'을 입력한 후 ❶에서 만든 도형을 누르면 모의실험 결과가 나온다.
이때, H는 동전의 앞면을, T는 동전의 뒷면을 나타낸다.

논술/수행평가 과제

1. 위의 실험에서 앞면이 2개, 뒷면이 1개 나올 통계적 확률을 구하고, 수학적 확률과 통계적 확률의 차를 구하여 보자.
2. 위의 프로그램을 이용하여 동전 3개를 100번, 200번, 500번 던지는 시행을 모의실험하여 HHH, HTH, HTT, TTT의 4가지 사건이 일어날 통계적 확률을 각각 구하고, 수학적 확률과의 차를 구하여 보자.

수학 실험실 / 해설

통계적 확률을 구할 때에 실제로는 시행 횟수 n을 한없이 크게 할 수 없으므로 n이 충분히 클 때의 상대도수로 통계적 확률을 생각한다. '동전 던지기 모의실험'을 통하여 시행 횟수 n을 충분히 크게 하면서 통계적 확률을 구하고, 그것을 수학적 확률과 비교할 수 있다.

논술 / 수행평가 과제 / 해설

1. 위의 실험에서 시행 횟수 $n=50$이고, 앞면이 2개, 뒷면이 1개 나오는 경우는 18번이다. 따라서 구하는 통계적 확률은 $\frac{18}{50}=0.36$이다.

한편 동전 3개를 동시에 던졌을 때, 표본공간 S는

$S=\{\text{HHH, HHT, HTH, THH, HTT, THT, TTH, TTT}\}$

이때, 앞면이 2개, 뒷면이 1개 나오는 사건은 $\{\text{HHT, HTH, THH}\}$이므로 구하는 수학적 확률은

$\frac{3}{8}=0.375$이다.

따라서 수학적 확률과 통계적 확률의 차는 $0.375-0.36=0.015$이다.

2. 동전 3개를 동시에 던졌을 때,

앞면이 3개 나오는 사건의 수학적 확률은

$\frac{1}{8}=0.125$

앞면이 1개, 뒷면이 2개 나오는 사건의 수학적 확률은 $\frac{3}{8}=0.375$

뒷면이 3개 나오는 사건의 수학적 확률은

$\frac{1}{8}=0.125$

다음 예에서 n이 커질수록 통계적 확률과 수학적 확률의 차가 줄어든다는 것을 알 수 있다.

던진 횟수(n)		100	200	500
HHH	나온 횟수	10	20	51
	통계적 확률	0.1	0.1	0.102
수학적 확률과의 차		0.025	0.025	0.023
HTH	나온 횟수	33	75	186
	통계적 확률	0.33	0.375	0.372
수학적 확률과의 차		0.045	0	0.003
HTT	나온 횟수	41	77	200
	통계적 확률	0.41	0.385	0.4
수학적 확률과의 차		0.035	0.010	0.025
TTT	나온 횟수	16	28	63
	통계적 확률	0.16	0.14	0.126
수학적 확률과의 차		0.035	0.015	0.001

05 확률의 활용

알아보기 / 확률의 덧셈정리에 대하여 알아보자.

각 근원사건이 일어날 가능성이 모두 같은 정도로 기대되는 표본공간 S의 임의의 두 사건 A, B에 대하여

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$$

가 성립하므로 사건 $A\cup B$가 일어날 확률은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}P(A\cup B)&=\frac{n(A\cup B)}{n(S)}\\&=\frac{n(A)}{n(S)}+\frac{n(B)}{n(S)}-\frac{n(A\cap B)}{n(S)}\\&=P(A)+P(B)-P(A\cap B)\end{aligned}$$

특히 두 사건 A, B가 $A\cap B=\varnothing$이면 $P(A\cap B)=0$이므로

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$$

이상을 정리하면 다음과 같다.

확률의 덧셈정리

(1) 두 사건 A, B에 대하여

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

(2) 두 사건 A, B가 $A\cap B=\varnothing$이면

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$$

두 사건 A, B가 서로 확률적으로 영향을 미치지 않으면 $P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$

스스로 하기 / 익힘책 93쪽 | 익힘책 94쪽 | 익힘책 95쪽

1 어느 마을에서 포도를 재배하는 가구는 전체의 $\frac{3}{5}$, 배를 재배하는 가구는 전체의 $\frac{1}{2}$이고, 포도와 배를 모두 재배하는 가구는 전체의 $\frac{1}{5}$이다. 이 마을에서 한 가구를 임의로 뽑을 때, 그 가구가 포도 또는 배를 재배할 확률을 구하여라.

2 붉은 공 4개와 검은 공 6개가 들어 있는 상자에서 3개의 공을 동시에 꺼낼 때, 3개가 모두 같은 색일 확률을 구하여라.

알아보기 / 해설

표본공간, 사건 등을 집합과 연결지어 생각하면 확률을 계산하는 데 편리하다.

표본공간 또는 전체 사건	⟷	전체집합
사건	⟷	부분집합
합사건	⟷	합집합
곱사건	⟷	곱집합
여사건	⟷	여집합

스스로 하기 / 풀이

1 포도를 재배하는 가구가 뽑힐 사건을 A, 배를 재배하는 가구가 뽑힐 사건을 B라고 하면

$P(A)=\frac{3}{5}$, $P(B)=\frac{1}{2}$

이때, 포도와 배를 모두 재배하는 가구는 $A\cap B$이므로

$P(A\cap B)=\frac{1}{5}$

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned}P(A\cup B)&=P(A)+P(B)-P(A\cap B)\\&=\frac{3}{5}+\frac{1}{2}-\frac{1}{5}=\mathbf{\frac{9}{10}}\end{aligned}$$

2 10개의 공 중에서 3개의 공을 꺼낼 때, 3개가 모두 같은 색의 공이 나오려면 3개 모두 붉은 공이 나오거나 3개 모두 검은 공이 나와야 한다.

이때, 3개 모두 붉은 공이 나오는 사건을 A, 3개 모두 검은 공이 나오는 사건을 B라고 하자.

10개의 공 중에서 3개의 공을 꺼내는 모든 경우의 수는 ${}_{10}C_3=\frac{10\times9\times8}{3\times2\times1}=120$(가지)

(i) 3개 모두 붉은 공이 나오는 경우의 수는

${}_4C_3=4$(가지)

$\therefore P(B)=\frac{4}{120}=\frac{1}{30}$

(ii) 3개 모두 검은 공이 나오는 경우의 수는

${}_6C_3=20$(가지)

$\therefore P(B)=\frac{20}{120}=\frac{1}{6}$

그런데 두 사건 A, B는 동시에 일어날 수 없으므로 $A\cap B=\varnothing$이다.

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned}P(A\cup B)&=P(A)+P(B)\\&=\frac{1}{30}+\frac{1}{6}\\&=\frac{6}{30}=\mathbf{\frac{1}{5}}\end{aligned}$$

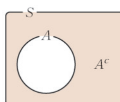
111

알아보기 / 사건 A에 대하여 A^C이 일어날 확률에 대하여 알아보자.

사건 A에 대하여 A가 일어나지 않는 사건을 A의 여사건이라 하고, 기호로 A^C과 같이 나타낸다.

이제 사건 A^C의 확률을 구하여 보자.

$A \cup A^C = S$, $A \cap A^C = \varnothing$이므로 다음이 성립한다.



$\mathrm{P}(S) = \mathrm{P}(A \cup A^C) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(A^C) = 1$

$\therefore \mathrm{P}(A^C) = 1 - \mathrm{P}(A)$

이상을 정리하면 다음과 같다.

> 임의의 사건 A에 대하여
> $\mathrm{P}(A^C) = 1 - \mathrm{P}(A)$, $\mathrm{P}(A) = 1 - \mathrm{P}(A^C)$

함께하기 / 익힘책 93쪽 | 익힘책 94쪽 | 익힘책 95쪽

1 4명의 남자와 3명의 여자 중 2명의 대표를 뽑을 때, 적어도 1명은 여자일 확률을 구하여라.

풀이

적어도 1명이 여자일 사건을 A라고 하면 A^C은 여자가 1명도 없는 사건, 즉 대표 2명이 모두 남자일 사건이므로

$$\mathrm{P}(A^C) = \frac{{}_4\mathrm{C}_2}{{}_7\mathrm{C}_2} = \frac{2}{7}$$

따라서 2명의 대표를 뽑을 때, 적어도 1명은 여자일 확률은

$$\mathrm{P}(A) = 1 - \mathrm{P}(A^C) = 1 - \frac{2}{7} = \frac{5}{7}$$

스스로 하기 / 익힘책 93쪽 | 익힘책 94쪽 | 익힘책 95쪽

3 흰색 초콜릿 3개와 밤색 초콜릿 7개가 들어 있는 상자에서 3개의 초콜릿을 동시에 꺼낼 때, 적어도 1개가 흰색 초콜릿일 확률을 구하여라.

알아보기 / 해설

여사건에 대한 확률을 다음과 같이 유도할 수도 있다.

표본공간 S와 사건 A에 대하여

$A^C = S - A$

$n(A^C) = n(S) - n(A)$

$\dfrac{n(A^C)}{n(S)} = \dfrac{n(S)}{n(S)} - \dfrac{n(A)}{n(S)}$

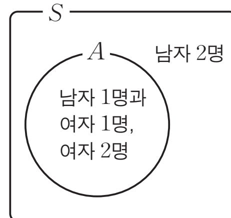
$\therefore \mathrm{P}(A^C) = 1 - \mathrm{P}(A)$

참고 | A^C

여사건을 영어로 complementary event라고 한다. 그래서 complementary의 첫 글자 c를 어깨에 써서 여사건을 나타낸다.

함께하기 / 해설

1 4명의 남자와 3명의 여자 중에서 대표 2명을 뽑을 때, 모든 경우는 다음 그림과 같다.



$\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(\text{남자 1명과 여자 1명})$
$\quad + \mathrm{P}(\text{여자 2명})$

$$= \frac{{}_4\mathrm{C}_1 \times {}_3\mathrm{C}_1}{{}_7\mathrm{C}_2} + \frac{{}_4\mathrm{C}_0 \times {}_3\mathrm{C}_2}{{}_7\mathrm{C}_2}$$

$$= \frac{12}{21} + \frac{3}{21} = \frac{15}{21} = \frac{5}{7}$$

이와 같이 남자 1명과 여자 1명일 사건, 여자 2명일 사건을 각각 구하여 확률의 덧셈정리를 이용할 수도 있지만 풀이와 같이 여사건의 확률을 이용하는 것이 더 간단하게 구할 수 있다.

스스로 하기 / 풀이

3 적어도 1개가 흰색 초콜릿일 사건을 A라고 하면 A^C은 흰색 초콜릿이 한 개도 없는 사건, 즉 초콜릿 3개가 모두 밤색 초콜릿일 사건이므로

$$\mathrm{P}(A^C) = \frac{{}_7\mathrm{C}_3}{{}_{10}\mathrm{C}_3} = \frac{\dfrac{7 \times 6 \times 5}{3 \times 2 \times 1}}{\dfrac{10 \times 9 \times 8}{3 \times 2 \times 1}} = \frac{7}{24}$$

따라서 3개의 초콜릿을 동시에 꺼낼 때, 적어도 1개가 흰색 초콜릿일 확률은

$$\mathrm{P}(A) = 1 - \mathrm{P}(A^C) = 1 - \frac{7}{24} = \mathbf{\frac{17}{24}}$$

중단원 확인하기 / 풀이

1 전체 10곡 중 3곡을 택하는 경우의 수는

${}_{10}C_3=120$(가지)

(1) 3곡 중 1곡이 동요일 경우의 수는

${}_4C_1\times{}_6C_2=60$(가지)

따라서 구하는 확률은 $\frac{60}{120}=\mathbf{\frac{1}{2}}$

(2) 3곡이 모두 동요일 경우의 수는

${}_4C_3=4$(가지)

따라서 구하는 확률은 $\frac{4}{120}=\mathbf{\frac{1}{30}}$

2 $\frac{625}{50000}=\mathbf{\frac{1}{80}}$

3 한 개의 주사위를 두 번 던질 때, 모든 경우의 수는 $6\times6=36$(가지)

(1) 두 눈이 모두 같은 경우의 수는

(1, 1), (2, 2), ⋯, (6, 6)

의 6가지

따라서 구하는 확률은 $\frac{6}{36}=\mathbf{\frac{1}{6}}$

(2) (i) 두 눈의 합이 4인 경우의 수는

(1, 3), (2, 2), (3, 1)의 3가지

(ii) 두 눈의 합이 8인 경우의 수는

(2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2)

의 5가지

(iii) 두 눈의 합이 12인 경우의 수는

(6, 6)의 1가지

이상에서 두 눈의 합이 4의 배수인 경우의 수는

$3+5+1=9$(가지)

따라서 구하는 확률은 $\frac{9}{36}=\mathbf{\frac{1}{4}}$

(3) 두 눈의 차가 3인 경우의 수는

(1, 4), (2, 5), (3, 6), (4, 1), (5, 2),

(6, 3)의 6가지

따라서 구하는 확률은 $\frac{6}{36}=\mathbf{\frac{1}{6}}$

(4) 두 눈의 합이 3 이상인 사건을 A라고 하면 A^C은 두 눈의 합이 2인 사건이다.

따라서 경우의 수는 (1, 1)의 1가지이므로

$P(A^C)=\frac{1}{36}$ $\quad\therefore P(A)=1-\frac{1}{36}=\mathbf{\frac{35}{36}}$

4 (1) $\frac{{}_3C_2}{{}_{10}C_2}=\mathbf{\frac{1}{15}}$

(2) 뽑힌 두 명 중 적어도 한 명이 A형일 사건을 B라고 하면 B^C은 뽑힌 두 명 모두 A형이 아닌 사건이므로 $P(B^C)=\frac{{}_7C_2}{{}_{10}C_2}=\frac{7}{15}$

$\therefore P(B)=1-\frac{7}{15}=\mathbf{\frac{8}{15}}$

5 스위치 A, B, C가 켜질 확률은 각각 0.8, 0.7, 0.6이다. 따라서 구하는 확률은

$(0.8+0.7-0.8\times0.7)\times0.6=\mathbf{0.564}$

112

중단원 확인하기 | ※ 새로 나온 용어와 기호 수학적 확률, 통계적 확률 | Ⅳ-1. 확률과 그 활용

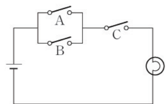
수학적 확률 — 이해
1 어느 CD에는 동요 4곡을 포함하여 10곡의 노래가 수록되어 있다. 이 중 3곡을 임의로 택하여 들을 때, 다음을 구하여라.
(1) 1곡이 동요일 확률 (2) 3곡이 동요일 확률

통계적 확률 — 이해
2 어느 지역에서 주민 5만 명 중 625명이 환경 보호 단체의 회원이라고 한다. 이 지역 주민 1명을 임의로 뽑을 때, 그 사람이 환경 보호 단체의 회원일 확률을 구하여라.

확률의 계산 — 계산
3 한 개의 주사위를 두 번 던질 때, 다음을 구하여라.
(1) 두 번 모두 같은 눈이 나올 확률
(2) 두 눈의 합이 4의 배수일 확률
(3) 두 눈의 차가 3일 확률
(4) 두 눈의 합이 3 이상일 확률

여사건의 확률 — 의사소통
4 어떤 모임에 참석한 10명 중 세 명의 혈액형이 A형이라고 한다. 이들 중 두 명을 임의로 뽑을 때, 다음을 구하여라.
(1) 두 명이 모두 A형일 확률
(2) 적어도 한 명이 A형일 확률

전구에 불이 켜질 확률 — 문제 해결
5 오른쪽 그림과 같이 독립적으로 작동하는 세 개의 스위치 A, B, C가 전구에 연결되어 있다. 스위치 A, B, C가 꺼질 확률이 각각 0.2, 0.3, 0.4일 때, 전구에 불이 켜질 확률을 구하여라.



중단원 평가 문제

정답과 풀이 p.244

01 기본

triangle의 8개의 문자를 일렬로 나열할 때, 모음이 모두 홀수 번째 자리에 올 확률은?

① $\frac{8}{15}$　② $\frac{2}{3}$　③ $\frac{1}{14}$　④ $\frac{1}{7}$　⑤ $\frac{2}{21}$

02 기본

남학생 3명과 여학생 3명을 일렬로 세울 때, 남학생과 여학생이 번갈아 가며 서게 될 확률은?

① $\frac{1}{10}$　② $\frac{1}{8}$　③ $\frac{1}{6}$　④ $\frac{1}{4}$　⑤ $\frac{1}{2}$

1에서 5까지 적힌 공 중에서 2개를 꺼내고 6이 적힌 공을 꺼낸다.

03 실력

주머니 속에 1부터 10까지의 번호가 하나씩 적힌 같은 크기의 공 10개가 들어 있다. 이 중에서 3개의 공을 동시에 꺼낼 때, 나온 번호의 최댓값이 6이 될 확률은?

① $\frac{1}{15}$　② $\frac{1}{12}$　③ $\frac{1}{4}$　④ $\frac{5}{12}$　⑤ $\frac{1}{2}$

04 실력

10원짜리 동전 2개, 50원짜리 동전 4개, 100원짜리 동전 6개가 들어 있는 주머니에서 임의로 6개의 동전을 꺼낼 때, 금액의 합이 500원 이상일 확률을 구하여라. (단, 각각의 동전이 뽑힐 확률은 같다.)

05 기본

어느 프로야구 선수의 지난 시즌까지의 통산 타율이 0.295였다. 이 선수가 이번 시즌에 200번의 타석에서 칠 수 있는 안타의 개수를 추측하여라.

06 기본

주머니 속에 흰 공이 3개, 빨간 공이 4개, 노란 공이 n개 들어 있다. 이 주머니에서 한 개의 공을 꺼내어 색을 확인하고 다시 넣는 시행을 1000번 반복하였더니 그중 흰 공이 250번 나왔다. 이때, n의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

07 바탕

1부터 300까지의 자연수 중에서 하나의 수를 임의로 뽑을 때, 그 수가 다음과 같을 확률을 구하여라.

(1) 3의 배수
(2) 4의 배수
(3) 3의 배수 또는 4의 배수

08 바탕

서로 다른 두 개의 주사위를 동시에 던질 때, 다음을 구하여라.

(1) 나오는 눈의 수의 합이 6 또는 8일 확률
(2) 나오는 눈의 수의 합이 3 이하이거나 11 이상일 확률

09

기본

10개의 제비 중에 당첨 제비가 3개 들어 있다. 갑, 을의 순서로 제비를 하나씩 뽑을 때, 다음을 구하여라. (단, 꺼낸 제비는 다시 넣지 않는다.)

(1) 갑이 당첨될 확률
(2) 갑과 을이 모두 당첨될 확률
(3) 갑은 당첨되지 않고, 을이 당첨될 확률
(4) 을이 당첨될 확률

10

기본

주머니 속에 흰 공이 3개, 붉은 공이 6개 들어 있다. 이 주머니에서 3개의 공을 동시에 꺼낼 때, 다음을 구하여라.

(1) 붉은 공만 나올 확률
(2) 붉은 공과 흰 공이 섞여 나올 확률

11

기본

세 사람이 비기는 경우는 모두 같은 것을 내거나 모두 다른 것을 내는 경우이다.

세 사람이 가위바위보를 할 때, 비길 확률은?

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{5}$ ③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

12

실력

두 사건 A, B에 대하여 $\mathrm{P}(A)=\frac{1}{4}$, $\mathrm{P}(B^C)=\frac{1}{3}$, $\mathrm{P}(A\cup B)=\frac{1}{2}$일 때, $\mathrm{P}(A\cap B)$의 값은?

① $\frac{1}{12}$ ② $\frac{1}{6}$ ③ $\frac{5}{12}$ ④ $\frac{7}{12}$ ⑤ $\frac{5}{6}$

13 실력

5개의 검은 공과 3개의 흰 공이 들어 있는 주머니에서 1개의 공을 꺼내어 색을 확인하고 다시 넣은 다음, 다시 1개의 공을 꺼내어 색을 조사할 때, 다음을 구하여라.

(1) 두 공의 색이 같을 확률　　(2) 두 공의 색이 다를 확률

'적어도~' 라는 문구가 나오면 여사건의 확률을 이용한다.

14 바탕

남학생 3명과 여학생 2명을 일렬로 세울 때, 적어도 한쪽 끝에는 여학생이 서는 확률은?

① $\frac{3}{10}$　② $\frac{1}{3}$　③ $\frac{7}{10}$　④ $\frac{9}{10}$　⑤ $\frac{1}{5}$

15 기본

어떤 수학 문제를 갑, 을, 병이 맞힐 확률은 각각 $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{3}$이다. 이 문제를 세 명 중 적어도 두 명이 맞힐 확률을 구하여라.

16 실력

주머니 속에 같은 크기의 흰 구슬, 노란 구슬이 모두 10개 들어 있다. 이 중에서 2개의 구슬을 동시에 꺼낼 때, 적어도 한 개가 노란 구슬일 확률이 $\frac{8}{15}$이다. 이때, 노란 구슬의 개수는?

① 3개　② 4개　③ 5개　④ 6개　⑤ 7개

2 통계와 그 활용

이 단원을 배우면

- 확률변수와 확률분포의 뜻을 알 수 있다.
- 기댓값과 분산을 구할 수 있다.
- 이항분포의 뜻을 이해하고, 실생활 문제 해결에 이를 활용할 수 있다.
- 정규분포의 뜻과 그 성질을 이해할 수 있다.
- 간단한 통계 조사의 결과를 해석할 수 있다.

소단원의 학습 목표

1. 확률변수의 뜻을 안다.
2. 확률분포의 뜻을 안다.
3. 확률변수의 기댓값(평균), 분산 및 표준편차의 뜻을 알고, 이를 구할 수 있다.

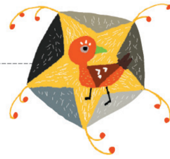
여기서 배우는 용어 및 기호

확률변수, **확률분포**, **기댓값**, $\mathrm{E}(X)$, **분산**, $\mathrm{V}(X)$, **표준편차**, $\sigma(X)$

114

2 통계와 그 활용

1 확률변수와 확률분포



학습 목표

- 확률변수의 뜻을 안다.
- 확률분포의 뜻을 안다.

다 가 서 기 / **로또 1등 당첨 확률**

로또(Lotto)는 1971년 6월 미국의 뉴저지 주에서 시작되어 전 세계에 퍼졌다. 우리나라에는 2002년 12월에 처음으로 로또가 발매되었으며, 그 형식은 45개의 수 중에서 6개를 맞히면 1등이 되는 6/45이다.

로또에서 번호 4개, 5개가 일치할 확률은 각각 $\frac{11115}{8145060}$, $\frac{234}{8145060}$이다.

다가서기 / 해설

우리나라에서 판매하는 로또(Lotto)는 2002년 12월부터 시작하였다. 그 형식은 6/45이고, 이것은 45개의 수 중 6개를 구매자가 직접 선택하고 추첨을 통해 당첨 번호와 선택한 번호가 일치하는 개수에 따라 순위를 결정한다는 뜻이다.

로또는 1971년 6월 미국의 뉴저지 주에서 시작되어 1980년대 이후 유럽과 아시아에서도 인기를 누리고 있다.

로또의 형식에는 49개의 수 중 6개를 맞히면 1등이 되는 6/49, 54개의 수 중 6개를 맞히면 1등이 되는 6/54, 40개의 수 중 4개를 맞히면 1등이 되는 4/40, 69개의 수 중 7개를 맞히면 1등이 되는 7/69 등이 있다.

6/45에서 번호를 선택하는 전체 경우의 수는 다음과 같다.

$${}_{45}C_6=\frac{45\times44\times43\times42\times41\times40}{6\times5\times4\times3\times2\times1}=8145060(\text{가지})$$

이때, 1등, 2등, 3등, 4등이 될 확률을 구하여 보자.

(i) 번호 6개가 일치할 경우의 수는

${}_6C_6=1$(가지)

따라서 1등이 될 확률은 $\frac{1}{8145060}$

(ii) 번호 5개가 일치하고 보너스 번호 1개가 일치할 경우의 수는

${}_6C_5\times{}_1C_1=6$(가지)

따라서 2등이 될 확률은 $\frac{6}{8145060}=\frac{1}{1357510}$

(iii) 번호 5개가 일치할 경우의 수는

${}_6C_5\times{}_{39}C_1=234$(가지)

따라서 3등이 될 확률은 $\frac{234}{8145060}\fallingdotseq\frac{1}{34808}$

(iv) 번호 4개가 일치할 경우의 수는

${}_6C_4\times{}_{39}C_2=11115$(가지)

따라서 4등이 될 확률은 $\frac{11115}{8145060}\fallingdotseq\frac{1}{733}$

이 외에도 로또와 관련된 더 많은 자료들은 나눔로또 홈페이지(www.645lotto.net)에서 찾을 수 있다.

01 확률변수의 뜻

탐구하기 / 동전을 세 번 던질 때, 앞, 뒷면 조사하기

한 개의 동전을 세 번 던지는 시행에서 앞면을 H, 뒷면을 T로 나타내자. 표본공간을 S라고 할 때, 다음 ☐ 안에 알맞은 것을 써넣어 보자.

S={TTT, TTH, THT, HTT, ☐, ☐, ☐, ☐}

알아보기 / 확률변수의 뜻을 알아보자.

한 개의 동전을 두 번 던지는 시행에서 앞면이 나오는 횟수를 X라고 하면 표본공간 S의 각 원소

TT, TH, HT, HH

에 대응하는 X의 값은 각각

0, 1, 1, 2

이다. 즉, X는 0, 1, 2 중에서 한 값을 가지는 변수이고 X의 각 값에 대응하는 확률은 각각 $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$이다.

S: TT, TH, HT, HH / X의 값: 0, 1, 2 / 확률: $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$

$X=0 \Longleftrightarrow$ {TT}
$X=1 \Longleftrightarrow$ {HT, TH}
$X=2 \Longleftrightarrow$ {HH}

이와 같이 어떤 시행의 결과에 따라 표본공간의 각 원소에 하나의 실수값을 대응시켜 주는 것을 **확률변수**라고 한다.

확률변수를 생각함으로써 표본공간을 수량화할 수 있다.

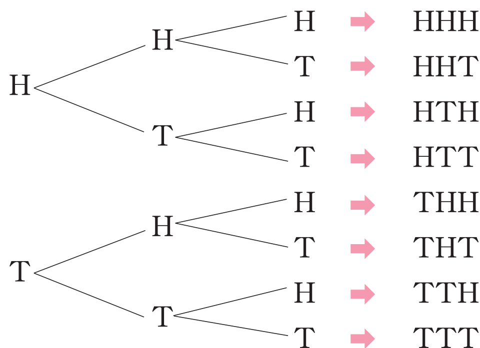
| 참고 | 확률변수는 표본공간을 정의역으로 하고, 실수 전체의 집합을 공역으로 하는 함수이다. 그러나 변수의 역할을 하므로 '확률변수'라고 부른다.

스스로 하기 / 익힘책 101쪽 | 익힘책 102쪽 | 익힘책 103쪽

1 한 개의 동전을 네 번 던지는 시행에서 앞면이 나오는 횟수를 확률변수 X라고 할 때, X가 가지는 값을 구하여라.

탐구하기 / 풀이

한 개의 동전을 세 번 던지는 시행에서 나올 수 있는 모든 경우를 다음과 같이 수형도를 그려서 생각하여 보자.



$\therefore$ S={TTT, TTH, THT, HTT, **THH**, **HTH**, **HHT**, **HHH**}

알아보기 / 해설

• 한 개의 주사위를 던지는 시행에서 위에 나오는 면을 관찰하면 표본공간은

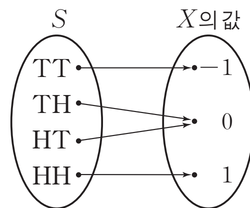
{⚀, ⚁, ⚂, ⚃, ⚄, ⚅}

또 한 개의 동전을 두 번 던지는 시행에서 앞면을 H, 뒷면을 T라고 하면 표본공간은

{TT, TH, HT, HH}

이처럼 표본공간이 그림이나 문자로 주어지면 확률의 계산 등에서 불편하므로 표본공간을 수량화할 필요가 있다.

• 어떤 표본공간 위에서 정의되는 확률변수는 본문의 내용 외에도 여러 가지가 있다. 예를 들어 (앞면이 나오는 횟수)-1을 확률변수 X라고 하면 X가 가지는 값은 다음과 같다.



스스로 하기 / 풀이

1 한 개의 동전을 네 번 던지는 시행에서 앞면을 H, 뒷면을 T라고 하면 표본공간 S는

S={TTTT, TTTH, TTHT, THTT, HTTT, TTHH, THHT, HHTT, THTH, HTHT, HTTH, THHH, HTHH, HHTH, HHHT, HHHH}

이때, 확률변수 X는 앞면이 나오는 횟수이므로 X가 가지는 값은 **0, 1, 2, 3, 4**이다.

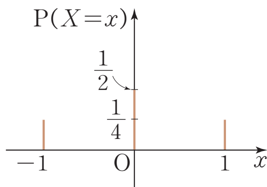
알아보기 / 해설

· 중학교 때 배운 도수분포와 이 단원에서 배우는 확률분포를 연결지어 생각하면 편리하다.

도수분포	⟷	확률분포
계급값	⟷	확률변수
상대도수	⟷	확률
상대도수의 분포표	⟷	확률분포표

· 확률변수 X가 무엇인지 분명히 해야 한다. 본문의 |보기|에서 확률변수 X를 (앞면이 나오는 횟수)-1이라고 할 때, X의 확률분포를 표와 그래프로 나타내면 각각 다음과 같다.

X	-1	0	1	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	1



이때, X의 확률분포는 $x=0$에 대하여 대칭이므로 이 성질을 활용하면 여러 가지 계산상 편리한 점이 있다.

· 확률변수 X의 확률분포가
$\mathrm{P}(X=x_i)=p_i(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$
일 때

$$p_1+p_2+\cdots+p_n=\sum_{i=1}^{n}p_i=1$$

즉, 확률분포에서 각 확률의 합은 항상 1이 된다.

· $\mathrm{P}(X=x_i \text{ 또는 } X=x_j)=\mathrm{P}(X=x_i)+\mathrm{P}(X=x_j)$
$\qquad\qquad\qquad\qquad=p_i+p_j$(단, $i\neq j$)

116

02 확률분포

알 아 보 기 / 확률변수의 확률분포를 알아보자.

X가 무한개의 값을 가질 때에도 확률변수가 되는 경우가 있지만 여기에서는 유한개의 값을 가지는 경우만을 다루기로 한다.

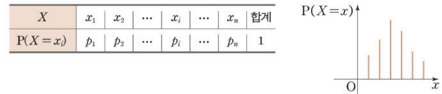
확률변수는 보통 대문자 X, Y, Z, $\cdots$로 나타내고, 확률변수가 가지는 값은 소문자 x, y, z, $\cdots$ 또는 x_1, x_2, x_3, $\cdots$으로 나타낸다.

확률변수 X가 가질 수 있는 값이 x_1, x_2, $\cdots$, x_n이고 X가 이 값들을 가질 확률이

$$\mathrm{P}(X=x_i)=p_i\ (i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

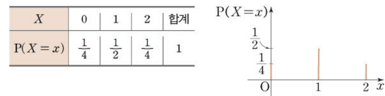
일 때, x_1, x_2, $\cdots$, x_n과 p_1, p_2, $\cdots$, p_n과의 대응 관계를 확률변수 X의 **확률분포**라고 한다.

또 확률변수 X의 확률분포를 표나 그래프로 나타내면 다음과 같다. 그래프로 나타낼 때에는 보통 선 그래프를 사용한다.



X	x_1	x_2	$\cdots$	x_i	$\cdots$	x_n	합계
$\mathrm{P}(X=x_i)$	p_1	p_2	$\cdots$	p_i	$\cdots$	p_n	1

| 보기 | 한 개의 동전을 두 번 던지는 시행에서 앞면이 나오는 횟수를 확률변수 X라고 할 때, X의 확률분포를 표와 그래프로 나타내면 각각 다음과 같다.



X	0	1	2	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	1

일반적으로 확률분포에 대하여 다음이 성립한다.

확률분포의 성질

(1) $\mathrm{P}(X=x_i)=p_i\geq 0$ (단, $i=1,\ 2,\ \cdots,\ n$)

(2) $\sum_{i=1}^{n}p_i=1$

(3) $\mathrm{P}(x_i\leq X\leq x_j)=\sum_{k=i}^{j}p_k$ (단, $i,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ n$이고 $i\leq j$이다.)

보충 학습

확률변수 X가 유한개의 값 x_1, x_2, x_3, $\cdots$, x_n을 가질 때, X를 이산확률변수라고 한다.

함께하기 / 해설

1 (1) 확률변수의 확률분포를 식으로 나타낼 수도 있다.
이 문제에서 주어진 확률변수 X를 식으로 나타내면

$$\mathrm{P}(X=x)=\frac{{}_3\mathrm{C}_x\cdot{}_5\mathrm{C}_{3-x}}{{}_8\mathrm{C}_3}$$

(단, $x=0,\ 1,\ 2,\ 3$)

117

함께 하기 / 익힘책 101쪽 | 익힘책 102쪽 | 익힘책 103쪽

1 남학생 5명과 여학생 3명으로 구성되어 있는 어떤 정보 경시 팀에서 임의로 3명의 대표를 선발할 때, 선발되는 여학생의 수를 확률변수 X라고 하자. 다음 물음에 답하여라.

(1) X의 확률분포를 표와 그래프로 나타내어라.

(2) 여학생이 2명 이상 선발될 확률을 구하여라.

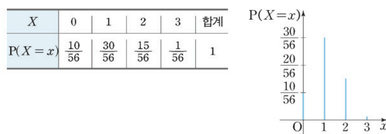
풀이

(1) 확률변수 X가 가지는 값은 0, 1, 2, 3이므로 그 각각의 확률을 구하면

$\mathrm{P}(X=0)=\dfrac{{}_5\mathrm{C}_3\times{}_3\mathrm{C}_0}{{}_8\mathrm{C}_3}=\dfrac{10}{56}$, $\mathrm{P}(X=1)=\dfrac{{}_5\mathrm{C}_2\times{}_3\mathrm{C}_1}{{}_8\mathrm{C}_3}=\dfrac{30}{56}$

$\mathrm{P}(X=2)=\dfrac{{}_5\mathrm{C}_1\times{}_3\mathrm{C}_2}{{}_8\mathrm{C}_3}=\dfrac{15}{56}$, $\mathrm{P}(X=3)=\dfrac{{}_5\mathrm{C}_0\times{}_3\mathrm{C}_3}{{}_8\mathrm{C}_3}=\dfrac{1}{56}$

따라서 X의 확률분포를 표와 그래프로 나타내면 각각 다음과 같다.



X	0	1	2	3	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{10}{56}$	$\frac{30}{56}$	$\frac{15}{56}$	$\frac{1}{56}$	1

(2) 여학생이 2명 이상 선발되는 것은 $X\geq 2$인 경우이므로 그 확률은

$$\mathrm{P}(X\geq 2)=\mathrm{P}(X=2)+\mathrm{P}(X=3)=\frac{15}{56}+\frac{1}{56}=\frac{16}{56}=\frac{2}{7}$$

스스로 하기 / 익힘책 101쪽 | 익힘책 102쪽 | 익힘책 103쪽

1 한 개의 주사위를 두 번 던지는 시행에서 나오는 눈의 수의 합을 확률변수 X라고 하자. 다음 물음에 답하여라.

(1) 확률변수 X의 확률분포를 표와 그래프로 나타내어라.

(2) 나오는 눈의 수의 합이 5 이상 7 이하일 확률을 구하여라.

(3) 나오는 눈의 수의 합이 3 이상일 확률을 구하여라.

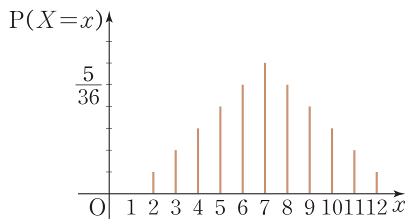
스스로 하기 / 풀이

1 주사위를 두 번 던질 때 나오는 눈의 수의 합을 표로 만들면 다음과 같다.

두 번째 \ 첫 번째	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

(1) 확률변수 X가 가지는 값은 2, 3, 4, ⋯, 11, 12이므로 그 각각의 확률을 구하여 X의 확률분포를 표와 그래프로 각각 나타내면 다음과 같다.

X	2	3	4	5	6	7
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$
X	8	9	10	11	12	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	1



(2) 나오는 눈의 수의 합이 5 이상 7 이하인 것은 $5\leq X\leq 7$인 경우이므로 그 확률은

$$\mathrm{P}(5\leq X\leq 7)=\mathrm{P}(X=5)+\mathrm{P}(X=6)+\mathrm{P}(X=7)=\frac{4}{36}+\frac{5}{36}+\frac{6}{36}=\frac{15}{36}=\mathbf{\frac{5}{12}}$$

(3) 나오는 눈의 수의 합이 3 이상인 것은 $X\geq 3$인 경우이므로 그 확률은

$$\mathrm{P}(X\geq 3)=1-\mathrm{P}(X=2)=1-\frac{1}{36}=\mathbf{\frac{35}{36}}$$

| 다른 풀이 |

$$\mathrm{P}(X\geq 3)=\mathrm{P}(X=3)+\mathrm{P}(X=4)+\cdots+\mathrm{P}(X=11)+\mathrm{P}(X=12)=\frac{2}{36}+\frac{3}{36}+\cdots+\frac{2}{36}+\frac{1}{36}=\frac{35}{36}$$

탐구하기 / 풀이

(i) 게임 1을 택한 경우

각 게임에서 졌을 때 생길 수 있는 손해를 알아보고 손해가 가장 적은 게임을 택한 것이다. 게임 1의 손해는 1000원, 게임 2의 손해는 5000원, 게임 3의 손해는 2000원이기 때문이다.

(ii) 게임 2를 택한 경우

각 게임에서 이겼을 때 생길 수 있는 이익을 알아보고 이익이 가장 많은 게임을 택한 것이다. 게임 1의 이익은 1000원, 게임 2의 이익은 5000원, 게임 3의 이익은 3000원이기 때문이다.

(iii) 게임 3을 택한 경우

각 게임에서 얻을 수 있는 평균 이익을 생각하고 그 값이 가장 큰 게임을 택한 것이다. 게임 1과 게임 2의 평균 이익은 0원이고, 게임 3의 평균 이익은 500원이기 때문이다.

어느 게임을 택하더라도 그 이유가 합리적이면 된다.

03 평균, 분산 및 표준편차

탐 구 하 기 / 최선의 선택

오른쪽 표는 세 가지의 동전 던지기 게임에 대한 상금을 적은 것이다. 이를테면 게임 1은 한 개의 동전을 던져서 앞면이 나오면 1000원을 받고, 뒷면이 나오면 1000원을 주는 것이다. 세 가지의 게임 중 각자 하고 싶은 게임을 택하고, 택한 이유를 말하여 보자.

게임	앞면	뒷면
게임 1	+1000원	−1000원
게임 2	+5000원	−5000원
게임 3	+3000원	−2000원

알 아 보 기 / 확률변수의 기댓값(평균), 분산 및 표준편차를 알아보자.

오른쪽 표와 같이 상금이 걸린 100장의 복권에서 상금의 평균은

$$\frac{10000\times1+5000\times5+1000\times55+0\times39}{100}$$

$=900$(원) ...... ㉠

상금(원)	복권 수(장)
10000	1
5000	5
1000	55
0	39
합계	100

이다. 여기서 복권 한 장에 대한 상금을 확률변수 X라고 할 때, ㉠의 좌변은 X의 각 값과 그에 대응하는 확률을 곱하여 더한 것과 같다. 즉

$$10000\times\frac{1}{100}+5000\times\frac{5}{100}+1000\times\frac{55}{100}+0\times\frac{39}{100}=900(\text{원})$$

X	$\mathrm{P}(X=x)$
10000	$\frac{1}{100}$
5000	$\frac{5}{100}$
1000	$\frac{55}{100}$
0	$\frac{39}{100}$
합계	1

이때, 상금의 평균 900원은 복권 1장을 살 때 상금으로 기대할 수 있는 값이다.

확률변수 X의 확률분포가 다음 표와 같이 주어졌다고 하자.

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_i	$\cdots$	x_n	합계
$\mathrm{P}(X=x_i)$	p_1	p_2	$\cdots$	p_i	$\cdots$	p_n	1

이때, $x_1p_1+x_2p_2+\cdots+x_np_n=\sum_{i=1}^{n}x_ip_i$를 확률변수 X의 **기댓값** 또는 평균이라 하고, 기호로

$$\mathrm{E}(X)$$

와 같이 나타낸다.

기댓값 $\mathrm{E}(X)$의 E는 Expectation의 첫 글자이다.

알아보기 / 해설

확률변수의 평균, 분산 및 표준편차는 도수분포표에서의 평균, 분산 및 표준편차와 연관지어서 생각하면 편리하다.

다음과 같은 도수분포표에서 평균과 분산을 구하면

계급값	x_1	x_2	$\cdots$	x_n	합계
도수	f_1	f_2	$\cdots$	f_n	N
상대도수	$\frac{f_1}{N}$	$\frac{f_2}{N}$	$\cdots$	$\frac{f_n}{N}$	1

$$(\text{평균})=\frac{\{(\text{계급값})\times(\text{도수})\}\text{의 총합}}{(\text{도수})\text{의 총합}}=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_if_i}{N}=m$$

$$(\text{분산})=\frac{\{(\text{편차})^2\times(\text{도수})\}\text{의 총합}}{(\text{도수})\text{의 총합}}=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-m)^2f_i}{N}$$

이때, 상대도수 $\frac{f_i}{N}=p_i$라고 하면

$$(\text{평균})=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_if_i}{N}=\sum_{i=1}^{n}x_i\frac{f_i}{N}=\sum_{i=1}^{n}x_ip_i$$

$$(\text{분산})=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-m)^2f_i}{N}$$

119

도수분포에서 변량이 평균을 중심으로 흩어져 있는 정도를 나타내는 산포도로서 분산과 표준편차를 생각하였다. 마찬가지로 확률분포에서도 확률변수의 분산과 표준편차를 생각할 수 있다.

혼동이 없을 때는 $\mathrm{E}(X)$를 간단히 m으로 쓴다. 이때, m은 mean의 첫 글자이다.

일반적으로 확률변수 X의 기댓값을 $\mathrm{E}(X)=m$이라고 하면 $(X-m)^2$은

$$(x_1-m)^2,\ (x_2-m)^2,\ \cdots,\ (x_n-m)^2$$

의 값을 가지는 확률변수로서, X가 m으로부터 떨어진 정도를 나타낸다.

분산 $\mathrm{V}(X)$의 V는 Variance의 첫 글자이다.

이때, $(X-m)^2$의 기댓값을 확률변수 X의 **분산**이라 하고, 기호로

$$\mathrm{V}(X)$$

와 같이 나타낸다.

확률변수 X의 확률분포가 $\mathrm{P}(X=x_i)=p_i(i=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n)$일 때, 확률변수 X의 분산 $\mathrm{V}(X)$는 다음과 같이 계산한다.

$\sum_{i=1}^{n} x_i p_i = m,\ \sum_{i=1}^{n} p_i = 1$

$$\begin{aligned}\mathrm{V}(X)&=\mathrm{E}((X-m)^2)\\&=\sum_{i=1}^{n}(x_i-m)^2p_i\\&=\sum_{i=1}^{n}x_i^2p_i-2m\sum_{i=1}^{n}x_ip_i+m^2\sum_{i=1}^{n}p_i\\&=\sum_{i=1}^{n}x_i^2p_i-2m^2+m^2\\&=\sum_{i=1}^{n}x_i^2p_i-m^2\\&=\mathrm{E}(X^2)-m^2\end{aligned}$$

표준편차 σ(sigma)는 standard deviation의 첫 글자 s에 해당하는 그리스 문자이다.

또 분산 $\mathrm{V}(X)$의 양의 제곱근을 확률변수 X의 **표준편차**라 하고, 기호로

$$\sigma(X)$$

와 같이 나타낸다. 즉

$$\sigma(X)=\sqrt{\mathrm{V}(X)}$$

이다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

확률변수 X의 평균, 분산 및 표준편차

(1) 평균 $\mathrm{E}(X)=x_1p_1+x_2p_2+\cdots+x_np_n=\sum_{i=1}^{n}x_ip_i=m$

(2) 분산 $\mathrm{V}(X)=(x_1-m)^2p_1+\cdots+(x_n-m)^2p_n$
$=x_1^2p_1+\cdots+x_n^2p_n-m^2$
$=\mathrm{E}(X^2)-m^2$

(3) 표준편차 $\sigma(X)=\sqrt{\mathrm{V}(X)}$

$$=\sum_{i=1}^{n}(x_i-m)^2\frac{f_i}{N}$$

$$=\sum_{i=1}^{n}(x_i-m)^2p_i$$

따라서 확률변수 X가 가지는 값이 $x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n$이고 각각 대응하는 확률이 $p_1,\ p_2,\ \cdots,\ p_n$일 때, X의 확률분포를 나타낸 표와 평균, 분산 및 표준편차는 다음과 같다.

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_i	$\cdots$	x_n	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	p_1	p_2	$\cdots$	p_i	$\cdots$	p_n	1

$$\mathrm{E}(X)=\sum_{i=1}^{n}x_i p_i=m$$

$$\mathrm{V}(X)=\sum_{i=1}^{n}(x_i-m)^2p_i=\mathrm{E}((X-m)^2)$$

$$\sigma(X)=\sqrt{\mathrm{V}(X)}$$

익힘책 코너

개념 넓히기_ 104쪽

평균, 분산 및 표준편차의 성질을 예를 통해 알아보자.

A 학급 학생들의 시험 성적의 평균이 40점, 표준편차가 5점이다. 즉, A 학급 학생들의 시험 성적을 확률변수 X라고 하면 $\mathrm{E}(X)=40,\ \sigma(X)=5$

(i) 이때 A학급 학생들의 점수를 모두 5점씩 올려준다면 평균과 표준편차는 어떻게 될까?

5점씩 올린 점수는 $X+5$이므로

$\mathrm{E}(X+5)=\mathrm{E}(X)+5=45$

따라서 반의 평균은 40점에서 45점으로 올라간다. 한편 표준편차는 편차의 크기와 관계된 것이므로

$\sigma(X+5)=\sigma(X)=5$

따라서 표준편차는 그대로 5점이다.

(ii) A 학급 학생들의 점수를 모두 2배하기로 하였다면 평균과 표준편차는 어떻게 될까?

2배한 점수는 $2X$이므로

$\mathrm{E}(2X)=2\mathrm{E}(X)=80$

따라서 반의 평균은 40점에서 80점으로 올라간다. 또한 한 학생의 점수가 45점이었다면 점수에 2배를 하기 전의 편차는 45−40=5(점)이었지만 2배를 한 후의 편차는 90−80=10(점)으로 2배가 된다.

따라서 편차가 2배가 되므로 표준편차도 2배가 되어 10점이 된다. 즉,

$\sigma(2X)=|2|\sigma(X)=10$

이와 같이 확률변수 X가 $Y=aX+b$의 꼴로 바뀌면 $\mathrm{E}(Y)$는 $a,\ b$의 값 모두에 영향을 받지만 $\mathrm{V}(Y),\ \sigma(Y)$는 a의 값에만 영향을 받는다.

함 께 하 기 / 익힘책 101쪽 | 익힘책 102쪽 | 익힘책 103쪽

1 볼펜 6자루와 연필 4자루 중 임의로 2자루를 고를 때, 그중 연필의 수를 확률변수 X라고 하자. 이때, X의 평균, 분산 및 표준편차를 구하여라.

풀이

확률변수 X가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2이고 그 확률은

$$P(X=0)=\frac{{}_6C_2\times{}_4C_0}{{}_{10}C_2}=\frac{15}{45}=\frac{1}{3}$$

$$P(X=1)=\frac{{}_6C_1\times{}_4C_1}{{}_{10}C_2}=\frac{24}{45}=\frac{8}{15}$$

$$P(X=2)=\frac{{}_6C_0\times{}_4C_2}{{}_{10}C_2}=\frac{6}{45}=\frac{2}{15}$$

확률변수 X의 확률분포는 다음 표와 같다.

X	0	1	2	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{2}{15}$	1

여기서 확률변수 X의 평균 $E(X)$는

$$E(X)=0\times\frac{1}{3}+1\times\frac{8}{15}+2\times\frac{2}{15}=\mathbf{\frac{4}{5}}$$

$E(X^2)=\sum_{i=1}^{n}x_i^2p_i$

한편 $E(X^2)=0^2\times\frac{1}{3}+1^2\times\frac{8}{15}+2^2\times\frac{2}{15}=\frac{16}{15}$이므로 확률변수 X의 분산 $V(X)$와 표준편차 $\sigma(X)$는

$$V(X)=E(X^2)-m^2=\frac{16}{15}-\left(\frac{4}{5}\right)^2=\mathbf{\frac{32}{75}}$$

$$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{\frac{32}{75}}=\mathbf{\frac{4\sqrt{6}}{15}}$$

스 스 로 하 기 / 익힘책 101쪽 | 익힘책 102쪽 | 익힘책 103쪽

1 확률변수 X의 확률분포가 다음 표와 같을 때, X의 평균, 분산 및 표준편차를 각각 구하여라.

X	-2	-1	0	1	2	합계
$P(X=x)$	0.1	0.2	0.35	0.3	0.05	1

2 세 개의 동전을 던져서 앞면이 나오는 개수를 확률변수 X라고 할 때, X의 평균, 분산 및 표준편차를 구하여라.

함께하기 / 해설

1 확률변수의 평균, 분산 및 표준편차를 구할 때에는 확률분포표를 만들어 계산하면 편리하다.

또한 확률변수 X의 분산을 구할 때, $V(X)=E((X-m)^2)$을 이용하여 구하는 것보다

$V(X)=E(X^2)-m^2$

을 이용하여 구하는 것이 편리한 경우가 많다.

스스로 하기 / 풀이

1 $E(X)=x_1p_1+x_2p_2+\cdots+x_np_n$

$V(X)=E(X^2)-m^2$

$=x_1^2p_1+x_2^2p_2+\cdots+x_n^2p_n-m^2$

이므로

$E(X)=(-2)\times0.1+(-1)\times0.2+0\times0.35+1\times0.3+2\times0.05$

$=-0.2-0.2+0+0.3+0.1$

$=\mathbf{0}$

$V(X)=E(X^2)-m^2$

$=(-2)^2\times0.1+(-1)^2\times0.2+0^2\times0.35+1^2\times0.3+2^2\times0.05-0^2$

$=0.4+0.2+0+0.3+0.2-0$

$=\mathbf{1.1}$

$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\mathbf{\sqrt{1.1}}$

2 세 개의 동전을 던지는 시행에서 앞면을 H, 뒷면을 T라고 하면 표본공간은

{TTT, TTH, THT, HTT, THH, HTH, HHT, HHH}

(i) 앞면이 나오는 개수가 0인 경우의 수는 {TTT}의 1가지

(ii) 앞면이 나오는 개수가 1인 경우의 수는 {TTH, THT, HTT}의 3가지

(iii) 앞면이 나오는 개수가 2인 경우의 수는 {THH, HTH, HHT}의 3가지

(iv) 앞면이 나오는 개수가 3인 경우의 수는 {HHH}의 1가지

따라서 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2, 3이고 그 확률은

$P(X=0)=\frac{1}{8}$, $P(X=1)=\frac{3}{8}$,

121

공 학 도 구

컴퓨터 소프트웨어를 이용하여 확률변수의 평균, 분산 및 표준편차 구하기

컴퓨터 소프트웨어를 이용하여 120쪽의 함께하기 1에 주어진 확률변수의 평균과 분산을 다음과 같이 구할 수 있다.

1. 확률분포를 입력하여 보자.

❶ A1 셀에 확률변수 'x'를 입력하고, B1, C1, D1 셀에 확률변수 X가 가지는 값을 각각 입력한다. 또 E1 셀에 '합계'를 입력한다.

❷ A2 셀에 확률변수 '$\mathrm{P}(x)$'를 입력하고, B2, C2, D2 셀에 각각의 확률을 입력한다. 또 B2~D2 셀을 마우스 끌기를 하여 영역을 선택한 후 수식 메뉴의 자동 합계($\sum$) 아이콘을 클릭하면 E2 셀에 SUM(B2:D2), 즉 1이 계산된다.

홈 삽입 페이지 레이아웃 수식 데이터 검토 보기

E2 =SUM(B2:D2)

	A	B	C	D	E	F
1	x	0	1	2	합계	
2	P(x)	1/3	8/15	2/15	1	
3						

2. 평균 $\mathrm{E}(X)$를 계산하여 보자.

❶ 위의 1의 표의 A3 셀에 '$x\cdot \mathrm{P}(x)$'를 입력한다.

❷ $x\cdot \mathrm{P}(x)$를 계산하기 위하여 B3 셀에 '=B1* B2'를 입력하고, Enter 키를 누른다.

❸ B3 셀의 오른쪽 끝에 커서를 놓으면 커서가 십자(+)표시로 바뀐다. 이때, 마우스 끌기를 하여 D3 셀까지 선택하면 자동으로 C1* C2, D1* D2가 각각 C3, D3 셀에 입력된다.

❹ B3, C3, D3 셀의 값의 합을 계산하기 위하여 B3~D3 셀의 영역을 선택한 후 자동 합계($\sum$) 아이콘을 클릭한다. 이렇게 하면 E3 셀에 SUM(B3:D3), 즉 $\mathrm{E}(X)$의 값이 계산된다.

홈 삽입 페이지 레이아웃 수식 데이터 검토 보기

E3 =SUM(B3:D3)

	A	B	C	D	E	F
1	x	0	1	2	합계	
2	P(x)	1/3	8/15	2/15	1	
3	x·P(x)	0	0.533333333	0.266666667	0.8	
4						

$\mathrm{P}(X=2)=\frac{3}{8}$, $\mathrm{P}(X=3)=\frac{1}{8}$

확률변수 X의 확률분포는 다음 표와 같다.

X	0	1	2	3	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	1

따라서 확률변수 X의 평균, 분산 및 표준편차는

$$\mathrm{E}(X)=0\times\frac{1}{8}+1\times\frac{3}{8}+2\times\frac{3}{8}+3\times\frac{1}{8}=\boldsymbol{\frac{3}{2}}$$

$$\mathrm{V}(X)=0^2\times\frac{1}{8}+1^2\times\frac{3}{8}+2^2\times\frac{3}{8}+3^2\times\frac{1}{8}-\left(\frac{3}{2}\right)^2=\boldsymbol{\frac{3}{4}}$$

$$\sigma(X)=\sqrt{\frac{3}{4}}=\boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

Plus 문제

한 개의 동전을 세 번 던져서 앞면이 나오면 2점, 뒷면이 나오면 1점의 점수를 받는다고 하자. 이 시행에서 얻은 점수를 확률변수 X라고 할 때, X의 기댓값을 구하여라.

| 풀이 |

한 개의 동전을 세 번 던져서 얻을 수 있는 점수는

앞면 0번, 뒷면 3번: 3점

앞면 1번, 뒷면 2번: 4점

앞면 2번, 뒷면 1번: 5점

앞면 3번, 뒷면 0번: 6점

따라서 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 3, 4, 5, 6이고 그 각각의 확률은 $\frac{1}{8}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{1}{8}$이다.

확률변수 X의 확률분포는 다음 표와 같다.

X	3	4	5	6	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	1

따라서 확률변수 X의 기댓값 $\mathrm{E}(X)$는

$$\mathrm{E}(X)=3\times\frac{1}{8}+4\times\frac{3}{8}+5\times\frac{3}{8}+6\times\frac{1}{8}=\frac{9}{2}(점)$$

공학 도구 / 해설

• 엑셀 프로그램에서 편집 화면에 있는 각각의 직사각형을 셀(cell)이라고 부른다. 셀은 세포를 뜻하는 단어인데, 엑셀의 각 직사각형이 마치 세포막을 형성한 것과 같아 보여 셀이라고 이름 지어졌다.
셀의 주소는 열의 번지와 행의 번지로 구성되어 있는데 열의 번지는 왼쪽에서 오른쪽으로 A, B, C, …의 알파벳으로, 행의 번지는 위에서 아래로 1, 2, 3, …의 숫자로 표시되어 있다. 본문의 예에서 8/15은 3열 2행, 즉 C2 셀에 기록되어 있으며, D3 셀에는 0.266666667이 기록되어 있다.

• 확률변수의 평균, 분산 및 표준편차를 구할 때에는 통계 처리용 계산기를 사용해도 되지만 계산기 대신 엑셀(Excel) 프로그램을 사용하여 계산할 수 있다.
엑셀 프로그램에서는 간단한 수식을 입력하여 두 개 이상의 수에 대해 덧셈, 곱셈, 나눗셈 및 뺄셈을 수행할 수 있다.
또한 자동 합계라고도 하는 SUM 함수를 사용하면 수식에 값을 직접 입력하지 않고도 일련의 값에 대한 합계를 신속하게 구할 수 있다.
엑셀 프로그램에서는 수식을 만든 후 인접 셀에 수식을 채울 수 있으므로 동일한 수식을 반복해서 만들지 않아도 되는 이점이 있다.

*수학적 개념을 공학 도구를 이용하여 이해하고 탐구해 보세요.

3. 분산 $V(X)$를 계산하여 보자.
❶ 앞의 2의 표의 A4 셀에 '$x^2 \cdot P(x)$'를 입력한다.
❷ $x^2 \cdot P(x)$를 계산하기 위하여 B4 셀에 '=B1^2* B2'를 입력한 뒤 Enter 키를 누른다.
❸ B4 셀의 오른쪽 끝에 커서를 놓고, 커서가 십자(+)표시로 바뀌면 D4 셀까지 마우스 끌기를 하여 나머지 셀의 값을 구한다.
❹ B4~D4 셀을 마우스 끌기를 하여 영역을 선택한 후 자동 합계(∑) 아이콘을 클릭한다. 이렇게 하면 E4 셀에 SUM(B4:D4), 즉 $E(X^2)$의 값이 계산된다.

홈 삽입 페이지 레이아웃 수식 데이터 검토 보기
E4 =SUM(B4:D4)

	A	B	C	D	E	F
1	x	0	1	2	합계	
2	P(x)	1/3	8/15	2/15	1	
3	x·P(x)	0	0.533333333	0.266666667	0.8	
4	x²·P(x)	0	0.533333333	0.533333333	1.066666667	
5						

❺ B6 셀에 '$\{E(X)\}^2$'을 입력하고, C6 셀에 '=E3^2'를 입력한다.
❻ B8 셀에 '$V(X)$'을 입력하고, C8 셀에 '=E4−C6'을 입력한다. 이렇게 하면 C8 셀에 $V(X)$의 값이 계산된다.
❼ B10 셀에 '표준편차'를 입력하고, C10 셀에 '=SQRT(C8)'을 입력한다. 이렇게 하면 C10 셀에 표준편차의 값을 구할 수 있다.

홈 삽입 페이지 레이아웃 수식 데이터 검토 보기
C10 =SQRT(C8)

	A	B	C	D	E	F
1	x	0	1	2	합계	
2	P(x)	1/3	8/15	2/15	1	
3	x·P(x)	0	0.533333333	0.266666667	0.8	
4	x²·P(x)	0	0.533333333	0.533333333	1.066666667	
5						
6		{E(x)}²	0.64			
7						
8		V(x)	0.426666667			
9						
10		표준편차	0.653197265			
11						

• 엑셀 프로그램을 이용하여 교과서 120쪽의 스스로 하기 1에 주어진 확률변수의 평균과 분산 및 표준편차를 구하여 보자.
(1) 확률변수 X의 확률분포를 입력한다.

Book1 - Microsoft Excel
홈 삽입 페이지 레이아웃 수식 데이터 검토 보기
G2 =SUM(B2:F2)

	A	B	C	D	E	F	G
1	x	-2	-1	0	1	2	합계
2	P(x)	0.1	0.2	0.35	0.3	0.05	1

(2) 평균 $E(X)$를 계산한다.

Book1 - Microsoft Excel
홈 삽입 페이지 레이아웃 수식 데이터 검토 보기
G3 =SUM(B3:F3)

	A	B	C	D	E	F	G
1	x	-2	-1	0	1	2	합계
2	P(x)	0.1	0.2	0.35	0.3	0.05	1
3	x·P(x)	-0.2	-0.2	0	0.3	0.1	0

(3) 분산 $V(X)$를 계산한다.

Book1 - Microsoft Excel
홈 삽입 페이지 레이아웃 수식 데이터 검토 보기
G4 =SUM(B4:F4)

	A	B	C	D	E	F	G
1	x	-2	-1	0	1	2	합계
2	P(x)	0.1	0.2	0.35	0.3	0.05	1
3	x·P(x)	-0.2	-0.2	0	0.3	0.1	0
4	x²·P(x)	0.4	0.2	0	0.3	0.2	1.1

이상에서 다음을 알 수 있다.
$E(X^2)=1.1$, $\{E(X)\}^2=0$
따라서 다음과 같이 분산과 표준편차를 구할 수 있다.
$$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$$
$$=1.1-0=1.1$$
$$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{1.1}\fallingdotseq 1.048809$$

(4) 위의 결과를 정리하면 다음과 같다.

Book1 - Microsoft Excel
홈 삽입 페이지 레이아웃 수식 데이터 검토 보기
D8 =SQRT(D7)

	A	B	C	D	E	F	G
1	x	-2	-1	0	1	2	합계
2	P(x)	0.1	0.2	0.35	0.3	0.05	1
3	x·P(x)	-0.2	-0.2	0	0.3	0.1	0
4	x²·P(x)	0.4	0.2	0	0.3	0.2	1.1
5							
6			{E(x)}²	0			
7			V(x)	1.1			
8			표준편차	1.048809			

123

2 이항분포

학습 목표

- 이항분포의 뜻을 이해한다.
- 이항분포를 실생활 문제 해결에 활용할 수 있다.

2 통계와 그 활용

다 가 서 기 / **항공권 예약**

항공사에서는 예약한 사람이 사전 통보 없이 탑승하지 않는 경우에 대비하여 적절한 인원만큼 초과하여 항공권을 팔기도 한다. 이때에 적용되는 모형이 이 단원에서 다루는 이항분포이다.

손님을 좌석의 수보다 적게 탑승시키면 손실이 생기고, 손님을 좌석의 수보다 많게 탑승시키면 좌석이 부족하므로 항공사에서는 항상 적절한 수학 모형을 사용하여 항공권 예약을 받는다.

소단원의 학습 목표

1. 이항분포의 뜻을 알고, 이항분포의 확률분포를 표로 나타낼 수 있다.
2. 이항분포의 평균과 표준편차를 구할 수 있다.
3. 이항분포를 실생활 문제 해결에 활용할 수 있다.

여기서 배우는 용어 및 기호

이항분포, $\mathrm{B}(n,\ p)$

다가서기 / 해설

비행기는 버스 또는 기차와는 달리 예약을 하였더라도 공항에서 티켓을 발권할 때 좌석을 배정받는다. 그 이유는 여러 가지가 있겠지만 일반 육상 교통과는 달리 기후에 많은 영향을 받기 때문에 불가피한 사태에 대비하여 좌석을 배정하지 않기도 하고, 노약자 등을 위한 좌석도 배정하면서 비상시에 도움을 얻고자 비상구 옆에는 젊고 건강한 사람을 배정하는 것이 관례이기 때문이다.

한편 티켓을 예약한 후 아무런 사전 통보 없이 탑승하지 않는 사람도 있기 때문에 (이것을 no-show라고 한다.) 항공사 측에서는 경영상의 이유로 좌석이 비어 있을 경우를 대비하여 좌석의 수보다 많은 예약을 받는 오버부킹(overbooking)을 하기도 한다.

만약 어느 항공사의 no-show율이 5 %이고 200명 정원인 비행기 노선이 있다면 항공사는 대략 10명 정도가 안 나올 것으로 예상하고 210명의 예약을 받게 된다. 예상대로 10명 이상이 공항에 나오지 않으면 다행이지만, 그렇지 않은 경우에는 어떻게 될까? 이러한 경우에는 리컨펌(reconfirm, 예약 내용을 다시 확인하는 것)한 사람이 우선이다. 그러나 리컨펌을 하였더라도 비행기 탑승에 필요한 시간 내에 좌석을 배정받아야 한다. 통상적으로 출발 시간 기준으로 적어도 국내선은 1시간, 국제선은 2시간 전에는 수속 및 탑승을 완료하여야 한다.

최근에는 no-show율이 낮아지는 추세여서 대부분의 항공사는 오버부킹을 거의 하고 있지 않지만 비행기를 타기 전까지 예약이 제대로 되었는지 확인하여 보고, 탑승 및 수속 시간을 지키는 것이 즐거운 여행이 될 수 있는 첫걸음이 될 것이다.

탐구하기 / 풀이

한 개의 주사위를 세 번 던지는 시행에서 1의 눈이 2번, 3번 나오는 경우는 각각 다음과 같다.

2번: ×○○, ○×○, ○○×

3번: ○○○

따라서 주어진 표의 빈칸을 채우면 다음과 같다.

1의 눈이 나오는 횟수			
0번	1번	2번	3번
×××	××○	×○○	○○○
	×○×	○×○	
	○××	○○×	

01 이항분포의 뜻

탐 구 하 기 / 주사위를 세 번 던질 때 나오는 눈의 관찰

한 개의 주사위를 세 번 던지는 시행에서 1의 눈이 나오면 ○표, 그 외의 눈이 나오면 ×표를 할 때, 다음 표를 완성하여 보자.

1의 눈이 나오는 횟수			
0번	1번	2번	3번
×××	××○	×○○	
	×○×	○×○	
	○××		

알 아 보 기 / 이항분포의 뜻을 알아보자.

1의 눈이 1번 나오는 경우

×	×	○
×	○	×
○	×	×

한 개의 주사위를 한 번 던질 때, 1의 눈이 나올 확률은 $\frac{1}{6}$이고, 1의 눈이 나오지 않을 확률은 $\frac{5}{6}$이다.

한 개의 주사위를 세 번 던질 때, 1의 눈이 나오는 횟수를 확률변수 X라고 하자. 이때, X의 값이 1이 되는 경우는 ${}_3C_1$, 즉 3가지가 있다.

주사위를 던질 때 각각의 결과는 서로 영향을 주지 않으므로 각 경우의 확률은

$$\frac{1}{6}\times\frac{5}{6}\times\frac{5}{6}=\frac{1}{6}\times\left(\frac{5}{6}\right)^2$$

따라서 X의 값이 1이 될 확률은

$$P(X=1)={}_3C_1\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)^2$$

일반적으로 1회의 시행에서 사건 A가 일어날 확률이 p이고, 이러한 시행을 독립적으로 n회할 때, 사건 A가 일어나는 횟수를 확률변수 X라고 하면 X는 0, 1, 2, ⋯, n의 값을 가진다. 이때, X의 확률분포는

$$P(X=x)={}_nC_x p^x(1-p)^{n-x} \text{ (단, } x=0, 1, 2, \cdots, n)$$

여기서 $1-p=q$라 하고, X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

$\sum_{x=0}^{n} {}_nC_x p^x q^{n-x}=(q+p)^n=1$

X	0	1	2	⋯	x	⋯	n	합계
$P(X=x)$	${}_nC_0 q^n$	${}_nC_1 pq^{n-1}$	${}_nC_2 p^2q^{n-2}$	⋯	${}_nC_x p^xq^{n-x}$	⋯	${}_nC_n p^n$	1

이와 같은 확률분포를 **이항분포**라 하고, 기호로

$$B(n,\ p)$$

와 같이 나타낸다.

이항분포 $B(n, p)$에서 B는 Binomial distribution의 첫 글자이다.

알아보기 / 해설

• 한 개의 주사위를 세 번 던질 때, 1의 눈이 나오는 횟수를 확률변수 X라고 하면 X가 가지는 값은 0, 1, 2, 3이다.

(i) $X=0$인 경우는 ×××의 1가지가 있다.

이때, 각각의 결과는 서로 영향을 주지 않으므로 확률은

$$\frac{5}{6}\times\frac{5}{6}\times\frac{5}{6}=\left(\frac{5}{6}\right)^3=1\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^0\left(\frac{5}{6}\right)^3$$

$$\therefore P(X=0)={}_3C_0\left(\frac{1}{6}\right)^0\left(\frac{5}{6}\right)^3$$

(ii) $X=1$인 경우는 ××○, ×○×, ○××의 3가지가 있고, 이들 각 경우의 확률은 $\frac{1}{6}\times\left(\frac{5}{6}\right)^2$이다.

따라서 확률은

$$P(X=1)={}_3C_1\left(\frac{1}{6}\right)^1\left(\frac{5}{6}\right)^2$$

(iii) $X=2$인 경우는 ×○○, ○×○, ○○×의 3가지가 있고, 이들 각 경우의 확률은 $\left(\frac{1}{6}\right)^2\times\frac{5}{6}$이다.

따라서 확률은

$$P(X=2)={}_3C_2\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^1$$

(iv) $X=3$인 경우는 ○○○의 1가지가 있다. 이때의 확률은

$$\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}=\left(\frac{1}{6}\right)^3=1\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{5}{6}\right)^0$$

$$\therefore P(X=3)={}_3C_3\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{5}{6}\right)^0$$

• 이항분포의 확률분포

$P(X=x)={}_nC_x p^xq^{n-x}(x=0, 1, 2, \cdots, n)$은 n과 p에 의하여 결정된다. (단, $q=1-p$)

따라서 Binomial distribution(이항분포)의 첫 글자 B를 사용하여 $B(n, p)$로 나타낸다.

여기서 n은 각각의 결과에 서로 영향을 주지 않는 시

| 보기 | 한 개의 주사위를 네 번 던질 때, 1의 눈이 나오는 횟수를 확률변수 X라고 하면, X의 확률분포는 이항분포 $\mathrm{B}\left(4,\ \frac{1}{6}\right)$을 따른다. 따라서 확률분포는

$$\mathrm{P}(X=x)={}_4\mathrm{C}_x\left(\frac{1}{6}\right)^x\left(\frac{5}{6}\right)^{4-x}\ (x=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4)$$

이고, 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	3	4	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{625}{1296}$	$\frac{500}{1296}$	$\frac{150}{1296}$	$\frac{20}{1296}$	$\frac{1}{1296}$	1

이항분포의 확률값을 계산할 때에는 이항분포표 또는 계산기나 컴퓨터를 이용하면 편리하다.

예를 들어 ${}_{10}\mathrm{C}_3(0.2)^3(0.8)^7$을 계산할 때, 부록에 있는 이항분포표에서 $n=10,\ x=3,\ p=0.2$일 때의 값을 찾으면 0.2013임을 알 수 있다.

n	x	p .05	.10	.20	.30	.95
5	0	.7738	.5905	.3277	.1681	.0000
	1	.2036	.3280	.4096	.3602	.0000
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
10	0	.5987	.3487	.1074	.0282	.0000
	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
	3	.0105	.0574	.2013	.2668	.0000
	4	.0010	.0112	.0881	.2001	.0000

또 계산기를 다음과 같은 순서대로 눌러 계산하면 0.201326592로 약 0.2013임을 알 수 있다.

스스로 하기 / 익힘책 107쪽 | 익힘책 108쪽 | 익힘책 109쪽

1 다음 이항분포의 확률분포를 표로 나타내어라.

(1) $\mathrm{B}\left(4,\ \frac{1}{2}\right)$ (2) $\mathrm{B}(5,\ 0.2)$

2 이항분포표를 이용하여 다음 값을 구하여라.

(1) ${}_{15}\mathrm{C}_5(0.4)^5(0.6)^{10}$ (2) ${}_{20}\mathrm{C}_6(0.3)^6(0.7)^{14}$

행의 시행 횟수를 나타내고, p는 한 번의 시행에서 어떤 사건이 일어날 확률을 나타낸다.

이를테면 한 개의 동전을 4번 던질 때, 앞면이 나오는 횟수를 확률변수 X라고 하면 동전을 던지는 것은 각각의 결과에 영향을 주지 않는 시행이고 이러한 시행의 횟수 $n=4$이며, 앞면이 나오는 확률 $p=\frac{1}{2}$이다.

그러므로 X의 확률분포는 이항분포 $\mathrm{B}\left(4,\ \frac{1}{2}\right)$이다.

• 확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}(n,\ p)$를 따르는 경우는 어떤 시행이 독립적으로 반복될 때이다. 그 예로는 주사위나 동전 등을 반복하여 던지는 경우, 사건이 일어난 후 시행 전의 상태로 되돌려 다시 시행하는 경우, 일정한 비율이 주어져 있는 경우 등이 있다.

이처럼 독립적으로 반복되는 시행의 특징은

(ⅰ) 같은 시행을 여러 번 반복한다.

(ⅱ) 각 시행에서 매회 어떤 사건이 일어날 확률이 일정하다.

(ⅲ) 각 시행의 결과는 다른 시행의 결과에 아무런 영향을 받지 않는다.

스스로 하기 / 풀이

1 (1) $\mathrm{B}\left(4,\ \frac{1}{2}\right)$에서 $n=4,\ p=\frac{1}{2}$이므로

$$\mathrm{P}(X=x)={}_4\mathrm{C}_x\left(\frac{1}{2}\right)^x\left(\frac{1}{2}\right)^{4-x}$$

(단, $x=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4$)

이고, 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	3	4	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$	1

(2) $\mathrm{B}(5,\ 0.2)$에서 $n=5,\ p=\frac{1}{5}$이므로

$$\mathrm{P}(X=x)={}_5\mathrm{C}_x\left(\frac{1}{5}\right)^x\left(\frac{4}{5}\right)^{5-x}$$

(단, $x=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$)

이고, 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	3	4	5	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1024}{3125}$	$\frac{256}{625}$	$\frac{128}{625}$	$\frac{32}{625}$	$\frac{4}{625}$	$\frac{1}{3125}$	1

2 (1) 이항분포표에서 $n=15,\ x=5,\ p=0.4$일 때의 값을 찾으면 **0.1859**임을 알 수 있다.

(2) 이항분포표에서 $n=20,\ x=6,\ p=0.3$일 때의 값을 찾으면 **0.1916**임을 알 수 있다.

함 께 하 기 / 익힘책 107쪽 | 익힘책 108쪽 | 익힘책 109쪽

1 확률변수 X가 이항분포 B(100, 0.8)을 따를 때, 다음 확률을 컴퓨터 소프트웨어를 이용하여 구하여라.

(1) $P(X=90)$ (2) $P(X\le 70)$

| 풀이 |

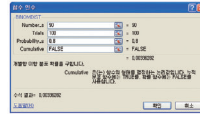
메뉴 표시줄에서 수식을 클릭하면 수식 도구 상자가 보여!

(1) 컴퓨터 소프트웨어를 이용하여 이항분포의 확률값을 구하는 순서는 다음과 같다.

1단계 수식 도구 상자에서 함수 삽입 아이콘을 클릭한다.

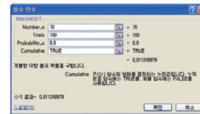
2단계 함수 마법사 대화 상자의 범주 선택에서 '통계', 함수 선택에서 'BINOMDIST'를 선택한 후 확인을 클릭하면 함수 인수 대화 상자가 나타난다.

3단계 함수 인수 대화 상자에서 Number_s에 '90', Trials에 '100', Probability_s에 '0.8'을 입력하고, Cumulative에 'FALSE'를 입력하면 이항분포의 확률을 보여준다.



$\therefore P(X=90)=0.00336282$

(2) 위의 **3단계**에서 Number_s에 '70', Trials에 '100', Probability_s에 '0.8'을 입력하고, Cumulative에 'TRUE'를 입력하면 이항분포의 누적 확률을 보여준다.



$\therefore P(X\le 70)=0.011248979$

스 스 로 하 기 / 익힘책 107쪽 | 익힘책 108쪽 | 익힘책 109쪽

3 다음 확률을 컴퓨터 소프트웨어를 이용하여 구하여라.

(1) 한 개의 주사위를 50번 던질 때, 짝수의 눈이 20번 나올 확률

(2) 각 면에 1부터 12까지의 수를 쓴 정십이면체를 100번 던질 때, 4의 배수가 30번 이하 나올 확률

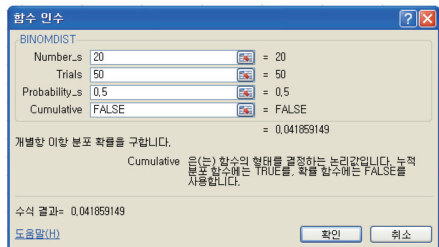
함께하기 / 해설

1 함수 BINOMDIST에 필요한 인수는 Number_s, Trials, Probability_s, Cumulative이다. Number_s는 확률변수 X가 가지는 값, 예를 들어 $P(X=90)$에서 90, $P(X\le 70)$에서 70을 뜻하고 Trials는 시행 횟수 100을 뜻한다. 또 Probability_s는 이항분포에서 일어날 확률로서 0.8을 뜻한다. Cumulative는 TRUE 또는 1을 입력하면 Number_s에 쓴 값까지의 누적 확률을 구한다는 뜻이고, FALSE 또는 0을 입력하면 Number_s에 쓴 값에 대한 확률을 구한다는 뜻이다.

(1)에서 $P(X=90)$은 $X=90$일 때의 확률만 구하는 것이므로 Cumulative에 FALSE를 입력하고, (2)에서 $P(X\le 70)$은 $X=0$부터 $X=70$까지의 누적 확률을 구하는 것이므로 Cumulative에 TRUE를 입력한다.

스스로 하기 / 풀이

3 (1) 한 개의 주사위를 한 번 던질 때, 짝수의 눈이 나올 확률은 $\frac{1}{2}\left(=0.5\right)$이다. 따라서 한 개의 주사위를 50번 던질 때, 짝수의 눈이 나오는 횟수를 확률변수 X라고 하면 X는 이항분포 B(50, 0.5)를 따른다. 이때, 짝수의 눈이 20번 나올 확률은 $P(X=20)$이므로 함께하기 1의 **1단계**와 **2단계**를 시행한 후 함수 인수 대화 상자에서 Number_s에 '20', Trials에 '50', Probability_s에 '0.5'를 입력하고, Cumulative에 'FALSE'를 입력한다.



$\therefore P(X=20)=\mathbf{0.041859149}$

(2) 정십이면체를 한 번 던질 때, 4의 배수가 나올 확률은 $\frac{3}{12}(=0.25)$이다. 따라서 정십이면체를 100번 던질 때, 4의 배수가 나오는 횟수를 확률변수 X라고 하면 X는 이항분포 B(100, 0.25)를 따른다.

02 이항분포의 평균과 표준편차

알 아 보 기 / 이항분포의 평균, 분산 및 표준편차를 구하여 보자.

확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}(3,\ p)$를 따를 때, 그 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다. (단, $q=1-p$)

X	0	1	2	3	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	q^3	$3pq^2$	$3p^2q$	p^3	1

여기서 평균 $\mathrm{E}(X)$와 분산 $\mathrm{V}(X)$를 구하면 다음과 같다.

$$\mathrm{E}(X)=0\times q^3+1\times 3pq^2+2\times 3p^2q+3\times p^3$$
$$=3pq^2+6p^2q+3p^3=3p(q+p)^2=3p$$
$$\mathrm{V}(X)=0^2\times q^3+1^2\times 3pq^2+2^2\times 3p^2q+3^2\times p^3-(3p)^2$$
$$=3p\{q(q+p)+3p(q+p)-3p\}=3pq$$

$q=1-p$이므로 $p+q=1$

일반적으로 이항분포의 평균과 표준편차는 다음과 같다.

이항분포의 평균, 분산 및 표준편차

확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}(n,\ p)$를 따르면

$\mathrm{E}(X)=np,\ \mathrm{V}(X)=npq,\ \sigma(X)=\sqrt{npq}$ (단, $q=1-p$)

| 보기 | 한 개의 주사위를 18번 던질 때, 1 또는 6의 눈이 나오는 횟수를 확률변수 X라고 하면, X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(18,\ \frac{1}{3}\right)$을 따르므로

$\mathrm{E}(X)=18\times\frac{1}{3}=6,\ \mathrm{V}(X)=18\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=4,\ \sigma(X)=2$

$n=18$이고, 주사위를 한 번 던질 때 1 또는 6의 눈이 나올 확률 $p=\frac{1}{3}$이다.

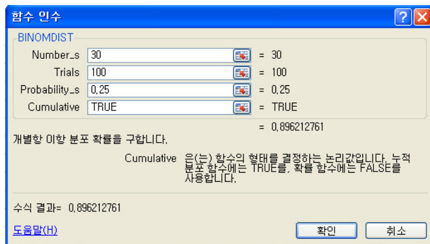
스 스 로 하 기 / 익힘책 107쪽 | 익힘책 108쪽 | 익힘책 109쪽

1 다음 이항분포의 평균, 분산 및 표준편차를 구하여라.

(1) $\mathrm{B}\left(64,\ \frac{1}{2}\right)$　　(2) $\mathrm{B}\left(400,\ \frac{1}{5}\right)$

2 한 개의 주사위를 36번 던져서 짝수의 눈이 나오는 횟수를 확률변수 X라고 할 때, X의 평균과 표준편차를 구하여라.

이때, 4의 배수가 30번 이하 나올 확률은 $\mathrm{P}(X\le 30)$이므로 함께하기 **1**의 **1단계**와 **2단계**를 시행한 후 함수 인수 대화 상자에서 Number_s에 '30', Trials에 '100', Probability_s에 '0.25'를 입력하고 Cumulative에 'TRUE'를 입력한다.



$\therefore \mathrm{P}(X\le 30)=\mathbf{0.896212761}$

알아보기 / 해설

확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}(2,\ p)$를 따를 때, 그 확률분포의 평균과 분산을 알아보자. (단, $q=1-p$)

X	0	1	2	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	q^2	$2pq$	p^2	1

$$\therefore \mathrm{E}(X)=0\times q^2+1\times 2pq+2\times p^2$$
$$=2p(q+p)=2p$$
$$\mathrm{V}(X)=0^2\times q^2+1^2\times 2pq+2^2\times p^2-(2p)^2$$
$$=2pq+4p^2-4p^2=2pq$$

스스로 하기 / 풀이

1 (1) $n=64,\ p=\frac{1}{2}$이므로

$\mathrm{E}(X)=np=64\times\frac{1}{2}=\mathbf{32}$

$\mathrm{V}(X)=npq=64\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\mathbf{16}$

$\sigma(X)=\sqrt{16}=\mathbf{4}$

(2) $n=400,\ p=\frac{1}{5}$이므로

$\mathrm{E}(X)=np=400\times\frac{1}{5}=\mathbf{80}$

$\mathrm{V}(X)=npq=400\times\frac{1}{5}\times\frac{4}{5}=\mathbf{64}$

$\sigma(X)=\sqrt{64}=\mathbf{8}$

2 $n=36$이고, 한 개의 주사위를 던질 때 짝수의 눈이 나올 확률 $p=\frac{1}{2}$이다.

확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(36,\ \frac{1}{2}\right)$을 따르므로

$\mathrm{E}(X)=np=36\times\frac{1}{2}=\mathbf{18}$

$\sigma(X)=\sqrt{npq}=\sqrt{36\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}}=\sqrt{9}=\mathbf{3}$

함께하기 / 해설

1 무엇을 확률변수 X로 놓을 것인지를 생각하는 것이 중요하다.

한편 확률을 계산할 때, 사용하는 도구마다 약간의 오차가 있을 수 있다. 풀이에서 주어진 값대로 계산하면

$$\begin{aligned} P(X \geq 81) &= 82 \times 0.01569 \times 0.05 \\ &\quad + 1 \times 0.01491 \\ &= 0.079239 \end{aligned}$$

이다.

그러나 컴퓨터 소프트웨어로 구한 값은

$1 - 0.920767491 = 0.079232509$

이다. 이러한 차이는 큰 문제가 되지 않는다.

03 이항분포의 활용

함께하기 /

익힘책 107쪽 | 익힘책 108쪽 | 익힘책 109쪽

1 어느 항공 노선을 예약한 사람이 사전 통보 없이 탑승하지 않는 경우가 20명 중 1명꼴이라고 한다. 좌석 수 80에 대하여 82명이 좌석을 예약한 경우 좌석이 부족하게 될 확률을 구하여라.

(단, $(0.95)^{81} = 0.01569$, $(0.95)^{82} = 0.01491$로 계산한다.)

| 풀이 |

예약한 사람이 탑승할 확률은 0.95이다. 그러므로 예약한 82명 중에서 탑승하는 사람의 수를 확률변수 X라고 하면, X의 확률분포는 이항분포 $B(82,\ 0.95)$이다. 즉

$$P(X = x) = {}_{82}C_x (0.95)^x (0.05)^{82-x} \quad (x = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 82)$$

한편 좌석이 부족하게 되는 경우는 $X \geq 81$일 때이므로

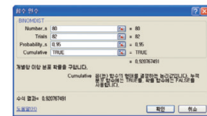
$$\begin{aligned} P(X \geq 81) &= P(X = 81) + P(X = 82) \\ &= {}_{82}C_{81}(0.95)^{81}(0.05) + {}_{82}C_{82}(0.95)^{82} \\ &= 82 \times 0.01569 \times 0.05 + 1 \times 0.01491 \\ &\fallingdotseq \mathbf{0.079} \end{aligned}$$

| 다른 풀이 |

$P(X \geq 81) = 1 - P(X \leq 80)$

한편 $P(X \leq 80)$을 컴퓨터 소프트웨어로 소수 셋째 자리까지 구하면 0.921이므로

$$\begin{aligned} P(X \geq 81) &\fallingdotseq 1 - 0.921 \\ &= 0.079 \end{aligned}$$



스스로 하기 /

익힘책 107쪽 | 익힘책 108쪽 | 익힘책 109쪽

1 어떤 소극장의 공연을 예약한 사람 중 사전 통보 없이 오지 않는 사람이 10 %라고 한다. 좌석 수 60에 대하여 62명이 좌석을 예약한 경우 좌석이 부족하게 될 확률을 구하여라.

(단, $(0.9)^{61} = 0.0016$, $(0.9)^{62} = 0.0015$로 계산한다.)

스스로 하기 / 풀이

1 예약한 사람이 공연을 볼 확률은 0.9이다. 그러므로 예약한 62명 중에서 공연을 보는 사람의 수를 확률변수 X라고 하면, X의 확률분포는 이항분포 $B(62,\ 0.9)$이다. 즉

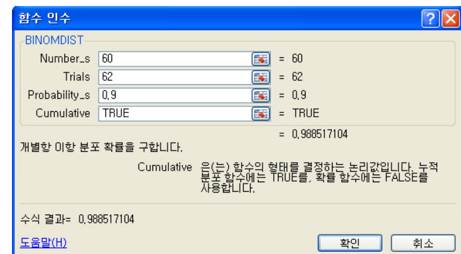
$$P(X = x) = {}_{62}C_x (0.9)^x (0.1)^{62-x} \quad (x = 0,\ 1,\ \cdots,\ 62)$$

한편 좌석이 부족하게 되는 경우는 $X \geq 61$일 때이므로

$$\begin{aligned} P(X \geq 61) &= P(X = 61) + P(X = 62) \\ &= {}_{62}C_{61}(0.9)^{61}(0.1) + {}_{62}C_{62}(0.9)^{62} \\ &= 62 \times 0.0016 \times 0.1 + 1 \times 0.0015 \\ &= \mathbf{0.01142} \end{aligned}$$

| 다른 풀이 |

$P(X \geq 61) = 1 - P(X \leq 60)$이므로 다음과 같이 컴퓨터 소프트웨어로 $P(X \leq 60)$을 소수 다섯째 자리까지 구하면 0.98852이다.



$\therefore P(X \geq 61) \fallingdotseq 1 - 0.98852 = 0.01148$

문제의 조건에 주어진 값이 반올림한 값이므로 풀이의 결과값과 오차가 생길 수 있다.

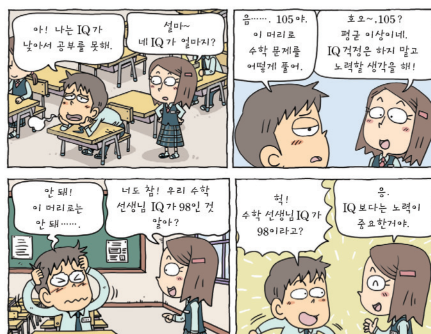
129

3 정규분포

학습 목표
- 정규분포의 뜻을 이해한다.
- 정규분포곡선의 성질을 이해한다.

2 통계와 그 활용

다 가 서 기 / **성공의 99 %는 노력의 결과**



지능 지수(IQ)는 지능 검사의 결과로 지능의 정도를 총괄하여 하나의 수치로 나타낸 것이다. 이때, 지능 지수는 평균(m)이 100이고, 표준편차(σ)가 15인 정규분포를 따르도록 한다. 즉, 지능 지수가 85~115이면 평균으로부터 1시그마(σ) 안의 범위에 있는 보통의 지능 지수이다.

세상에는 분명 천부적인 재능을 타고난 사람이 있다. 그러나 그들도 모든 면에서 뛰어난 것은 아니다. 어떤 면에서 뛰어난 사람은 자기의 부족한 면을 찾을 줄 알아야 하고, 어떤 면에서 부족한 사람은 자기의 뛰어난 점을 찾을 줄 알아야 한다.

에디슨은 "성공은 1 %의 영감과 99 %의 노력의 결과이다."라고 말하였다.

소단원의 학습 목표

1. 정규분포의 뜻을 알고, 정규분포곡선의 성질을 이해한다.
2. 표준정규분포의 뜻을 알고, 표준정규분포표를 활용할 수 있다.
3. 표준화의 뜻을 알고, 이를 활용할 수 있다.

여기서 배우는 용어 및 기호

정규분포, $\mathrm{N}(m, \sigma^2)$, $\mathrm{N}(0, 1)$, 표준화

다가서기 / 해설

IQ는 Intelligence Quotient의 약자로, 사람의 지적 능력을 수치적으로 측정하는 시험에 의해 산출되는 점수이다. 이것을 지능 지수라고도 한다.

IQ는 독일의 윌리엄 스턴(William Stern)이 1912년에 어린이들의 인지 능력을 알아보기 위하여 제안한 것을 시초로 볼 수 있다.

한편 미국에서는 비네(Alfred Binet)와 터만(Terman)이 각각 1909년, 1919년에 지능을 정의하였고, 비네의 지능 검사 도구를 이용하여 1920년대 뉴욕에서는 IQ를 기반으로 하여 영재 아동을 판별하였다. 근래에 많이 쓰이는 지능 검사 도구는 웩슬러(Wechsler)가 제안한 것을 통계적으로 일반화시킨 것이다.

IQ에는 비율 지능(ratio IQ)과 편차 지능(deviation IQ)이 있다. 일반적으로 말하는 지능 지수는 편차 지능이다.

편차 지능의 경우는 보통 표준편차를 16으로 사용하는데, 경우에 따라서는 15 또는 24를 사용하기도 한다. 웩슬러 지능 검사에서는 표준편차를 15로 사용하고, 멘사에서는 24를 사용한다.

지능 지수를 말할 때에 표준편차 없이 수치를 정확히 비교할 수 없으므로 지능 지수 검사 도구의 표준편차를 밝히는 것은 중요하다.

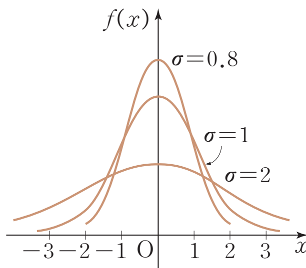
현대에는 지능에 대하여 단일한 방법으로 표현할 수 없다는 주장이 설득력을 얻고 있는데 그 대표적인 것이 가드너(Gardner)의 다중지능(Multiple Intelligence)이론으로서 지능에는 언어적 지능, 음악적 지능, 논리 · 수학적 지능, 공간적 지능, 신체 · 운동적 지능, 대인 관계 지능, 개인 내적 지능, 자연 탐구 지능, 영성 · 실존적 지능이 있다고 한다.

알아보기 / 해설

• 관찰 또는 측정에는 항상 오차가 따른다. 이를테면 두 지점 사이의 거리를 측정할 때, 측정하는 사람에 따라서 결과에 약간의 차이가 있을 수 있고, 또 같은 사람이 측정하더라도 여러 번 측정하면 그때마다 결과가 달라질 수 있다.
(오차)=(측정값)−(참값)이고, 참값은 고정된 값이므로 결국 오차의 분포는 측정값의 분포임을 알 수 있다.
측정값의 분포를 알아볼 때, 측정값이 많을수록 더 좋은 결과를 얻을 수 있다.

• 과거에는 자료를 그림으로 나타내었을 때, 종 모양의 곡선이 나타나지 않으면 이것을 abnormal이라고 하였다.
이에 대하여 종 모양의 곡선으로 나타나는 자료를 normal이라고 생각한 것에서 정규분포(normal distribution)라는 이름이 유래되었다.

• 정규분포곡선은 m과 σ의 값에 따라 그 모양이 정해진다.
(i) $m=0$이고 σ가 변할 때

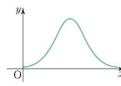


표준편차 σ는 자료들이 평균을 중심으로 흩어진 정도를 나타내므로 표준편차 σ가 커질수록 곡선의 높이는 낮아지고 양쪽으로 퍼지며, 표준편차 σ가 작아질수록 곡선의 높이는 높아지고 가운데로 몰린다.

130

01 정규분포의 뜻

알아보기 / 정규분포의 뜻과 성질을 알아보자.



농작물의 무게, 사람의 키, 전구의 수명 시간 등의 측정값은 어떤 연속하는 범위 안에서 값을 가지게 된다. 또 이들에 대한 도수분포다각형은 자료의 수가 많을 때, 종 모양의 곡선에 가까워진다.

일반적으로 확률변수 X의 분포를 나타내는 그래프의 식이

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}\ (-\infty<x<\infty)$$

일 때, 확률변수 X는 평균이 m이고 분산이 σ^2인 **정규분포**를 따른다고 하고, 이것을 기호로

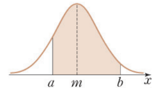
$$\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$$

과 같이 나타낸다. 또 그 그래프를 정규분포곡선 또는 정규곡선이라고 한다.

정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$에서 N은 Normal distribution의 첫 글자이다.

확률변수 X가 정규분포를 따를 때, 정규분포곡선과 x축 사이의 넓이는 1이다.

또 X의 값이 구간 $[a,\ b]$에 있을 확률 $\mathrm{P}(a\le X\le b)$는 오른쪽 그림에서 색칠한 부분의 넓이이다.

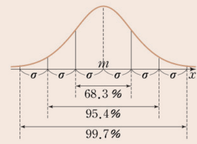


정규분포의 확률변수 X는 이항분포와 같이 이산적인 값을 가지지 않고, 연속적인 값을 가진다.

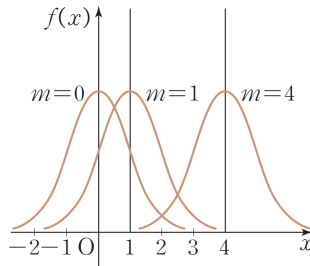
일반적으로 정규분포곡선의 성질은 다음과 같다.

정규분포곡선의 성질

(1) m을 중심으로 좌우 대칭인 종 모양이다.
(2) 곡선과 x축 사이의 넓이는 1이다.
(3) 곡선과 x축 그리고
① 구간 $(m-\sigma,\ m+\sigma)$ 사이의 넓이는 전체의 68.3 %이다.
② 구간 $(m-2\sigma,\ m+2\sigma)$ 사이의 넓이는 전체의 95.4 %이다.
③ 구간 $(m-3\sigma,\ m+3\sigma)$ 사이의 넓이는 전체의 99.7 %이다.



(ii) $\sigma=1$이고 m이 변할 때



평균 m이 중심이므로 m이 변하면 곡선의 모양은 변하지 않고 대칭축의 위치만 바뀐다. 즉, 곡선만 좌우로 평행이동한다.

02 표준정규분포

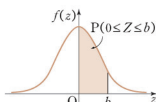
알 아 보 기 / 표준정규분포의 뜻을 알아보자.

평균이 0, 표준편차가 1인 정규분포를 표준정규분포라 하고, 기호로

$$\mathrm{N}(0,\ 1)$$

과 같이 나타낸다.

확률변수 Z가 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따를 때, Z가 구간 $(0,\ b)$에 속할 확률 $\mathrm{P}(0\le Z\le b)$는 오른쪽 그림에서 색칠한 부분의 넓이와 같다.



예를 들어 부록에 있는 표준정규분포표에서 다음을 알 수 있다.

$\mathrm{P}(0\le Z\le 1.96)=0.4750$

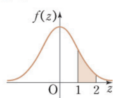
$\mathrm{P}(0\le Z\le 2)=0.4772$

z	0	1	6	9
0.0	.0000	.0040	.0239	.0359
0.1	.0398	.0438	.0636	.0753
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
1.9	.4713	.4719	.4750	.4767
2.0	.4772	.4778	.4803	.4817

| 보기 | 확률변수 Z가 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따를 때

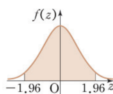
$\mathrm{P}(0\le Z\le 1)=0.3413$

(1) $\mathrm{P}(1\le Z\le 2)$
$=\mathrm{P}(0\le Z\le 2)-\mathrm{P}(0\le Z\le 1)$
$=0.4772-0.3413$
$=0.1359$



$\mathrm{P}(Z\le 0)=\mathrm{P}(Z\ge 0)$
$=0.5$
$\mathrm{P}(Z\le -a)=\mathrm{P}(Z\ge a)$

(2) $\mathrm{P}(|Z|\le 1.96)$
$=\mathrm{P}(-1.96\le Z\le 1.96)$
$=2\times \mathrm{P}(0\le Z\le 1.96)$
$=2\times 0.4750=0.95$



스 스 로 하 기 / 익힘책 111쪽 | 익힘책 112쪽 | 익힘책 113쪽

1 확률변수 Z가 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따를 때, 표준정규분포표를 이용하여 다음 확률을 구하여라.

(1) $\mathrm{P}(Z\le 2)$ (2) $\mathrm{P}(|Z|\le 2.58)$

(3) $\mathrm{P}(Z\le -1)$ (4) $\mathrm{P}(Z\ge -1.96)$

알아보기 / 해설

• 표준정규분포는 평균이 0이므로 그 분포곡선 $y=f(z)$의 그래프는 $z=0$에 대하여 대칭이다.
이 성질을 이용하면 문제를 쉽게 해결할 수 있다.
즉, 다음 성질을 이용한다.

(1) $\mathrm{P}(Z\le 0)=\mathrm{P}(Z\ge 0)=0.5$

(2) $\mathrm{P}(Z\le -a)=\mathrm{P}(Z\ge a)$

• $a>0,\ b>0,\ a\le b$일 때

(1) $\mathrm{P}(a\le z\le b)=\mathrm{P}(0\le z\le b)-\mathrm{P}(0\le z\le a)$

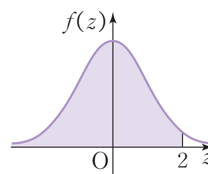
(2) $\mathrm{P}(-a\le z\le b)=\mathrm{P}(0\le z\le a)+\mathrm{P}(0\le z\le b)$

(3) $\mathrm{P}(z\le a)=0.5+\mathrm{P}(0\le z\le a)$

(4) $\mathrm{P}(z\ge a)=0.5-\mathrm{P}(0\le z\le a)$

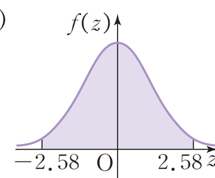
스스로 하기 / 풀이

1 (1)



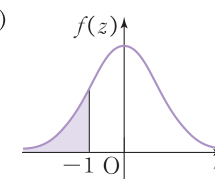
$\mathrm{P}(Z\le 2)$
$=\mathrm{P}(Z\le 0)+\mathrm{P}(0\le Z\le 2)$
$=0.5+0.4772=\mathbf{0.9772}$

(2)



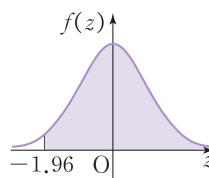
$\mathrm{P}(|Z|\le 2.58)$
$=\mathrm{P}(-2.58\le Z\le 2.58)$
$=2\times \mathrm{P}(0\le Z\le 2.58)$
$=2\times 0.4951=\mathbf{0.9902}$

(3)



$\mathrm{P}(Z\le -1)$
$=\mathrm{P}(Z\ge 1)$
$=\mathrm{P}(Z\ge 0)-\mathrm{P}(0\le Z\le 1)$
$=0.5-0.3413=\mathbf{0.1587}$

(4)



$\mathrm{P}(Z\ge -1.96)=\mathrm{P}(Z\le 1.96)$
$=\mathrm{P}(Z\le 0)+\mathrm{P}(0\le Z\le 1.96)$
$=0.5+0.4750$
$=\mathbf{0.9750}$

132

알 아 보 기 / 표준화의 뜻을 알아보고, 이를 활용하여 보자.

확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$을 따를 때, 확률변수 Z를

$$Z=\frac{X-m}{\sigma}$$

이라고 하면 Z의 평균과 분산은 각각 $\mathrm{E}(Z)=0$, $\mathrm{V}(Z)=1$이다. 즉, 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

이와 같이 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$을 따르는 확률변수 X를 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르는 확률변수 Z로 바꾸는 것을 **표준화**라고 한다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

정규분포의 표준화

확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$을 따를 때, 확률변수 Z를

$$Z=\frac{X-m}{\sigma}$$

이라고 하면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

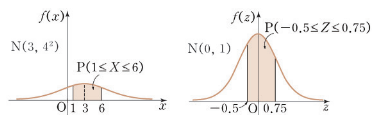
| 참고 | 일반적인 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$에 대한 분포표가 주어져 있지 않으므로 표준화하여 확률을 구한다.

| 보기 | 확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(3,\ 4^2)$을 따를 때,

$$Z=\frac{X-3}{4}$$

이라고 하면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$$\begin{aligned}\therefore \mathrm{P}(1\le X\le 6)&=\mathrm{P}\left(\frac{1-3}{4}\le\frac{X-3}{4}\le\frac{6-3}{4}\right)\\&=\mathrm{P}(-0.5\le Z\le 0.75)\\&=\mathrm{P}(0\le Z\le 0.5)+\mathrm{P}(0\le Z\le 0.75)\\&=0.1915+0.2734\\&=0.4649\end{aligned}$$



알아보기 / 해설

- 확률변수 $aX+b$의 평균과 분산은 각각 다음과 같다.

  $\mathrm{E}(aX+b)=a\mathrm{E}(X)+b$

  $\mathrm{V}(aX+b)=a^2\mathrm{V}(X)$

  그러므로 $\mathrm{E}(X)=m$, $\mathrm{V}(X)=\sigma^2$일 때, 확률변수 $Z=\dfrac{X-m}{\sigma}=\dfrac{1}{\sigma}X-\dfrac{m}{\sigma}$의 평균과 분산은 각각 다음과 같다.

  $$\mathrm{E}(Z)=\frac{1}{\sigma}\mathrm{E}(X)-\frac{m}{\sigma}=\frac{1}{\sigma}m-\frac{m}{\sigma}=0$$

  $$\mathrm{V}(Z)=\left(\frac{1}{\sigma}\right)^2\mathrm{V}(X)=\frac{1}{\sigma^2}\sigma^2=1$$

- 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$을 따르는 확률변수 X를 표준화하는 이유는 다음과 같다.

  정규분포를 따르는 확률변수 X는 정규분포곡선과 x축 사이의 넓이를 이용하여 구한다. 그러나 m과 σ의 값에 따라 곡선의 모양이 달라지기 때문에 확률을 구하기 위해 그 넓이를 일일이 계산해야 하는 번거로움이 있다. 따라서 확률을 보다 쉽게 구하기 위해 하나의 기준을 정할 필요가 있었고 그것이 정규분포의 표준화인 것이다.

  또한 정규분포를 따르는 확률변수를 표준화하면 여러 가지 확률변수를 비교할 때에도 편리하다.

참고 | 정규분포곡선의 성질

확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$을 따를 때, 다음을 알 수 있다.

(i) $\mathrm{P}(|X-m|<\sigma)=0.6826$

$$\begin{aligned}&|X-m|<\sigma\\&\iff m-\sigma<X<m+\sigma\\&\iff \frac{m-\sigma-m}{\sigma}<\frac{X-m}{\sigma}<\frac{m+\sigma-m}{\sigma}\\&\iff -1<Z<1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore \mathrm{P}(|X-m|<\sigma)&=\mathrm{P}(-1<Z<1)\\&=2\times\mathrm{P}(0<Z<1)\\&=2\times0.3413=0.6826\end{aligned}$$

(ii) $\mathrm{P}(|X-m|<2\sigma)=0.9544$

$$\begin{aligned}|X-m|<2\sigma &\iff m-2\sigma<X<m+2\sigma\\&\iff -2<Z<2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore \mathrm{P}(|X-m|<2\sigma)&=\mathrm{P}(-2<Z<2)\\&=2\times\mathrm{P}(0<Z<2)\\&=2\times0.4772=0.9544\end{aligned}$$

(iii) $\mathrm{P}(|X-m|<3\sigma)=0.9974$

$$|X-m|<3\sigma \iff -3<Z<3$$

함께하기 /

익힘책 111쪽 | 익힘책 112쪽 | 익힘책 113쪽

1 확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(180,\ 50^2)$을 따를 때, 다음 확률을 컴퓨터 소프트웨어를 이용하여 구하여라.

(1) $\mathrm{P}(X \le 270)$　　　　(2) $\mathrm{P}(150 \le X \le 270)$

| 풀이 |

(1) **1단계** 수식 도구 상자에서 함수 삽입 아이콘을 클릭하면 함수 마법사 대화 상자가 나타난다.

2단계 함수 마법사 대화 상자의 범주 선택에서 '통계', 함수 선택에서 'NORMDIST'를 선택한 후 확인을 클릭하면 함수 인수 대화 상자가 나타난다.

3단계 함수 인수 대화 상자에서 X에 '270', Mean에 '180', Standard_dev에 '50'을 입력하고, Cumulative에 'TRUE'를 입력하면 정규분포의 확률을 보여준다.

$\therefore \mathrm{P}(X \le 270) = 0.964069681$

(2) $\mathrm{P}(150 \le X \le 270) = \mathrm{P}(X \le 270) - \mathrm{P}(X < 150)$이다.

그런데 $\mathrm{P}(X \le 270)$은 (1)에서 구하였으므로 $\mathrm{P}(X < 150)$을 구하면 된다. 위의 3단계에서 X에 '150'을 입력하고, 나머지 칸은 (1)과 같이 입력하면 정규분포의 확률을 보여준다.

$\therefore \mathrm{P}(X < 150) = 0.274253118$

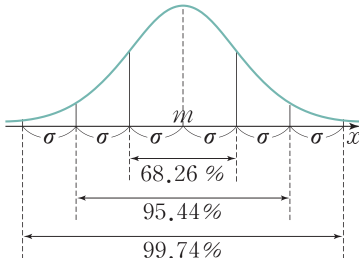
$\therefore \mathrm{P}(150 \le X \le 270) = 0.964069681 - 0.274253118 = 0.689816563$

| 다른 풀이 |

수식 입력창에 다음과 같이 입력하고, Enter 키를 누르면 $\mathrm{P}(150 \le X \le 270)$의 값을 구할 수 있다.

```
=NORMDIST(270,180,50,TRUE)-NORMDIST(150,180,50,TRUE)
```

$$\therefore \mathrm{P}(|X-m|<3\sigma) = \mathrm{P}(-3<Z<3)$$
$$= 2\times \mathrm{P}(0<Z<3)$$
$$= 2\times 0.4987 = 0.9974$$



즉, 자료 전체의 약 68.26 %는 평균으로부터 $\pm\sigma$ 이내에 분포되어 있고, 약 95.44 %는 평균으로부터 $\pm 2\sigma$ 이내에 분포되어 있으며, 약 99.74 %는 평균으로부터 $\pm 3\sigma$ 이내에 분포되어 있다.

함께하기 / 해설

1 표준정규분포표를 이용하여 풀 수도 있다.

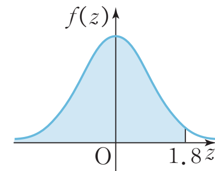
확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(180, 50^2)$을 따를 때,

$$Z = \frac{X-180}{50}$$

이라고 하면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

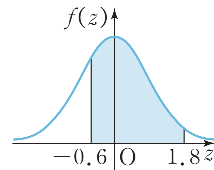
(1) $\mathrm{P}(X \le 270)$

$$= \mathrm{P}\left(\frac{X-180}{50} \le \frac{270-180}{50}\right)$$
$$= \mathrm{P}(Z \le 1.8)$$
$$= 0.5 + \mathrm{P}(0 \le Z \le 1.8)$$
$$= 0.5 + 0.4641$$
$$= 0.9641$$



(2) $\mathrm{P}(150 \le X \le 270)$

$$= \mathrm{P}\left(\frac{150-180}{50} \le \frac{X-180}{50} \le \frac{270-180}{50}\right)$$
$$= \mathrm{P}(-0.6 \le Z \le 1.8)$$
$$= \mathrm{P}(-0.6 \le Z \le 0) + \mathrm{P}(0 \le Z \le 1.8)$$
$$= \mathrm{P}(0 \le Z \le 0.6) + \mathrm{P}(0 \le Z \le 1.8)$$
$$= 0.2257 + 0.4641$$
$$= 0.6898$$



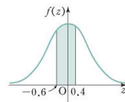
2 어떤 종류의 음료수 300캔 각각에 들어 있는 내용물의 용량은 평균이 190 mL, 표준편차가 5 mL인 정규분포를 따른다고 한다. 다음 물음에 답하여라.

(1) 용량이 187 mL 이상 192 mL 이하인 캔은 전체의 약 몇 %인가?

(2) 용량이 193 mL 이상인 캔은 약 몇 개인가?

풀이

캔에 들어 있는 내용물의 용량을 확률변수 X (mL) 라고 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(190,\ 5^2)$을 따른다. 이때, $Z=\dfrac{X-190}{5}$에서 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.



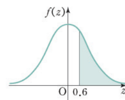
(1) $\mathrm{P}(187\leq X\leq 192)=\mathrm{P}\left(\dfrac{187-190}{5}\leq Z\leq \dfrac{192-190}{5}\right)$

$=\mathrm{P}(-0.6\leq Z\leq 0.4)$

$=\mathrm{P}(0\leq Z\leq 0.6)+\mathrm{P}(0\leq Z\leq 0.4)$

$=0.2257+0.1554=0.3811$

따라서 용량이 187 mL 이상 192 mL 이하인 캔은 전체의 **약 38 %**이다.



(2) $\mathrm{P}(X\geq 193)=\mathrm{P}\left(Z\geq \dfrac{193-190}{5}\right)$

$=\mathrm{P}(Z\geq 0.6)$

$=0.5-\mathrm{P}(0\leq Z\leq 0.6)$

$=0.5-0.2257=0.2743$

이때, $300\times 0.2743=82.29$이므로 용량이 193 mL 이상인 캔의 개수는 **약 82개**이다.

스스로 하기 / 익힘책 111쪽 | 익힘책 112쪽 | 익힘책 113쪽

2 확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(50,\ 10^2)$을 따를 때, 다음을 구하여라.

(1) $\mathrm{P}(X\geq 50)$ (2) $\mathrm{P}(60\leq X\leq 75)$

(3) $\mathrm{P}(45\leq X\leq 65)$ (4) $\mathrm{P}(X<55)$

3 어느 학교 학생 150명의 수학 성적은 평균 60점, 표준편차 10점인 정규분포를 따른다고 한다. 다음 물음에 답하여라.

(1) 성적이 52점 이상 70점 이하인 학생은 전체의 약 몇 %인가?

(2) 성적이 80점 이상인 학생은 약 몇 명인가?

함께하기 / 해설

2 특정한 범위에 포함되는 캔의 백분율이나 캔의 개수를 구하기 위해서는 먼저 확률변수 X를 표준화하여 표준정규분포표 또는 소프트웨어를 이용하여 그 범위에 속할 확률을 구한다.

스스로 하기 / 풀이

2 확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(50,\ 10^2)$을 따르므로 $Z=\dfrac{X-50}{10}$이라고 하면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

(1) $\mathrm{P}(X\geq 50)$

$=\mathrm{P}\left(\dfrac{X-50}{10}\geq \dfrac{50-50}{10}\right)$

$=\mathrm{P}(Z\geq 0)=\mathbf{0.5}$

(2) $\mathrm{P}(60\leq X\leq 75)$

$=\mathrm{P}\left(\dfrac{60-50}{10}\leq \dfrac{X-50}{10}\leq \dfrac{75-50}{10}\right)$

$=\mathrm{P}(1\leq Z\leq 2.5)$

$=\mathrm{P}(0\leq Z\leq 2.5)-\mathrm{P}(0\leq Z\leq 1)$

$=0.4938-0.3413$

$=\mathbf{0.1525}$

(3) $\mathrm{P}(45\leq X\leq 65)$

$=\mathrm{P}\left(\dfrac{45-50}{10}\leq \dfrac{X-50}{10}\leq \dfrac{65-50}{10}\right)$

$=\mathrm{P}(-0.5\leq Z\leq 1.5)$

$=\mathrm{P}(-0.5\leq Z\leq 0)+\mathrm{P}(0\leq Z\leq 1.5)$

$=\mathrm{P}(0\leq Z\leq 0.5)+\mathrm{P}(0\leq Z\leq 1.5)$

$=0.1915+0.4332$

$=\mathbf{0.6247}$

(4) $\mathrm{P}(X<55)$

$=\mathrm{P}\left(\dfrac{X-50}{10}<\dfrac{55-50}{10}\right)$

$=\mathrm{P}(Z<0.5)$

$=\mathrm{P}(Z\leq 0)+\mathrm{P}(0\leq Z<0.5)$

$=0.5+0.1915=\mathbf{0.6915}$

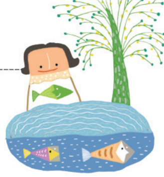
3 각 학생의 수학 성적을 확률변수 X라고 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(60,\ 10^2)$을 따른다. 이때, $Z=\dfrac{X-60}{10}$에서 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

(1) $\mathrm{P}(52\leq X\leq 70)$

$=\mathrm{P}\left(\dfrac{52-60}{10}\leq Z\leq \dfrac{70-60}{10}\right)$

4 통계 조사와 그 활용

학습 목표
- 간단한 통계 조사의 결과를 해석할 수 있다.



다 가 서 기 / **과녁의 중심 찾기**

양궁 과녁판의 뒤쪽에서 과녁의 중심을 찾는 것은 어려운 일이다. 그러나 과녁판에 꽂힌 화살을 중심으로 원을 그리면 과녁의 중심이 그 원 안에 있을 확률이 높다. 그리고 화살이 많이 있을수록 중심을 찾을 확률은 더 높아진다.

통계적 추정은 이와 같이 꽂힌 화살(표본)을 이용하여 과녁판의 뒤쪽에서 과녁의 중심(모평균)을 찾는 것과 같다.

소단원의 학습 목표

1. 전수조사와 표본조사의 뜻을 이해한다.
2. 모집단과 표본의 뜻을 이해한다.
3. 임의추출의 뜻과 방법을 안다.
4. 모평균 및 표본평균의 뜻을 알고, 표본평균의 분포를 이해한다.
5. 모평균을 추정하고, 그 결과를 해석할 수 있다.
6. 모비율 및 표본비율의 뜻을 알고, 표본비율의 분포를 이해한다.
7. 모비율을 추정하고, 그 결과를 해석할 수 있다.

여기서 배우는 용어 및 기호

모집단, 전수조사, 표본, 표본조사, 임의추출, 모평균, 표본평균, 구간추정, 모비율, 표본비율

$=\mathrm{P}(-0.8\le Z\le 1)$

$=\mathrm{P}(0\le Z\le 0.8)+\mathrm{P}(0\le Z\le 1)$

$=0.2881+0.3413$

$=0.6294$

따라서 성적이 52점 이상 70점 이하인 학생은 전체의 약 **63 %**이다.

(2) $\mathrm{P}(X\ge 80)=\mathrm{P}\left(Z\ge \dfrac{80-60}{10}\right)$

$=\mathrm{P}(Z\ge 2)$

$=0.5-\mathrm{P}(0\le Z\le 2)$

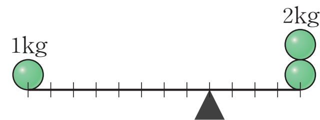
$=0.5-0.4772$

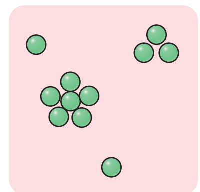
$=0.0228$

이때, $150\times 0.0228=3.42$이므로 성적이 80점 이상인 학생은 **약 3명**이다.

다가서기 / 해설

다음 그림과 같은 시소에서 무게가 1 kg인 구슬과 2 kg인 구슬 사이를 2:1로 내분하는 점에 받침대를 놓으면 평형을 이룬다는 것을 알 수 있다.





그러면 오른쪽 그림과 같이 분포되어 있는 구슬들의 중심은 어디일까?
이처럼 중심을 찾는 것은 어려운 일이지만 불가능한 일도 아니다. 통계적 추정은 이와 같이 어려운 일을 가능하게 해주는 한 가지 강력한 수단이다.

01 표본조사

탐 구 하 기 / 합리적인 설문 조사 방법

개교기념일 행사에 대한 전교생의 의견을 알아보기 위해 100명을 뽑아 설문 조사를 하려고 한다. 다음 중 어느 것이 더 합리적인 방법인지 말하고, 그 이유를 설명하여 보자.

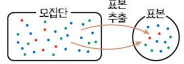
(1) 특정한 학년에서만 뽑는다.
(2) 각 학년에서 골고루 뽑는다.

알 아 보 기 / 모집단과 표본의 뜻을 알아보자.

통계 조사
- 전수조사(全數調査)
- 표본조사(標本調査)

어떤 지역의 가구당 교육비를 알고 싶을 때, 이 지역의 모든 가구를 방문하여 교육비를 조사하면 그 상태를 알 수 있다. 이와 같이 관심의 대상이 되는 집단 전체를 **모집단**이라 하고, 모집단 전체를 조사하는 것을 **전수조사**라고 한다. 전수조사의 대표적인 예로는 인구조사가 있다.

반면에 어떤 지역에서 100가구를 택하여 교육비를 알아보고, 그 결과에서 전체의 상태를 추측할 수도 있다. 이와 같이 모집단의 일부를 추출한 부분집합을 **표본**이라 하고, 표본을 조사하는 것을 **표본조사**라고 한다.



또 추출된 표본의 개수를 표본의 크기라고 한다.

전구의 수명을 조사할 때, 전수조사를 하면 검사가 끝난 전구는 못 쓰게 되므로 표본조사를 한다.

일반적으로 전수조사는 표본조사에 비하여 시간과 비용이 많이 들고, 전수조사가 불가능한 경우도 있으므로 특별한 경우를 제외하고는 전수조사보다 표본조사를 많이 한다.

스 스 로 하 기 / 익힘책 115쪽 | 익힘책 116쪽 | 익힘책 118쪽

1 전수조사와 비교하여 표본조사의 장점을 말하여라.

탐구하기 / 풀이

각 학년에서 골고루 뽑는 것이 특정 학년에서만 뽑는 것보다 합리적이다. 그 이유는 골고루 뽑는 것이 전체 의견을 더 잘 수렴할 수 있기 때문이다. 따라서 **(2)의 방법이 (1)의 방법보다 더 합리적이다.**

알아보기 / 해설

• 통계에서 중요한 용어가 2개 있는데 모집단과 표본이 바로 그것이다.
모집단(母集團, population)은 관심 또는 연구하고자 하는 대상 전체를 말하고, 표본(標本, sample)은 모집단을 알아보기 위하여 모집단에서 추출한 일부분을 말한다.
예를 들어 한국의 고등학교 2학년 학생들의 통계 실력을 알아보고 싶을 때, 모집단은 한국의 고등학교 2학년 학생 전체이다. 그런데 이들을 모두 모아서 실력을 테스트하려면 시간과 경비가 매우 많이 든다. 따라서 몇 개의 고등학교 2학년 학생들을 대상으로 실력을 테스트한다. 이때, 뽑힌 고등학교 2학년 학생들이 표본이 된다.
한편 우리 학교 2학년 학생들의 통계 실력을 알아보고 싶다면 모집단은 우리 학교 2학년 학생 전체이다. 이때는 모집단 전체를 조사하는 전수조사를 하여도 되고, 2학년 각 반에서 몇 명씩 택하여 조사하는 표본조사를 하여도 된다.

• 조사를 하고 나면 그 물건을 다시 쓰지 못하는 경우가 있다.
예를 들어 전구의 수명 시간을 조사한다던지, 불꽃놀이 용품에서 불량품을 골라내는 것 등은 모든 제품을 조사하고 나면 실제로 판매할 상품은 없어지게 된다. 이와 같은 조사를 파괴검사라고 하는데 이 경우에는 당연히 표본조사를 하여야 한다.

스스로 하기 / 풀이

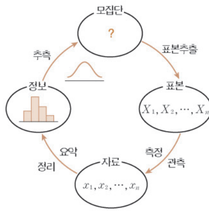
1 ① 시간이 절약된다.
② 비용이 절약된다.
③ 전수조사가 불가능한 경우에도 조사를 할 수 있다.

137

알 아 보 기 / 임의추출의 뜻을 알아보자.

표본조사의 목적은 표본에서 얻은 정보를 바탕으로 모집단의 성질을 추측하는 데 있다. 따라서 모집단의 특징이 잘 반영되도록 표본을 택하는 것이 중요하다.

이를 위해서는 추출되는 표본이 모집단의 어느 한 부분에 편중되지 않아야 한다. 즉, 모집단의 각 원소가 같은 확률로 추출되어야 한다.



앞으로 특별한 언급이 없으면 표본은 임의표본을 뜻한다.

이와 같은 추출법을 **임의추출**이라 하고, 임의추출된 표본을 임의표본이라고 한다.

표본을 추출하는 데에는 한 번 추출된 원소를 다시 되돌려 놓은 후 다음 원소를 뽑는 복원추출과 되돌려 놓지 않고 다음 원소를 뽑는 비복원추출이 있다.

모집단의 크기가 충분히 큰 경우에는 비복원추출도 복원추출로 볼 수 있다.

모집단에서 표본을 추출할 때 실제적인 방법으로는 제비뽑기, 난수주사위 사용하기, 난수표 사용하기 등이 있다.

그러나 공학 도구가 발전된 요즈음에는 계산기, 컴퓨터 소프트웨어를 많이 사용한다.

스 스 로 하 기 / 익힘책 115쪽 | 익힘책 116쪽 | 익힘책 118쪽

2 숫자 1, 2, 3이 각각 적힌 3개의 공이 들어 있는 주머니에서 공 2개를 복원추출하는 방법은 모두 몇 가지인지 구하여라.

3 위의 스스로 하기 **2**에서 다음과 같이 추출하는 방법의 수를 구하여라.
(1) 비복원으로 2개를 추출한다.
(2) 동시에 2개를 추출한다.

알아보기 / 해설

• 통계 조사의 목적은 모집단의 성질을 알고 정확한 상황을 파악하기 위한 것이다.
알고자 하는 성질에 따라서 전수조사를 할 수도 있고 표본조사를 할 수도 있다. 모집단 전체를 알고자 전수조사를 한다고 해서 반드시 정확한 것은 아니다. 이를테면 조사 자체에서 오류가 일어날 수도 있다.
표본조사의 경우에는 다음 사항이 특히 중요하다.
(1) 표본에 모집단의 성질이 잘 반영되어야 한다.
(2) 표본을 뽑는 방법이 적절하여야 한다.

• 임의추출(任意抽出)을 무작위추출이라고도 하는데, 이것은 모두 random sampling을 번역한 것이다.
임의추출은 조사자의 주관에 따르지 않고, 각 원소가 택하여 질 확률이 서로 같게 추출하는 것이다.
임의추출에 대비되는 개념이 유의추출(有意抽出)인데, 이것은 조사자가 자기의 경험에 의해서 가장 대표적이라고 생각되는 원소를 골라서 뽑는 방식이다.

스스로 하기 / 풀이

2 추출된 원소를 다시 되돌려 놓은 후 다음 원소를 뽑는 것이 복원추출이다.
따라서 구하는 방법은
$3 \times 3 = \mathbf{9}$(가지)

3 (1) 추출된 원소를 다시 되돌려 놓지 않고 다음 원소를 뽑는 것이 비복원추출이다.
따라서 구하는 방법은
$3 \times 2 = \mathbf{6}$(가지)
(2) ${}_3C_2 = \mathbf{3}$(가지)

참고 | 난수표

난수표를 최초로 만든 사람은 팁페트(1927)인데, 그 후 여러 종류가 나왔다. KS 난수표는 우리나라에서는 최초로 1963년 박한식 교수가 만든 것이다. KS 난수표의 숫자의 개수는 40000개 정도이고, 이 난수표를 만들 당시 우리나라에 전자계산기가 없었으므로 수공업적으로 만들었다.

수학 실험실 / 해설

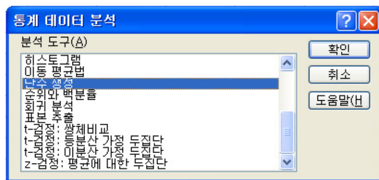
• 컴퓨터 소프트웨어에 의한 임의추출

엑셀 프로그램의 데이터 분석 도구 중에서 '난수 생성' 을 이용하여 임의추출을 할 수 있다.

예를 들어 500명의 모집단에서 10명을 임의추출하여 보자.

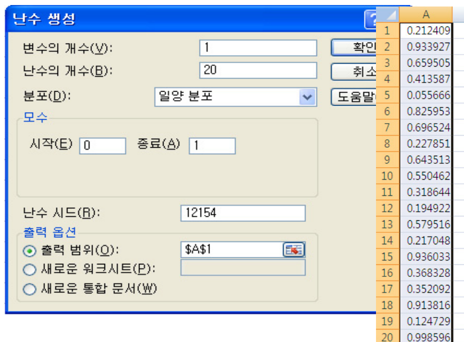
❶ 500명의 각 사람에게 000에서 499까지의 번호를 붙인다.

❷ 엑셀 프로그램의 '도구' 메뉴에서 '데이터 분석' 을 선택하면 다음과 같은 화면이 나타난다.



여기서 '난수 생성' 을 선택하고, '확인' 을 누른다.

❸ 다음과 같이 '난수 생성' 화면이 나타나면 대화 상자에 적절한 값을 입력한다.



❹ 난수를 만든 다음 1000을 곱하여 소수점 아래를 버린 수 중 500보다 큰 수는 지우고, 다음과 같은 수를 번호로 하는 10명을 표본으로 택한다.

212, 413, 55, 227, 318, 194, 217, 368, 352, 124

수학 실험실

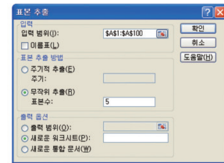
여러 가지 임의추출법

1. 컴퓨터 소프트웨어에 의한 임의추출

컴퓨터 소프트웨어를 이용하여 크기 100인 모집단에서 5개의 표본을 임의추출하여 보자.

❶ A1 셀~A100 셀에 1, 2, 3, ⋯, 100을 입력한다.

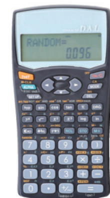
❷ 데이터 도구 상자에서 데이터 분석을 클릭하고, 표본추출을 선택하여 확인을 클릭하면 오른쪽과 같은 화면이 나타난다.



❸ 입력 범위는 A1 셀~A100 셀의 자료를 마우스로 범위 지정을 하고, 표본추출 방법을 무작위 추출로 선택한 뒤 표본수에 '5' 를 입력한다.

❹ 출력 옵션을 새로운 워크시트로 선택하고, 확인을 클릭하면 새로운 워크시트에 임의추출된 5개의 숫자가 나타난다.

2. 계산기에 의한 임의추출



공학용 계산기에는 난수를 만드는 기능 키가 있다. 이들은 대부분 RANDOM 또는 RAND로 표시되어 있는데, 이것을 누르면 0과 1 사이의 난수를 얻을 수 있다. 이들 수에 1000을 곱하면 000에서 999까지의 난수가 생긴다.

이를테면 900명 중에서 5명을 임의추출하는 방법은 다음과 같다.

❶ 각 사람에게 000에서 899까지의 번호를 붙인다.

❷ [2ndF] [7](RANDOM) [=] 를 누르고, [=] 를 눌러 난수를 얻는다. 이때, [=] 를 누를 때마다 새로운 난수를 얻을 수 있다.

❸ ❷에서 얻은 난수에 1000을 곱한 수를 번호로 하는 5명을 표본으로 택한다.

3. 제비뽑기를 이용한 임의추출

학생 수가 50명인 동아리에서 5명의 표본을 임의추출하기 위하여 50장의 종이에 1에서 50까지의 번호를 적은 제비를 주머니에 넣는다. 이 제비를 잘 섞은 다음, 임의로 5장을 추출하고, 추출된 제비의 번호를 가진 학생을 표본으로 택하면 이것은 임의추출법에 의하여 추출된 것이다.

• 제비뽑기를 이용한 임의추출

학생 수가 50명인 동아리에서 5명을 뽑을 때, 각 학생이 뽑힐 확률을 두 가지 방법으로 구하여 보자.

(i) 계속하여 5명을 뽑는 경우

첫 번째에 뽑힐 확률: $\frac{1}{50}$

두 번째에 뽑힐 확률: $\frac{49}{50}\cdot\frac{1}{49}=\frac{1}{50}$

세 번째에 뽑힐 확률: $\frac{49}{50}\cdot\frac{48}{49}\cdot\frac{1}{48}=\frac{1}{50}$

네 번째에 뽑힐 확률: $\frac{49}{50}\cdot\frac{48}{49}\cdot\frac{47}{48}\cdot\frac{1}{47}=\frac{1}{50}$

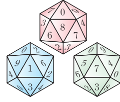
다섯 번째에 뽑힐 확률:

$\frac{49}{50}\cdot\frac{48}{49}\cdot\frac{47}{48}\cdot\frac{46}{47}\cdot\frac{1}{46}=\frac{1}{50}$

$\therefore \frac{1}{50}+\frac{1}{50}+\frac{1}{50}+\frac{1}{50}+\frac{1}{50}=\frac{1}{10}$

4. 난수주사위에 의한 임의추출

난수주사위는 오른쪽 그림과 같이 정이십면체의 각 면에 0에서 9까지의 숫자를 2번씩 새긴 것으로 표본을 임의추출할 때 사용된다.



이를테면 300명 중에서 5명을 임의추출하는 방법은 다음과 같다.

❶ 모집단의 각 원소에 000에서 299까지의 번호를 붙인다.

❷ 서로 다른 색의 난수주사위 3개, 이를테면 빨간색은 백의 자리, 파란색은 십의 자리, 녹색은 일의 자리로 정하여 동시에 던지면 000에서 999까지의 수를 얻을 수 있다.

❸ 299 이하의 번호를 가진 다섯 사람을 순서대로 표본으로 택한다.

5. 난수표를 이용한 임의추출

난수표는 0에서 9까지의 숫자를 임의로 배열한 표이다. 부록에 있는 난수표를 이용하여 50명 중에서 5명을 임의추출하는 방법은 다음과 같다.

❶ 모집단의 각 원소에 00에서 49까지의 번호를 붙인다.

❷ 제비뽑기나 난수주사위를 이용하여 난수표의 시작하는 행, 열을 정한다. 이를테면 이들이 14행 6열일 때, 14행을 따로 쓰면 다음과 같다.

62 67 74 04 84　75 68 64 11 42　22 88 64

난수표

41 10 50 81 22	94 80 71 10 68	23 58 20
13 49 57 94 72	78 92 78 78 04	17 00 92
33 87 89 24 77	65 37 12 38 63	76 49 69
15 91 02 97 10	37 14 47 47 79	81 63 34
37 94 89 58 24	29 22 39 42 66	95 14 63
48 06 32 88 07	06 19 13 11 04	45 95 73
92 65 65 69 32	05 63 75 76 57	26 10 31
48 66 49 80 78	34 30 47 61 73	44 31 65
23 50 07 82 24	34 88 84 90 39	20 46 32
47 02 38 86 81	59 77 46 17 55	54 59 00
39 65 34 38 46	26 95 15 80 70	40 06 89
90 36 99 74 53	71 05 53 69 01	49 59 53
46 60 38 92 08	09 16 06 33 02	13 60 78
62 67 74 04 84	75 68 64 11 42	22 88 64
21 17 44 02 71	21 59 79 73 18	24 74 77

❸ 이 행의 6번째 숫자인 4부터 두 자리씩 오른쪽으로 나아가면서 쓴다. 이때, 이것이 나타내는 두 자리 수 중 50 이상인 것을 지우면 다음과 같다.

40　48　47　~~56~~　~~86~~　41　14　22　28　~~86~~　…

❹ 이와 같이 얻은 수 중에서 처음 5개의 수 40, 48, 47, 41, 14를 번호로 하는 사람을 표본으로 택한다.

논술/수행평가 과제

1. 계산기를 이용하여 우리 반 학생 중 5명을 임의추출하여 보자.
2. 제비뽑기를 이용하여 우리 반 학생 중 5명을 임의추출하여 보자.
3. 난수표를 이용하여 우리 반 학생 중 5명을 임의추출하여 보자.

(ii) 동시에 5명을 뽑는 경우

$$\frac{{}_{1}C_{1}\times{}_{49}C_{4}}{{}_{50}C_{5}}=\frac{5}{50}=\frac{1}{10}$$

제비뽑기를 할 때, 계속하여 몇 장을 뽑거나 동시에 몇 장을 뽑거나 각 번호가 나올 확률은 모두 같다.

• 난수 주사위에 의한 임의추출

난수 주사위를 던질 때, 000번이 나올 수도 있으므로 모집단의 원소에 001에서 300번까지의 번호를 붙이지 않고, 000에서 299번까지의 번호를 붙인다.

• 난수표를 이용한 임의추출

난수표에서 62 67 74 04 …로 나열된 수를 두 자리 숫자로 보아서는 안 된다. 이것은 62677404847568…을 편의상 두 개씩 띄어 쓴 것이다.

논술 / 수행평가 과제 / 해설

우리 반 학생이 34명이라고 하면

1. ❶ 우리 반 학생들에게 00에서 33까지의 번호를 붙인다. 이때, 기존의 학생 번호 1, 2, …, 32, 33, 34를 각각 01, 02, …, 32, 33, 00으로 한다.

❷ 계산기를 이용하여 얻은 난수에 1000을 곱하여 세 자리 수를 만들고 이 중에서 십의 자리와 일의 자리만 택한다.

❸ 예를 들어 ❷의 결과가 80, 22, 62, 19, 70, 14, 31, 76, 02, …로 나왔다면 앞에서부터 차례로 33 이하인 5개의 수 22, 19, 14, 31, 02를 번호로 하는 학생을 표본으로 택한다.

2. ❶ 1번부터 34번까지 숫자를 쓴 제비 34장을 주머니에 넣고 5장을 추출한다.

❷ 5장의 제비에 적힌 수를 번호로 하는 학생을 표본으로 택한다.

3. ❶ 우리 반 학생들에게 00에서 33까지의 번호를 붙인다. 이때, 기존의 학생 번호 1, 2, …, 32, 33, 34를 각각 01, 02, …, 32, 33, 00으로 한다.

❷ 난수표의 시작하는 행과 열을 정한다. 이를테면 6행 3열에서 시작할 때 6행의 3번째 숫자인 0부터 두 자리씩 오른쪽으로 나아가면서 쓴다. 즉,

06 32 88 07 06 19 13 11 04 45 95 …

❸ 여기서 33을 넘는 수를 지워 나간다. 또 남아 있는 수와 중복되는 수도 지운다. 이와 같이 얻은 수 중에서 처음 5개의 수 06, 32, 07, 19, 13을 번호로 하는 학생을 표본으로 택한다.

알아보기 / 해설

숫자 2, 4, 6, 8이 각각 적힌 4개의 공이 상자 안에 들어 있다. 이것을 모집단으로 생각하고, 공에 적힌 숫자를 확률변수 X라고 하면

$m=5,\ \sigma^2=5,\ \sigma=\sqrt{5}$

여기서 크기 $n=2$인 표본을 복원추출하여 그 공에 적힌 숫자를 X_1과 X_2라고 할 때, 표본평균 $\overline{X}=\frac{1}{2}(X_1+X_2)$는 X_1과 X_2의 값에 따라 다른 값을 가지는 확률변수이다.

X_1 \ X_2	2	4	6	8
2	2	3	4	5
4	3	4	5	6
6	4	5	6	7
8	5	6	7	8

표본평균 $\overline{X}=\frac{1}{2}(X_1+X_2)$의 분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

$\overline{X}$	2	3	4	5	6	7	8	합계
$P(\overline{X}=\overline{x})$	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{1}{16}$	1

따라서 $\overline{X}=\frac{1}{2}(X_1+X_2)$의 평균과 분산은

$E(\overline{X})=5,\ V(\overline{X})=\frac{5}{2}$

이것을 m과 σ로 나타내면

$E(\overline{X})=5=m,\ V(\overline{X})=\frac{5}{2}=\frac{\sigma^2}{n}$

임을 알 수 있다.

같은 방법으로 크기 $n=3$인 표본 X_1, X_2, X_3을 택하고, 그 표본평균 $\overline{X}=\frac{1}{3}(X_1+X_2+X_3)$의 분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

$\overline{X}$	$\frac{6}{3}$	$\frac{8}{3}$	$\frac{10}{3}$	$\frac{12}{3}$	$\frac{14}{3}$	$\frac{16}{3}$	$\frac{18}{3}$	$\frac{20}{3}$	$\frac{22}{3}$	$\frac{24}{3}$	합계
$P(\overline{X}=\overline{x})$	$\frac{1}{64}$	$\frac{3}{64}$	$\frac{6}{64}$	$\frac{10}{64}$	$\frac{12}{64}$	$\frac{12}{64}$	$\frac{10}{64}$	$\frac{6}{64}$	$\frac{3}{64}$	$\frac{1}{64}$	1

140

02 표본평균의 뜻과 그 분포

알 아 보 기 / 표본평균의 뜻과 그 분포를 알아보자.

모집단에서 조사의 대상이 되는 특성을 나타내는 확률변수를 X라고 할 때, X의 평균, 분산, 표준편차를 각각 **모평균**, 모분산, 모표준편차라 하고, 각각 기호로 m, σ^2, σ와 같이 나타낸다.

한편 어떤 모집단에서 크기 n인 표본 X_1, X_2, $\cdots$, X_n을 임의추출하였을 때, 이들의 평균을 **표본평균**이라 하고, 기호로 $\overline{X}$와 같이 나타낸다.

$$\overline{X}=\frac{1}{n}(X_1+X_2+\cdots+X_n)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$$

표본평균은 표본에 따라 다른 값을 가지므로 확률변수이다.

일반적으로 표본평균 $\overline{X}$의 분포는 다음과 같다.

표본평균 $\overline{X}$의 분포

평균이 m이고, 표준편차가 σ인 모집단에서 크기 n인 표본을 복원추출할 때, 표본평균 $\overline{X}$에 대하여

(1) $E(\overline{X})=m,\ V(\overline{X})=\frac{\sigma^2}{n},\ \sigma(\overline{X})=\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

(2) 모집단의 분포가 정규분포이면 $\overline{X}$는 정규분포 $N\left(m,\ \frac{\sigma^2}{n}\right)$을 따른다.

(3) 모집단의 분포가 정규분포가 아닐 때에도 표본의 크기 n이 충분히 크면 $\overline{X}$의 분포는 정규분포 $N\left(m,\ \frac{\sigma^2}{n}\right)$에 가까워진다.

모집단이 충분히 크면 비복원추출일 때에도 오른쪽의 성질은 성립한다.

스 스 로 하 기 / 익힘책 115쪽 | 익힘책 116쪽 | 익힘책 118쪽

1 정규분포 N(5, 36)을 따르는 모집단에서 크기 $n=16$인 표본을 임의추출할 때, 표본평균 $\overline{X}$의 평균과 표준편차를 구하여라.

2 모평균이 6, 모표준편차가 3인 모집단에서 크기 $n=100$인 표본을 임의추출할 때, 표본평균 $\overline{X}$의 분포를 말하여라.

따라서 $\overline{X}=\frac{1}{3}(X_1+X_2+X_3)$의 평균과 분산은

$E(\overline{X})=5=m,\ V(\overline{X})=\frac{5}{3}=\frac{\sigma^2}{n}$

스스로 하기 / 풀이

1 $m=5,\ \sigma=6,\ n=16$이므로

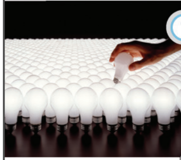
$E(\overline{X})=m=\mathbf{5}$

$\sigma(\overline{X})=\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=\frac{6}{\sqrt{16}}=\mathbf{\frac{3}{2}}$

2 모집단이 정규분포를 따르지 않지만 표본의 크기 100이 충분히 크므로 $\overline{X}$는 정규분포 $N\left(6,\ \frac{3^2}{100}\right)$, 즉 $\mathbf{N\left(6,\ \frac{9}{100}\right)}$에 가까워진다.

함께하기 /

익힘책 115쪽 | 익힘책 116쪽 | 익힘책 118쪽



1 어느 회사에서 생산하는 전구의 수명 X의 분포는 평균이 2000시간, 표준편차가 200시간인 정규분포를 따른다고 한다. 400개의 전구를 임의추출하여 수명을 조사할 때, 다음을 구하여라.

(1) 표본평균이 1990시간 이상 2010시간 이하일 확률

(2) 표본평균이 1980시간 이하일 확률

풀이

$m=2000,\ \sigma=200,\ n=400$이므로 표본평균 $\overline{X}$는

$$E(\overline{X})=m=2000,\ \sigma(\overline{X})=\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=\frac{200}{20}=10$$

인 정규분포 $N(2000,\ 10^2)$을 따른다.

이때, $Z=\frac{\overline{X}-2000}{10}$에서 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다.

(1) 표본평균이 1990시간 이상 2010시간 이하인 경우는 $1990\le\overline{X}\le2010$일 때이므로

$P(1990\le\overline{X}\le2010)$

$=P\left(\frac{1990-2000}{10}\le\frac{\overline{X}-2000}{10}\le\frac{2010-2000}{10}\right)$

$=P(-1\le Z\le1)=2P(0\le Z\le1)$

$=2\times0.3413=$ **0.6826**

(2) 표본평균이 1980시간 이하인 경우는 $\overline{X}\le1980$일 때이므로

$P(\overline{X}\le1980)$

$=P\left(\frac{\overline{X}-2000}{10}\le\frac{1980-2000}{10}\right)$

$=P(Z\le-2)=P(Z\ge2)=$ **0.0228**

스스로 하기 /

익힘책 115쪽 | 익힘책 116쪽 | 익힘책 118쪽

3 어느 지역의 가구당 한 달 수입액 X의 분포는 평균이 300만 원, 표준편차가 10만 원인 정규분포를 따른다고 한다. 이 지역의 가구 중 다음과 같은 크기의 표본을 임의추출할 때, 표본평균 $\overline{X}$가 302만 원 이상이 될 확률을 각각 구하여라.

(1) $n=25$ (2) $n=100$ (3) $n=225$

함께하기 / 해설

1 표본의 크기 $n=100$일 때, $\overline{X}$는 정규분포 $N(2000,\ 20^2)$을 따르고 $Z=\frac{\overline{X}-2000}{20}$에서 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따르므로

$P(1990\le\overline{X}\le2010)=P(-0.5\le Z\le0.5)$

$=2P(0\le Z\le0.5)$

$=2\times0.1915$

$=0.383$

따라서 표본의 크기 $n=400$인 경우보다 확률이 낮아짐을 알 수 있다. 즉, 표본의 크기가 클수록 평균을 중심으로 대칭인 구간에 대한 확률이 커진다는 것을 알 수 있다.

스스로 하기 / 풀이

3 $m=300,\ \sigma=10$이므로 표본평균 $\overline{X}$는

$E(\overline{X})=m=300$

$\sigma(\overline{X})=\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=\frac{10}{\sqrt{n}}$

인 정규분포 $N\left(300,\ \frac{10^2}{n}\right)$을 따른다.

(1) $n=25$일 때, $\overline{X}$는 정규분포 $N\left(300,\ \frac{10^2}{25}\right)$을 따른다.

$P(\overline{X}\ge302)$

$=P\left(\frac{\overline{X}-300}{2}\ge\frac{302-300}{2}\right)$

$=P(Z\ge1)$

$=0.5-P(0\le Z\le1)$

$=0.5-0.3413=$ **0.1587**

(2) $n=100$일 때, $\overline{X}$는 정규분포 $N\left(300,\ \frac{10^2}{100}\right)$을 따른다.

$P(\overline{X}\ge302)$

$=P\left(\frac{\overline{X}-300}{1}\ge\frac{302-300}{1}\right)$

$=P(Z\ge2)$

$=0.5-P(0\le Z\le2)$

$=0.5-0.4772=$ **0.0228**

(3) $n=225$일 때, $\overline{X}$는 정규분포 $N\left(300,\ \frac{10^2}{225}\right)$을 따른다.

$P(\overline{X}\ge302)$

$=P\left(\frac{\overline{X}-300}{\frac{2}{3}}\ge\frac{302-300}{\frac{2}{3}}\right)$

$=P(Z\ge3)$

$=0.5-P(0\le Z\le3)$

$=0.5-0.4987=$ **0.0013**

알아보기 / 해설

• $\mathrm{P}\left(-1.96 \le \dfrac{\overline{X}-m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \le 1.96\right)=0.95$

에서

$-1.96 \le \dfrac{\overline{X}-m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \le 1.96$

$\Longleftrightarrow\ -1.96\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} \le \overline{X}-m \le 1.96\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$

$\Longleftrightarrow\ -\overline{X}-1.96\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} \le -m$

$\le -\overline{X}+1.96\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$

$\Longleftrightarrow\ \overline{X}-1.96\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} \le m \le \overline{X}+1.96\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$

임을 알 수 있다. 그러므로 신뢰도 95 %인 신뢰구간은 위의 식에서 $\overline{X}$의 자리에 그 측정값 $\overline{x}$를 대입하여 구한다.

• 모평균에 대한 신뢰구간은 추출되는 표본에 따라 달라진다. 그러므로 표본조사를 여러 번 반복할 때마다 신뢰구간도 달라져서 그중에는 모평균 m을 포함하는 것도 있고 m을 포함하지 않는 것도 있다. 이때, 모평균 m을 포함하는 신뢰구간을 갖는 표본이 약 95 %가 되는 것을 '신뢰도 95%인 신뢰구간' 이라고 한다.

• $\mathrm{P}\left(-2.58 \le \dfrac{\overline{X}-m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \le 2.58\right)=0.99$에서

$-2.58 \le \dfrac{\overline{X}-m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \le 2.58$

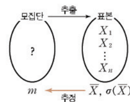
$\Longleftrightarrow\ -2.58\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} \le \overline{X}-m \le 2.58\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$

$\Longleftrightarrow\ -\overline{X}-2.58\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} \le -m \le -\overline{X}+2.58\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$

$\Longleftrightarrow\ \overline{X}-2.58\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} \le m \le -\overline{X}+2.58\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$

03 모평균의 추정

알 아 보 기 / 모평균을 추정하여 보자.



표본에서 얻은 정보를 이용하여 모집단의 평균, 비율 등을 추측하는 방법을 추정이라고 한다.

표본평균 $\overline{X}$를 이용하여 모평균 m을 추정하는 방법을 알아보자.

정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$을 이루는 모집단에서 크기 n인 표본 $X_1,\ X_2,\ \cdots,\ X_n$을 임의추출할 때, 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(m,\ \dfrac{\sigma^2}{n}\right)$을 따른다.

$\therefore\ \mathrm{P}\left(-1.96 \le \dfrac{\overline{X}-m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \le 1.96\right)$

$=\mathrm{P}\left(\overline{X}-1.96\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} \le m \le \overline{X}+1.96\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)=0.95$

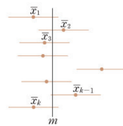
$Z=\dfrac{\overline{X}-m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ 은 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로 $\mathrm{P}(|Z| \le 1.96)=0.95$이다.

여기서 표본평균 $\overline{X}$의 값을 $\overline{x}$라고 할 때, 다음과 같은 구간

$$\overline{x}-1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le m \le \overline{x}+1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

를 모평균 m의 신뢰도 95 %인 신뢰구간이라고 한다.

이와 같이 모평균이 속해 있는 구간을 추정하는 것을 **구간추정**이라고 한다.



표본평균 $\overline{X}$는 확률변수이므로 추출되는 표본에 따라 그 값이 달라지며, 따라서 신뢰구간도 달라진다.

그러므로 '신뢰도 95 %인 신뢰구간' 의 뜻은 크기 n인 표본을 여러 번 추출하여 신뢰구간을 만들 때, 모평균 m을 포함하는 것이 약 95 %라는 의미이다.

일반적으로 모평균 m을 구간추정하면 다음과 같다.

모평균 m의 구간추정

(1) 신뢰도 95 %로 추정: $\overline{x}-1.96\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} \le m \le \overline{x}+1.96\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$

(2) 신뢰도 99 %로 추정: $\overline{x}-2.58\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} \le m \le \overline{x}+2.58\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$

여기서 표본평균 $\overline{X}$의 값 $\overline{x}$를 대입하여 신뢰도 99 %로 모평균 m을 구간추정한다.

보충 학습

$\overline{X}-k\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} \le m \le \overline{X}+k\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$ (k는 상수)에서

$\left(\overline{X}+k\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)-\left(\overline{X}-k\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)=2k\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$

이때, $2k\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$를 '신뢰구간의 길이' 라고 한다.

신뢰도가 일정할 때 표본의 크기가 클수록 신뢰구간의 길이는 짧아지고, 표본의 크기가 일정할 때 신뢰도가 높을수록 신뢰구간의 길이는 길어진다.

143

함께하기 / 익힘책 115쪽 | 익힘책 116쪽 | 익힘책 118쪽

네이만(Neyman, J. ; 1894~1981)
폴란드 태생의 미국 통계학자로서 1937년 신뢰구간의 개념을 창안했다.

1 어떤 회사에서 생산하는 통조림의 무게는 평균이 m g이고, 표준편차가 10 g인 정규분포를 따른다고 한다. 모평균 m을 알아보기 위하여 25개의 통조림을 임의추출하여 표본평균을 구하였더니 그 값이 502 g이 되었다. 모평균 m을 신뢰도 95 %, 99 %로 각각 구간추정하여라.

풀이

(i) $n=25$, $\bar{x}=502$, $\sigma=10$이므로 신뢰도 95 %로 구간추정하면 m의 범위는

$$502-1.96\frac{10}{\sqrt{25}}\le m\le 502+1.96\frac{10}{\sqrt{25}}$$

$$502-3.92\le m\le 502+3.92$$

$$\therefore \mathbf{498.08\le m\le 505.92}$$

(ii) $n=25$, $\bar{x}=502$, $\sigma=10$이므로 신뢰도 99 %로 구간추정하면 m의 범위는

$$502-2.58\frac{10}{\sqrt{25}}\le m\le 502+2.58\frac{10}{\sqrt{25}}$$

$$502-5.16\le m\le 502+5.16$$

$$\therefore \mathbf{496.84\le m\le 507.16}$$

스스로 하기 / 익힘책 115쪽 | 익힘책 116쪽 | 익힘책 118쪽

1 모표준편차가 6인 정규분포를 따르는 모집단에서 크기가 100인 표본을 임의추출하여 그 평균을 구하였더니 60이었다. 모평균 m을 다음의 신뢰도로 구간추정하여라.

(1) 신뢰도 95 % (2) 신뢰도 99 %

2 어느 회사에서 생산하는 음료수의 A 성분의 함유량은 정규분포를 따른다고 한다. 이 음료수 400병을 임의추출하여 A 성분의 함유량을 검사하였더니 평균이 30.5 mg, 표준편차가 5.8 mg이었다. 이 음료수 1병에 담긴 A 성분의 평균 함유량 m을 다음의 신뢰도로 구간추정하여라.

(1) 신뢰도 95 % (2) 신뢰도 99 %

모표준편차를 모를 때에는 표본의 표준편차를 사용한다.

함께하기 / 해설

1 (i) 신뢰도 95 %인 신뢰구간

$$\bar{x}-1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\le m\le \bar{x}+1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

(ii) 신뢰도 99 %인 신뢰구간

$$\bar{x}-2.58\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\le m\le \bar{x}+2.58\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

이 식에 표본의 크기 n, 표본평균의 값 $\bar{x}$와 모표준편차 σ의 값을 대입하여 신뢰구간을 구한다.

스스로 하기 / 풀이

1 $\bar{x}=60$, $\sigma=6$, $n=100$이므로

(1) 신뢰도 95 %로 구간추정하면 m의 범위는

$$60-1.96\frac{6}{\sqrt{100}}\le m \le 60+1.96\frac{6}{\sqrt{100}}$$

$$60-1.176\le m\le 60+1.176$$

$$\therefore \mathbf{58.824\le m\le 61.176}$$

(2) 신뢰도 99 %로 구간추정하면 m의 범위는

$$60-2.58\frac{6}{\sqrt{100}}\le m \le 60+2.58\frac{6}{\sqrt{100}}$$

$$60-1.548\le m\le 60+1.548$$

$$\therefore \mathbf{58.452\le m\le 61.548}$$

2 정규분포 $N(m,\ \sigma^2)$에서 모표준편차 σ를 모를 때에 모평균 m의 구간추정을 하는 문제이다. 일반적으로 표본의 크기 n이 충분히 크면 모표준편차 대신 표본의 표준편차를 사용하여도 된다.

$n=400$, $\bar{x}=30.5$, $\sigma=5.8$이므로

(1) 신뢰도 95 %로 구간추정하면 m의 범위는

$$30.5-1.96\frac{5.8}{\sqrt{400}}\le m \le 30.5+1.96\frac{5.8}{\sqrt{400}}$$

$$30.5-0.5684\le m\le 30.5+0.5684$$

$$\therefore \mathbf{29.9316\le m\le 31.0684}$$

(2) 신뢰도 99 %로 구간추정하면 m의 범위는

$$30.5-2.58\frac{5.8}{\sqrt{400}}\le m \le 30.5+2.58\frac{5.8}{\sqrt{400}}$$

$$30.5-0.7482\le m\le 30.5+0.7482$$

$$\therefore \mathbf{29.7518\le m\le 31.2482}$$

공학 도구 / 해설

• 엑셀 프로그램의 CONFIDENCE 함수를 이용하면 신뢰구간을 쉽게 구할 수 있다. 본문 내용은 신뢰도 95 %인 신뢰구간을 구하는 것인데, Alpha에는

'1－(신뢰도)'

의 값을 입력하는 것에 주의한다.

따라서 신뢰도 95 %는 0.95이므로

$1-0.95=0.05$

를 Alpha에 입력한다.

만약 신뢰도 99 %이면 Alpha에는

$1-0.99=0.01$

을 입력한다.

한편 컴퓨터 소프트웨어를 이용한 결과값은 신뢰도 95 %인 경우에는 $1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$의 값이, 신뢰도 99 %인 경우에는 $2.58\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$의 값이 계산된다.

144

공학 도구 *수학적 개념을 공학 도구를 이용하여 이해하고 탐구해 보세요.

컴퓨터 소프트웨어를 이용하여 신뢰구간 구하기

컴퓨터 소프트웨어의 '함수 마법사'의 통계함수의 하나인 CONFIDENCE 함수를 이용하여 신뢰구간을 구할 수 있다.
이를테면 143쪽의 함께하기 **1**에서 신뢰도 95 %로 모평균 m의 신뢰구간을 다음 순서로 구하여 보자.

함수 마법사를 못 찾겠으면 133쪽을 참고해 봐!

1단계 Alpha에 '1－(신뢰도)'의 값을 입력한다.
여기서는 신뢰도가 95 %인 경우이므로 '0.05'를 입력한다.

2단계 Standard_dev에 표준편차를 입력한다.
여기서는 표준편차에 '10'을 입력한다.

3단계 Size에 표본의 크기를 입력한다.
여기서는 '25'를 입력한다.

4단계 위의 1, 2, 3단계를 실행하면 다음 그림과 같이 그 결과가 3.919927969로 나온다.
여기서 3.919927969를 소수 셋째 자리에서 반올림하여 3.92로 쓴다.

함수 인수
CONFIDENCE
Alpha 0.05 = 0.05
Standard_dev 10 = 10
Size 25 = 25
= 3.919927969
모집단 평균의 신뢰 구간을 나타냅니다.
Size 은(는) 표본의 크기입니다.
수식 결과= 3.919927969
도움말(H) 확인 취소

5단계 모평균 m의 신뢰구간은 다음과 같이 구할 수 있다.

$$502-3.92\le m\le 502+3.92$$
$$\therefore 498.08\le m\le 505.92$$

• 교과서 143쪽의 함께하기 **1**에서 신뢰도 99 %로 모평균 m을 구간추정하면 다음과 같다.

함수 인수
CONFIDENCE
Alpha 0.01 = 0.01
Standard_dev 10 = 10
Size 25 = 25
= 5.151658607
모집단 평균의 신뢰 구간을 나타냅니다.
Size 은(는) 표본의 크기입니다.
수식 결과= 5.151658607
도움말(H) 확인 취소

여기서 $2.58\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$의 값이 5.151658607이므로 $2.58\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\fallingdotseq 5.16$으로 계산하면 모평균 m의 신뢰구간은 다음과 같다.

$502-5.16\le m\le 502+5.16$

$\therefore 496.84\le m\le 507.16$

참고 | 추정(推定, estimation)

통계적 추정에는 점추정(點推定, point estimation)과 구간추정(區間推定, interval estimation)이 있다.

(1) 점추정: 모집단의 평균, 분산 또는 비율 등을 하나의 실수로 추정하는 것이다. 이를테면 표본평균으로 모평균을 추정하고, 표본분산으로 모분산을 추정하는 것이 점추정이다.

(2) 구간추정: 모집단의 평균 또는 분산 또는 비율 등을 하나의 구간으로 추정하는 것이다.

우리는 구간추정만을 다루고 있으나 사실은 이미 점추정의 개념을 쓰고 있다. 이를테면 모평균의 구간추정에서 표본평균을 사용하는 것이 그 예이다.

145

04 표본비율의 분포

알 아 보 기 / 모비율, 표본비율의 뜻과 표본비율의 분포를 알아보자.

p는 비율을 나타내는 proportion의 첫 글자이다.

$\hat{p}$는 '피햇'으로 읽는다.

어느 공장에서 생산되는 제품의 불량률, 정책에 대한 찬성률, 어떤 정당의 지지율, 즐겨 보는 TV 프로그램의 시청률 등은 우리 생활 주변에서 흔히 접할 수 있으며, 이들을 조사하고 분석하는 것은 우리의 의사 결정에 많은 영향을 미친다.

이와 같이 모집단의 어떤 사건에 대한 비율을 그 사건에 대한 **모비율**이라 하고, 기호로 p와 같이 나타낸다. 또 모집단에서 임의추출한 표본에서의 비율을 그 사건에 대한 **표본비율**이라 하고, 기호로 $\hat{p}$과 같이 나타낸다.

| 보기 | 2007년 우리나라에서 태어난 아이의 수는 496710명이고, 이 중에서 남자 아이의 수는 255762명이다. 이때, 2007년 우리나라에서 남자 아이가 태어난 비율, 즉 모비율 p는

$$p=\frac{255762}{496710}≒0.515$$

한편 2007년에 태어난 아이들 중에서 1000명을 임의추출하였더니 남자 아이가 508명이라면, 표본비율 $\hat{p}$은

$$\hat{p}=\frac{X}{n}=\frac{508}{1000}=0.508$$

일반적으로 어떤 사건에 대한 표본비율과 그 분포는 다음과 같다.

표본비율과 그 분포

(1) 크기 n인 표본에서 어떤 사건이 일어난 횟수를 확률변수 X라고 할 때, 그 사건에 대한 표본비율 $\hat{p}$은

$$\hat{p}=\frac{X}{n}$$

(2) 표본비율 $\hat{p}$은 표본의 크기 n이 충분히 클 때,

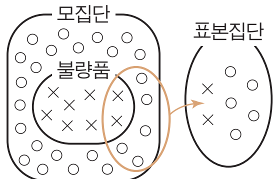
정규분포 $\mathrm{N}\left(p,\ \frac{pq}{n}\right)$에 가까워지고, $Z=\frac{\hat{p}-p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}}$는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$에 가까워진다.

| 참고 | n이 $np\geq 5$ 또는 $nq\geq 5$를 만족할 때, n을 충분히 큰 값으로 생각한다.

알아보기 / 해설

어느 공장에서 생산되는 불량률이 p인 제품 중에서 n개의 제품을 택할 때, 불량품의 개수를 확률변수 X라고 하자.

이때, X가 가지는 값은 0, 1, 2, $\cdots$, n이고 $\frac{X}{n}$가 불량품의 표본비율이다.



이와 같이 크기 n인 표본에서 어떤 사건이 일어난 횟수를 확률변수 X라고 할 때, $\frac{X}{n}$를 표본비율라고 한다.

이제 $\frac{X}{n}$의 분포를 알아보기 위하여 X의 분포를 먼저 살펴보자.

확률변수 X는 어떤 사건이 일어날 확률이 p인 시행을 n번 독립적으로 시행하였을 때, 그 사건이 일어난 횟수이므로 이항분포 $\mathrm{B}(n,\ p)$를 따른다.

그러므로 X의 평균과 분산은 각각 $\mathrm{E}(X)=np$, $\mathrm{V}(X)=npq$이다.

따라서 $\hat{p}=\frac{X}{n}$의 평균, 분산 및 표준편차는 다음과 같다.

$$\mathrm{E}(\hat{p})=\mathrm{E}\left(\frac{X}{n}\right)=\frac{1}{n}\mathrm{E}(X)=\frac{1}{n}\cdot np=p$$

$$\mathrm{V}(\hat{p})=\mathrm{V}\left(\frac{X}{n}\right)=\frac{1}{n^2}\mathrm{V}(X)=\frac{1}{n^2}\cdot npq=\frac{pq}{n}$$

$$\sigma(\hat{p})=\sqrt{\mathrm{V}(\hat{p})}=\sqrt{\frac{pq}{n}}$$

일반적으로 표본의 크기 n이 충분히 클 때, $\hat{p}$의 분포는 정규분포에 가까워지는 것으로 알려져 있다.

즉, $\hat{p}$은 n이 충분히 클 때, 정규분포 $\mathrm{N}\left(p,\ \frac{pq}{n}\right)$에 가까워진다. 그러므로 확률변수

$$Z=\frac{\hat{p}-p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}}$$

는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$에 가까워진다.

참고로 표본비율 $\hat{p}$의 분산 $\frac{pq}{n}$를 모를 때에는 $\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}$(단, $\hat{q}=1-\hat{p}$)을 대신 사용한다.

함 께 하 기 /

익힘책 115쪽 | 익힘책 116쪽 | 익힘책 118쪽

1 어떤 과수원에서 생산되는 사과의 10 %가 규격 미달이라고 한다. 이 과수원에서 생산된 사과 100개를 임의추출할 때, 규격 미달인 사과가 10개 이상 13개 이하일 확률을 구하여라.

풀이

표본에 있는 100개의 사과 중 규격 미달인 것의 비율을 $\hat{p}$이라고 하면 구하는 확률은 $\mathrm{P}(0.1\le\hat{p}\le0.13)$이다.

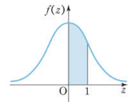
여기서 모비율 $p=0.1$이고 $n=100$은 충분히 크므로

$$Z=\frac{\hat{p}-p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}}=\frac{\hat{p}-0.1}{\sqrt{\frac{0.1\times0.9}{100}}}=\frac{\hat{p}-0.1}{0.03}$$

은 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$에 가까워진다.

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned}&\mathrm{P}(0.1\le\hat{p}\le0.13)\\&=\mathrm{P}\left(\frac{0.1-0.1}{0.03}\le Z\le\frac{0.13-0.1}{0.03}\right)\\&=\mathrm{P}(0\le Z\le1)\\&=\mathbf{0.3413}\end{aligned}$$



스 스 로 하 기 /

익힘책 115쪽 | 익힘책 116쪽 | 익힘책 118쪽

1 어느 도시 주민의 20 %가 과체중이라고 한다. 이 도시에서 주민 100명을 임의추출할 때, 25명 이상이 과체중일 확률을 구하여라.

2 어떤 정책에 대하여 주민의 60 %가 찬성한다고 한다. 이 지역 주민 96명을 임의추출할 때, 그 정책에 대하여 찬성하는 사람이 48명 이상 60명 이하일 확률을 구하여라.

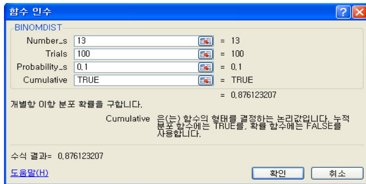
3 멘델의 유전법칙에 의하면 노란색과 녹색의 완두콩을 교배할 때, 제2세대에서 노란색의 완두콩이 나올 비율은 0.75이고 녹색의 완두콩이 나올 비율은 0.25이다. 제2세대의 완두콩 400개를 조사하였을 때, 노란색 완두콩의 비율이 0.7 이상 0.8 이하일 확률을 구하여라.

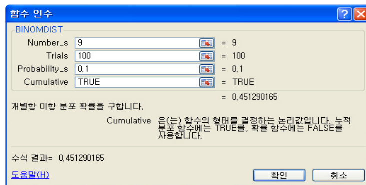
(단, 모든 계산은 소수 셋째 자리에서 반올림한다.)

함께하기 / 해설

1 컴퓨터 소프트웨어를 이용하여 구하여 보자. 임의추출한 사과 100개 중에서 규격 미달인 사과의 개수를 확률변수 X라고 하면, X는 이항분포 $\mathrm{B}(100,\ 0.1)$을 따른다. 따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(10\le X\le13)$$
$$=\mathrm{P}(X\le13)-\mathrm{P}(X\le9)$$





위의 방법으로 구한 답과 함께하기의 풀이에서 구한 답이 차이가 나는 것은 함께하기의 풀이는 근사적으로 구한 것이기 때문이다.

스스로 하기 / 풀이

1 표본에 있는 100명 중 과체중인 사람의 비율을 $\hat{p}$이라고 하면 구하는 확률은 $\mathrm{P}(\hat{p}\ge0.25)$이다.

여기서 모비율 $p=0.2$이고 $n=100$은 충분히 크므로

$$Z=\frac{\hat{p}-p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}}=\frac{\hat{p}-0.2}{\sqrt{\frac{0.2\times0.8}{100}}}=\frac{\hat{p}-0.2}{0.04}$$

는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$에 가까워진다.

$$\begin{aligned}\therefore \mathrm{P}(\hat{p}\ge0.25)&=\mathrm{P}\left(\frac{\hat{p}-0.2}{0.04}\ge\frac{0.25-0.2}{0.04}\right)\\&=\mathrm{P}(Z\ge1.25)\\&=0.5-\mathrm{P}(0\le Z\le1.25)\\&=0.5-0.3944=\mathbf{0.1056}\end{aligned}$$

2 표본에 있는 96명 중 찬성하는 사람의 비율을 $\hat{p}$이라고 하면 구하는 확률은 $\mathrm{P}(0.5\le\hat{p}\le0.625)$이다.

여기서 모비율 $p=0.6$이고 $n=96$은 충분히 크므로

$$Z=\frac{\hat{p}-p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}}=\frac{\hat{p}-0.6}{\sqrt{\frac{0.6\times0.4}{96}}}=\frac{\hat{p}-0.6}{0.05}$$

은 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$에 가까워진다.

147

05 모비율의 추정

알 아 보 기 / 모비율을 추정하여 보자.

모평균의 구간추정과 마찬가지로 모비율이 속해 있을 구간을 추정할 수 있다.

어느 모집단에서 크기 n인 표본을 임의추출하였을 때, 이 중에서 어떤 사건이 일어난 횟수를 확률변수 X라고 하면 표본비율 $\hat{p}=\frac{X}{n}$는 n이 충분히 클 때 정규분포 $\mathrm{N}\left(p,\ \frac{pq}{n}\right)$에 가까워진다.

따라서 $Z=\frac{\hat{p}-p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}}$는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$에 가까워진다.

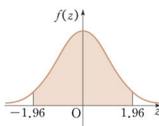
또 n이 충분히 클 때 $\hat{p}$의 분산 $\frac{pq}{n}$에서 미지의 값인 p, q 대신에 표본비율을 대입한 $Z=\frac{\hat{p}-p}{\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}}$도 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$에 가까워진다는 것이 알려져 있다.

$q=1-p$이므로 $\hat{q}=1-\hat{p}$

그러므로 표준정규분포표에서

$\mathrm{P}(-1.96\le Z\le 1.96)=0.95$

이고, 이 식은 다음과 같이 나타낼 수 있다.



$$\mathrm{P}\left(-1.96\le \frac{\hat{p}-p}{\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}}\le 1.96\right)$$
$$=\mathrm{P}\left(\hat{p}-1.96\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}\le p\le \hat{p}+1.96\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}\right)$$
$$=0.95$$

일반적으로 모비율 p를 구간추정하면 다음과 같다.

모비율 p의 구간추정

(1) 신뢰도 95 %로 추정: $\hat{p}-1.96\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}\le p\le \hat{p}+1.96\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}$

(2) 신뢰도 99 %로 추정: $\hat{p}-2.58\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}\le p\le \hat{p}+2.58\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}$

$\therefore \mathrm{P}(0.5\le\hat{p}\le 0.625)$

$$=\mathrm{P}\left(\frac{0.5-0.6}{0.05}\le\frac{\hat{p}-0.6}{0.05}\le\frac{0.625-0.6}{0.05}\right)$$
$$=\mathrm{P}(-2\le Z\le 0.5)$$
$$=\mathrm{P}(0\le Z\le 0.5)+\mathrm{P}(0\le Z\le 2)$$
$$=0.1915+0.4772=\mathbf{0.6687}$$

3 표본에 있는 400개의 완두콩 중 노란색 완두콩의 비율을 $\hat{p}$이라고 하면 구하는 확률은 $\mathrm{P}(0.7\le\hat{p}\le 0.8)$이다.

여기서 모비율 $p=0.75$이고 $n=400$은 충분히 크므로

$$Z=\frac{\hat{p}-p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}}=\frac{\hat{p}-0.75}{\sqrt{\frac{0.75\times 0.25}{400}}}$$
$$\fallingdotseq\frac{\hat{p}-0.75}{0.02}$$

는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$에 가까워진다.

$\therefore \mathrm{P}(0.7\le\hat{p}\le 0.8)$

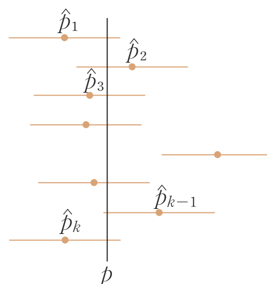
$$=\mathrm{P}\left(\frac{0.7-0.75}{0.02}\le\frac{\hat{p}-0.75}{0.02}\le\frac{0.8-0.75}{0.02}\right)$$
$$=\mathrm{P}(-2.5\le Z\le 2.5)$$
$$=2\mathrm{P}(0\le Z\le 2.5)$$
$$=2\times 0.49=\mathbf{0.98}$$

알아보기 / 해설

표본비율 $\hat{p}$의 정확한 분포는 알기 어렵다. 따라서 모비율 p에 대한 구간추정을 하기 위해서는 표본의 크기 n을 충분히 크게 하여 $\hat{p}$의 근사적인 분포를 이용하여야 한다.

또 $\hat{p}$의 분산 $\frac{pq}{n}$를 모를 때에는 $\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}$을 사용한다.

한편 모평균의 구간추정에서와 마찬가지로 표본비율 $\hat{p}$은 확률변수이므로 추출되는 표본에 따라 그 값이 달라지며, 따라서 신뢰구간도 달라진다.



그러므로 '신뢰도 95 %인 신뢰구간'의 뜻은 크기 n인 표본을 여러 번 추출하여 신뢰구간을 만들 때, 모비율 p를 포함하는 것이 약 95 %라는 의미이다.

함 께 하 기 / 익힘책 115쪽 | 익힘책 116쪽 | 익힘책 118쪽

1 어느 지방 자치 단체에서 새로운 정책을 개발하고 시행하기에 앞서 이 정책에 대한 주민의 선호도를 조사하기로 하였다. 지역 주민 400명을 임의추출하여 이 정책에 대한 선호도를 조사하였더니, 220명이 찬성한다고 응답하였다. 전체 주민의 몇 %가 이 정책을 찬성할 것인지를 신뢰도 95 %로 구간추정하여라. (단, 소수 넷째 자리에서 반올림한다.)

풀이

$n=400$, 표본비율 $\hat{p}=\frac{220}{400}=0.55$이고, $n\hat{p}\geq 5$이므로 표본비율 $\hat{p}$의 분포는 근사적으로 정규분포를 따른다.

따라서 모비율 p에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간의 양 끝값은

$$\hat{p}-1.96\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}=0.55-1.96\sqrt{\frac{0.55\times0.45}{400}}$$
$$\fallingdotseq 0.55-0.049=0.501$$
$$\hat{p}+1.96\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}=0.55+1.96\sqrt{\frac{0.55\times0.45}{400}}$$
$$\fallingdotseq 0.55+0.049=0.599$$

따라서 전체 주민의 **50.1 %~59.9 %**가 이 정책을 찬성할 것으로 추정된다.

오른쪽 계산에서 ±0.049(=±4.9 %)는 여론 조사를 발표할 때 나오는 오차의 한계랍니다.

스 스 로 하 기 / 익힘책 115쪽 | 익힘책 116쪽 | 익힘책 118쪽

1 어느 주차장에 주차된 승용차 중 100대를 임의추출하여 조사하였더니 흰색 차량은 36대였다. 이 지역에서 운행되는 전체 승용차 중 흰색 차량의 비율 p를 신뢰도 99 %로 구간추정하여라.

2 어느 지역의 실업률을 조사하기 위하여 이 지역의 해당 주민 중 1600명을 임의추출하였다. 이 중 96명이 실업자라고 할 때, 이 지역의 실업률 p를 신뢰도 95 %로 구간추정하여라.

(단, 소수 넷째 자리에서 반올림한다.)

함께하기 / 해설

1 $\hat{p}$의 분산 및 표준편차는

$$V(\hat{p})=\frac{pq}{n},\ \sigma(\hat{p})=\sqrt{\frac{pq}{n}}$$

이때, p(또는 $q=1-p$)의 값을 모를 때가 많이 있으므로 p, q 대신에 $\hat{p}$, $\hat{q}$을 사용한다.

스스로 하기 / 풀이

1 $n=100$, 표본비율 $\hat{p}=\frac{36}{100}=0.36$이고, $n\hat{p}=100\times0.36=36\geq5$이므로 표본비율 $\hat{p}$의 분포는 근사적으로 정규분포를 따른다.

따라서 모비율 p에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간의 양 끝값은

$$\hat{p}-2.58\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}$$
$$=0.36-2.58\sqrt{\frac{0.36\times0.64}{100}}$$
$$=0.36-0.12384$$
$$=0.23616$$
$$\hat{p}+2.58\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}=0.36+2.58\sqrt{\frac{0.36\times0.64}{100}}$$
$$=0.36+0.12384$$
$$=0.48384$$

$\therefore$ $\mathbf{0.23616\leq p\leq 0.48384}$

2 $n=1600$, 표본비율 $\hat{p}=\frac{96}{1600}=0.06$이고, $n\hat{p}=1600\times0.06=96\geq5$이므로 표본비율 $\hat{p}$의 분포는 근사적으로 정규분포를 따른다.

따라서 모비율 p에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간의 양 끝값은

$$\hat{p}-1.96\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}$$
$$=0.06-1.96\sqrt{\frac{0.06\times0.94}{1600}}$$
$$\fallingdotseq 0.06-0.012$$
$$=0.048$$
$$\hat{p}+1.96\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}$$
$$=0.06+1.96\sqrt{\frac{0.06\times0.94}{1600}}$$
$$\fallingdotseq 0.06+0.012$$
$$=0.072$$

$\therefore$ $\mathbf{0.048\leq p\leq 0.072}$

149

읽을거리

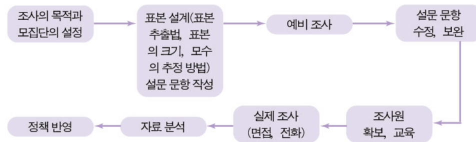
여론 조사와 그 결과 읽기

1. 여론 조사의 뜻과 과정

민주주의의 기본은 국민의 뜻에 따라 사회와 국가를 운영하는 것이다. 이때, 국민의 뜻을 객관적이면서 구체적으로 파악하는 것이 중요한데, 그 수단으로써 여론 조사가 많이 쓰인다.

영국의 정치학자인 브라이스(Bryce, J.)는 이미 19세기 말에 민주주의의 발전에서 마지막 단계는 국민의 의지가 즉시 파악될 때 비로소 이루어진다고 예견하였다. 오늘날은 통계적 기법의 발전, 정보 통신 기술의 발달, 시민 의식의 제고 등에 힘입어 어떤 사건에 대한 여론 조사는 거의 순식간에 매우 정확하게 이루어지고 있다. 예를 들면 투표의 종료 시각과 동시에 출구 조사를 통해 당선자를 예측한다. 이와 같이 여론 조사는 처음에는 정치적 문제에서 출발하였으나 현재는 사회 · 과학 분야뿐만 아니라 기업 경영에도 많이 활용되고 있다.

여론 조사의 대부분은 표본조사로 이루어지는데, 그 과정을 살펴보면 다음과 같다.



2. 여론 조사와 그 결과 발표에 필요한 사항

여론 조사의 결과는 정확해야 하고, 신뢰할 수 있어야 한다. 이러한 정확성과 신뢰성을 확보하기 위하여 여론 조사를 시행하고 그 결과를 발표할 때, 다음 사항을 제시하여야 한다.

- 필수 사항: 조사 기관명, 조사 대상, 조사 시기, 유효 표본의 크기와 구체적인 조사 지역
- 권장 사항: 표본추출 방법, 조사 방법(면접, 전화, 인터넷 등), 설문지, 무응답자의 비율

3. 우리나라의 대표적 여론 조사 기관

- http://www.gallup.co.kr
- http://www.kric.com

보충 학습

신뢰도는 보통 95 %를 많이 사용한다. 신뢰도는 믿을 수 있는 정도이므로 신뢰도 100 %를 사용하는 것이 바람직할 것 같은데 신뢰도 95 %를 많이 사용하는 이유는 무엇일까?

신뢰도를 100 %에 가까운 99.7 %로 하면 신뢰구간은

$$\bar{x}-3\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\le m\le\bar{x}+3\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$\hat{p}-3\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}\le p\le\hat{p}+3\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}$$

이고, 신뢰도 95 %인 신뢰구간은

$$\bar{x}-1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\le m\le\bar{x}+1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$\hat{p}-1.96\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}\le p\le\hat{p}+1.96\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}$$

이다. 이때, 99.7 %의 신뢰구간의 길이 $6\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ 또는 $6\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}$은 95 %의 신뢰구간의 길이 $3.92\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ 또는 $3.92\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}$의 1.5배 이상이 된다.

신뢰구간의 길이는 짧을수록 좋은데 신뢰도를 5 % 정도 높이기 위하여 신뢰구간의 길이를 50 % 이상 늘려야 하는 것은 바람직하지 못하다.

예를 들어 이번 수학 시험 평균은 0점에서 100점 사이라고 한다면 신뢰도 100 %이지만 의미가 없어진다. 신뢰구간의 길이가 너무 길기 때문에 추정을 하는 의미가 사라지는 것이다. 그렇다고 신뢰구간의 길이를 무작정 짧게 할 수도 없다. 그럴려면 표본의 크기가 커져야 하는데 이는 통계 조사시 시간과 비용이 많이 든다.

이런 이유들로 신뢰도 95 %를 가장 많이 사용하는 것이다.

참고 | 통계적 사고방식

한 섬에 가득 들어 있는 콩의 개수를 일일이 세기는 어렵다. 그러나 한 홉의 콩의 개수를 세는 데는 5분도 걸리지 않는다.

한 홉에 들어 있는 콩의 개수가 500개이면 한 섬에 들어 있는 콩의 개수는

$500\times10\times10\times10=500000$(개)

임을 유추할 수 있다.

이와 같이 전체를 다 조사하지 않고 일부분만 조사하여 전체를 예측하는 것을 통계적 사고방식이라고 할 수 있다.

[참고] 한 섬 = 열 말, 한 말 = 열 되, 한 되 = 열 홉

모 둠 학 습

*각 모둠별로 토론하여 모둠 과제를 해결한 후, 발표자가 그 결과를 발표해 보세요.

- **학습 목표**_ 모비율의 신뢰구간을 구할 수 있다.
- **학습 방법**_ 신문, 방송, 인터넷에 발표된 여론 조사의 자료를 찾아보고, 각 모둠 과제를 해결한다.
- **모둠의 구성**_ 각자가 속한 모둠에 대하여 다음 표에 적어 보자.

모둠 이름	모둠 인원: 명 으뜸이: 발표자:
	모둠 구성원 이름:

| 모둠 과제1 | 오른쪽에 제시한 '원자력 발전에 대한 여론 조사'에 대하여 다음을 알아보자.

❶ 조사 대상: ____________

❷ 표본의 크기: ____________

❸ 신뢰도(신뢰수준): ____________

❹ 오차 범위: ____________

국민 3명 중 2명이 원전 확대 찬성
(원자력 여론 조사 결과)

국민 3명 중 2명은 '원전 비중을 현재보다 늘려야 한다(67.5%).'는 의견에 찬성하고, 거주지 내 원전 건설에 대해서도 '찬성하거나 지역 투자 규모를 보고 결정하겠다(67.4%).'는 의견을 피력하였다.

원자력 발전이 필요하다.		92.5 %
원자력 발전소가 안전하다.		63.4 %
원자력 발전 비중을 늘려야 한다.		67.5 %
원전 거주지 수용	거주 지역 내 원전 건설에 찬성한다.	34.6 %
	지역 발전 투자 금액을 보고 결정하겠다.	32.8 %

여론 조사 개요
- 조사 기간: 2008년 7월 12일
- 조사 대상: 전국 19세 이상 성인 남녀 1000명
- 오차 범위: 95 % 신뢰수준, 오차 범위 ±3.1 %

| 모둠 과제2 | '원자력 발전 비중을 늘려야 한다.' 라는 항목에 대하여 67.5 %가 찬성하였다.

이때, 오차 범위 ± 3.1 %, 즉 ± 0.031은 최대 오차 허용 범위인 $1.96\sqrt{\frac{0.5\times0.5}{1000}}$ 로 계산한 것이다.

이 항목에 대한 모비율 p를 신뢰도 95 %로 구간추정하면

$\square - 0.031 \le p \le \square + 0.031$

이다. $\square$ 안에 알맞은 수를 써넣어 보자.

| 모둠 과제3 | '원자력 발전소가 안전하다.' 는 항목에 대한 모비율 p를 신뢰도 95 %로 구간추정하여 보자.

논술/수행평가 과제

1. 신뢰도(신뢰수준) 95 %의 뜻을 말하여 보자.
2. 여러 가지 여론 조사의 자료를 찾아보고, 신뢰구간을 구하여 보자.

모둠 학습

| 모둠 과제1 |

❶ 조사 대상: **전국 19세 이상 성인 남녀 1000명**

❷ 표본의 크기: **1000**

❸ 신뢰도(신뢰수준): **95 %**

❹ 오차 범위: **±3.1 %**

| 모둠 과제2 |

'원자력 발전 비중을 늘려야 한다.' 라는 항목에 대하여 67.5 %가 찬성하였으므로 $\hat{p}$의 값은 0.675이다.

$\therefore \boxed{0.675} - 0.031 \le p \le \boxed{0.675} + 0.031$

| 모둠 과제3 |

'원자력 발전소가 안전하다.' 라는 항목에 대하여 63.4 %가 찬성하였으므로 $\hat{p}$의 값은 0.634이다.

따라서 모비율 p를 신뢰도 95 %로 구간추정하면

$0.634 - 0.031 \le p \le 0.634 + 0.031$

$\therefore \mathbf{0.603 \le p \le 0.665}$

[참고] 표본비율의 표준편차 $\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}$ 은 표본의 크기 n이 일정하면 $\hat{p}=\hat{q}=\frac{1}{2}$일 때 최댓값 $\sqrt{\frac{1}{4n}}$을 갖는다.

일반적으로 여론 조사에서 말하는 오차 범위는 신뢰도 95 %일 때의 $\pm 1.96\sqrt{\frac{1}{4n}}$ 의 값을 말한다.

논술 / 수행평가 과제 / 해설

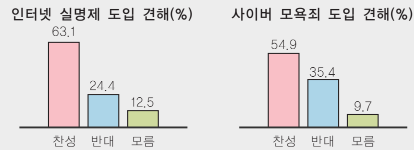
1. 크기 n인 표본을 여러 번 추출하여 신뢰구간을 만들 때, 모평균 m(또는 모비율 p)을 포함하는 것이 약 95 %라는 의미이다.

2.

"인터넷 실명제 찬성" 63 %…"사이버 모욕죄 도입해야" 55 %

우리 국민 10명 중 6명 이상은 인터넷 실명제 도입을 찬성하는 것으로 나타났다. 논란을 빚고 있는 '사이버 모욕죄' 신설에 대해서도 절반 이상이 '도입해야 한다.'는 의견을 보였다.

인터넷 실명제 도입에 대한 여론 조사를 실시한 결과, 전체 응답자의 63.1 %가 인터넷 실명제를 도입해야 한다고 답했다. 반대 의견은 24.4 %에 불과했다.



※ 여론 조사 개요
- 조사 기간 : 2008년 9월 7~8일
- 조사 대상 : 전국 19세 이상 성인 남녀 700명
- 오차 범위 : 신뢰도 95 %, 오차 범위 ±3.7 %
- 조사 의뢰 : ○○○

'인터넷 실명제 도입에 찬성한다.' 는 항목에 대한 모비율 p를 신뢰도 95 %로 구간추정하면

$\hat{p}=0.631$, 오차 범위는 ±3.7 %이므로

$0.631 - 0.037 \le p \le 0.631 + 0.037$

$\therefore 0.594 \le p \le 0.668$

중단원 확인하기

새로 나온 용어와 기호: 확률변수, 확률분포, 기댓값, 분산, 표준편차, 이항분포, 정규분포, 표준화, 모집단, 표본, 전수조사, 표본조사, 임의추출, 모평균, 표본평균, 모비율, 표본비율, 구간추정, $\mathrm{E}(X)$, $\mathrm{V}(X)$, $\sigma(X)$, $\mathrm{B}(n,\ p)$, $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$, $\mathrm{N}(0,\ 1)$

IV_2. 통계와 그 활용

확률변수의 평균과 표준편차

의사소통

1 한 개의 주사위를 던져서 1의 눈이 나오면 100원, 2의 눈이 나오면 200원, …, 6의 눈이 나오면 600원을 받는다고 하자. 350원을 지불하고 주사위를 한 번 던질 때, 받는 금액에서 지불한 금액을 뺀 값을 확률변수 X원이라고 하자. 이때, X의 평균과 표준편차를 구하여라.

눈	1	2	3	4	5	6
금액(원)	100	200	300	400	500	600
X(원)	-250	-150	-50	50	150	250

이항분포

계산

2 어느 핸드볼 선수의 슛 성공률이 60 %라고 한다. 이 선수가 한 시합에서 10회의 슛을 시도할 때, 성공 횟수의 평균과 표준편차를 구하여라.

정규분포의 활용

이해

3 어떤 과수원에서 생산된 포도 한 송이의 무게는 평균 168.5 g, 표준편차 5.5 g인 정규분포를 따른다고 한다. 이 과수원에서 생산된 포도 중 50송이를 조사할 때, 무게가 174 g 이상인 것은 약 몇 송이인가?

(단, 소수 첫째 자리에서 반올림한다.)

모평균의 추정

문제 해결

4 어떤 화훼 농가에서 생산하는 꽃의 개화 시간은 표준편차가 10시간인 정규분포를 따른다고 한다. 이 농가에서 생산한 꽃 100송이의 개화 시간을 조사하였더니 표본평균이 96시간이었다. 이 농가에서 생산하는 꽃의 평균 개화 시간 m(시간)을 신뢰도 95 %로 구간추정하여라.

모비율의 추정

문제 해결

5 어느 회사에서는 신제품을 시장에 내놓기에 앞서 이 제품의 선호도를 조사하기로 하였다. 625명을 임의추출하여 신제품의 선호도를 조사하였더니, 375명이 좋다고 응답하였다. 전체 국민의 몇 %가 이 신제품을 좋아할 것인지를 신뢰도 95 %로 구간추정하여라.

(단, 소수 넷째 자리에서 반올림한다.)

중단원 확인하기 / 풀이

1 $\mathrm{E}(X)=-250\times\frac{1}{6}+(-150)\times\frac{1}{6}$

$+(-50)\times\frac{1}{6}+50\times\frac{1}{6}+150\times\frac{1}{6}$

$+250\times\frac{1}{6}=0$

$\mathrm{E}(X^2)=(-250)^2\times\frac{1}{6}+(-150)^2\times\frac{1}{6}$

$+(-50)^2\times\frac{1}{6}+50^2\times\frac{1}{6}$

$+150^2\times\frac{1}{6}+250^2\times\frac{1}{6}=\frac{87500}{3}$

$\therefore \mathrm{V}(X)=\frac{87500}{3}-0^2=\frac{87500}{3}$

$\therefore \sigma(X)=\sqrt{\frac{87500}{3}}=\frac{50\sqrt{105}}{3}$

따라서 X의 평균은 **0**, 표준편차는 $\mathbf{\frac{50\sqrt{105}}{3}}$이다.

2 슛을 시도한 10회 중에서 성공하는 횟수를 확률변수 X라고 하면 X의 확률분포는 이항분포 $\mathrm{B}(10,\ 0.6)$을 따른다.

$\therefore \mathrm{E}(X)=10\times0.6=\mathbf{6}$

$\sigma(X)=\sqrt{10\times0.6\times0.4}=\mathbf{\sqrt{2.4}}$

3 이 과수원에서 생산된 포도 한 송이의 무게를 확률변수 X라고 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(168.5,\ 5.5^2)$을 따른다. 포도 한 송이의 무게가 174 g 이상일 확률은

$\mathrm{P}(X\geq174)$

$=\mathrm{P}\left(Z\geq\frac{174-168.5}{5.5}\right)=\mathrm{P}(Z\geq1)$

$=0.5-0.3413=0.1587$

이때, $50\times0.1587=7.935$이므로 포도 50송이 중 무게가 174 g 이상인 것은 **약 8송이**이다.

4 $n=100$, $\bar{x}=96$, $\sigma=10$이므로 신뢰도 95 %로 구간추정하면 신뢰구간은

$96-1.96\frac{10}{\sqrt{100}}\leq m\leq96+1.96\frac{10}{\sqrt{100}}$

$\therefore \mathbf{94.04\leq m\leq97.96}$

5 표본비율 $\hat{p}=\frac{375}{625}=0.6$이고, $n=625$는 충분히 크므로 표본비율 $\hat{p}$의 분포는 근사적으로 정규분포를 따른다.

따라서 모비율 p에 대한 신뢰도 95 %의 양 끝값은

$0.6-1.96\sqrt{\frac{0.6\times0.4}{625}}\fallingdotseq0.562$

$0.6+1.96\sqrt{\frac{0.6\times0.4}{625}}\fallingdotseq0.638$

따라서 전체 국민의 **56.2 %~63.8 %**가 이 신제품을 좋아할 것으로 추정된다.

중단원 평가 문제

정답과 풀이 p.247

01 바탕

검은 공 3개, 흰 공 3개가 들어 있는 상자에서 동시에 3개의 공을 꺼낼 때, 나오는 검은 공의 개수를 확률변수 X라고 하자. 이때, X의 확률분포를 표로 나타내어라.

02 기본

확률변수 X가 -1, 0, 1의 값을 가지고, X의 확률분포가

$$P(X=-1)=3a,\ P(X=0)=4a,\ P(X=1)=a$$

일 때, $P(X^2=1)$의 값은?

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{3}{4}$

03 기본

100원짜리 동전 2개와 10원짜리 동전 1개를 던져서 앞면이 나오는 동전을 상금으로 가지는 게임에서 받을 수 있는 금액의 기댓값은?

① 100원 ② 105원 ③ 110원 ④ 115원 ⑤ 120원

04 기본

확률변수 X에 대하여 $E(X)=\sqrt{15}$, $E(X^2)=96$일 때, X의 표준편차 $\sigma(X)$의 값은?

① $4\sqrt{5}$ ② 9 ③ $\sqrt{82}$ ④ $\sqrt{83}$ ⑤ $2\sqrt{21}$

05 바탕

타율이 2할인 야구 선수가 4번의 타석에서 세 번 이상 안타를 칠 확률을 구하여라.

06 기본

5 %의 불량률로 제품을 생산하는 기계에서 임의로 100개의 제품을 생산할 때, 나오는 불량품의 개수를 확률변수 X라고 하자. X의 평균과 분산을 구하여라.

07 기본

이항분포 $\mathrm{B}(n,\ p)$를 따르는 확률변수 X의 평균이 20, 표준편차가 2일 때, n의 값은?

① 21 ② 22 ③ 23 ④ 24 ⑤ 25

주머니에서 공을 하나 꺼낼 때 노란 공이 나올 확률이 $\frac{x}{x+4}$이므로 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(n,\ \frac{x}{x+4}\right)$를 따른다.

08 실력

노란 공이 x개, 파란 공이 4개 들어 있는 주머니에서 공을 1개 꺼내어 보고 다시 넣는 시행을 n번 반복할 때, 노란 공이 나오는 횟수 X의 평균은 12이고, 분산은 3이다. 이때, 노란 공의 개수 x와 시행 횟수 n의 합은?

① 24 ② 26 ③ 28 ④ 30 ⑤ 32

09 기본

확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(100,\ 20^2)$을 따를 때, 확률 $\mathrm{P}(X \le 80)$을 구하여라. (단, $\mathrm{P}(|Z| \le 1) = 0.6826$)

10 실력

확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(30,\ 2^2)$을 따를 때, $\mathrm{P}(27 \le X \le a) = 0.7745$를 만족하는 실수 a의 값은?

z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

① 29 ② 30 ③ 31
④ 32 ⑤ 33

11 기본

어떤 학급의 국어, 영어, 수학 성적은 오른쪽 표와 같고 성적의 분포는 정규분포를 이룬다고 한다. 세린이의 국어 점수가 85, 영어 점수가 82, 수학 점수가 92일 때, 학급 성적과 비교하여 3과목 중 상대적으로 성적이 좋은 과목부터 순서대로 나열한 것은?

과목	국어	영어	수학
평균	70	74	76
표준편차	15	16	18

① 국어, 영어, 수학 ② 국어, 수학, 영어
③ 수학, 국어, 영어 ④ 수학, 영어, 국어
⑤ 영어, 국어, 수학

합격자의 최저 점수를 k라고 하면 $\mathrm{P}(X \ge k) = \frac{350}{5000}$임을 이용한다.

12 실력

어느 회사에서 350명의 신입 사원을 선발하기 위하여 입사 시험을 실시하였다. 응시자 5000명의 성적은 평균이 700점, 표준편차가 40점인 정규분포를 따른다고 할 때, 합격자의 최저 점수를 구하여라.

z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
1.0	0.34
1.5	0.43
2.0	0.48

13 바탕

정규분포 $\mathrm{N}(5,\ 2^2)$을 따르는 모집단에서 크기 16인 표본을 임의추출할 때, 표본평균 $\overline{X}$가 4 이상 6 이하일 확률을 구하여라.

(단, $\mathrm{P}(0 \le Z \le 2) = 0.4772$)

모표준편차를 모를 때에는 표본의 표준편차를 사용한다.

14 기본

어느 지역에서 고등학생 100명을 임의추출하여 몸무게를 조사하였더니 표본평균은 56.5 kg, 표본표준편차는 6.3 kg이었다. 이 지역 고등학생의 몸무게의 평균을 신뢰도 95 %로 구간추정하여라.

15 기본

어느 지역 주민의 B형 간염의 감염 실태를 조사하기 위하여 400명을 임의추출하여 조사한 결과 10명이 감염된 것으로 나타났다. 이 지역 주민의 B형 간염의 감염율을 신뢰도 95 %로 구간추정하여라.

(단, 소수 넷째 자리에서 반올림한다.)

대단원 평가 문제

정답과 풀이 p.250

01

주사위를 360번 던져서 4의 눈이 나오는 횟수를 확률변수 X라고 할 때, X의 평균과 표준편차를 바르게 짝지은 것은?

① 60, 50 ② 60, $4\sqrt{2}$ ③ 60, $5\sqrt{2}$
④ 90, 50 ⑤ 90, $5\sqrt{2}$

02

어느 마을에서 배추를 재배하는 농가는 전체의 $\frac{5}{6}$, 무를 재배하는 농가는 전체의 $\frac{2}{3}$이고, 배추와 무를 모두 재배하는 농가는 전체의 $\frac{3}{5}$이다. 이 마을에서 한 농가를 임의로 골랐을 때, 이 농가가 배추 또는 무를 재배하는 농가일 확률은?

① $\frac{9}{10}$ ② $\frac{6}{15}$ ③ $\frac{5}{9}$
④ $\frac{1}{6}$ ⑤ $\frac{8}{15}$

03

5개의 제품 중에 2개의 불량품이 들어 있다. 이 중에서 2개의 제품을 동시에 꺼낼 때 나오는 불량품의 개수를 확률변수 X라고 할 때, X의 평균은?

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{4}{5}$ ③ 1
④ 2 ⑤ $\frac{7}{3}$

04

어느 회사 제품의 10 %가 3년 이내에 고장이 난다고 한다. 이 회사 제품 100개에 대하여 3년 이내에 고장나는 제품의 수를 확률변수 X라고 할 때, $\mathrm{E}(X^2)$의 값은?

① 90 ② 94 ③ 100
④ 109 ⑤ 115

05

1부터 10까지의 숫자가 각각 적힌 10장의 카드 중에서 2장을 뽑을 때, 2장의 카드에 적힌 수의 곱이 짝수일 확률은?

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ $\frac{4}{5}$
④ $\frac{5}{7}$ ⑤ $\frac{7}{9}$

06

동욱이네 동아리에는 남학생 6명, 여학생 4명이 있다. 동아리 방 청소 당번 2명을 뽑을 때, 2명 모두 남학생이거나 2명 모두 여학생일 확률은?

① $\frac{2}{15}$ ② $\frac{4}{15}$ ③ $\frac{7}{15}$
④ $\frac{8}{15}$ ⑤ $\frac{11}{15}$

07

어느 공장에서 생산하는 제품의 무게는 정규분포를 따른다고 한다. 이 제품 25개를 임의추출하여 무게를 조사하였더니 표본평균이 32.2 g, 표본표준편차가 0.5 g이었고, 이 제품의 평균 무게 m을 95 %의 신뢰도로 추정한 신뢰구간이 $\alpha \le m \le \beta$일 때, $\beta - \alpha$의 값은?

① 0.392 ② 0.412 ③ 0.498
④ 0.534 ⑤ 0.615

08

두 사람이 흰 공 4개, 검은 공 5개가 들어 있는 주머니에서 한 번에 한 개씩 번갈아 뽑아서 흰 공이 먼저 나온 사람이 이기는 것으로 할 때, 먼저 꺼내기 시작한 사람이 이길 확률은?

① $\frac{5}{9}$ ② $\frac{10}{21}$ ③ $\frac{20}{21}$
④ $\frac{32}{63}$ ⑤ $\frac{40}{63}$

09

어느 과수원에서 생산하는 메론 1개의 무게는 평균이 500 g, 표준편차가 20 g인 정규분포를 따른다고 한다. 25개의 메론을 임의추출하여 그 무게를 조사할 때, 표본평균이 490 g 이상 510 g 이하일 확률은? (단, $\mathrm{P}(0 \le Z \le 2.5) = 0.4938$)

① 0.4938 ② 0.5228 ③ 0.7056
④ 0.8123 ⑤ 0.9876

10

두 개의 주사위를 던져서 나온 눈의 수를 각각 a, b라고 할 때, 이차방정식 $x^2+ax+b=0$이 실근을 가질 확률은?

① $\frac{5}{18}$ ② $\frac{11}{18}$ ③ $\frac{5}{24}$
④ $\frac{19}{36}$ ⑤ $\frac{23}{36}$

11

어느 지역의 주민들 중에서 버스로 출퇴근하는 사람의 비율을 조사하기 위하여 400명을 표본으로 택하였다. 이 중에서 320명이 버스를 이용한다고 응답하였을 때, 이 지역 주민의 버스 이용률 p를 신뢰도 95 %로 구간추정한 것은?

① $0.6998 \le p \le 0.8392$
② $0.6998 \le p \le 0.9145$
③ $0.7608 \le p \le 0.8392$
④ $0.7608 \le p \le 0.9145$
⑤ $0.8512 \le p \le 0.9145$

12

어느 대리점에서 판매한 가전 제품 중 10 %는 1년 이내에 무상 보증 수리를 해준다고 한다. 이 대리점에서 판매한 400개의 제품 중에서 1년 이내에 무상 보증 수리를 해주는 제품이 25개 이하일 확률은? (단, $\mathrm{P}(0 \le Z \le 2.5)=0.4938$)

① 0.0062 ② 0.0668 ③ 0.3085
④ 0.6915 ⑤ 0.9938

13

정규분포 $\mathrm{N}(10,\ 4)$인 모집단에서 크기 n인 표본을 임의추출하여 그 표본평균을 $\overline{X}$라고 할 때, 다음을 만족하는 n의 최솟값은?

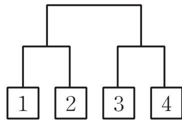
z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
1.81	0.465
1.96	0.475
2.05	0.480

$$\mathrm{P}(9 \le \overline{X} \le 11) \ge 0.95$$

① 12 ② 13 ③ 14
④ 15 ⑤ 16

14 UP!!

A, B, C, D 4명이 그림과 같은 대진표에 따라 경기를 한다. 이들은 숫자 1, 2, 3, 4가 각각 한 개씩 적힌 카드가 들어 있는 주머니에서 카드를 임의로 하나씩 꺼내어 나온 번호에 위치한다. A가 C, D와 경기할 때 이길 확률이 모두 $\frac{2}{3}$이고, B가 C, D와 경기할 때 이길 확률이 모두 $\frac{1}{2}$이라고 하자. 이때, A와 B가 결승에서 만날 확률은?



① $\frac{2}{9}$ ② $\frac{1}{6}$ ③ $\frac{2}{3}$
④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

15 UP!!

한 개의 주사위를 36번 던질 때, 1의 눈이 나오는 횟수를 X라고 한다. 이때, $\mathrm{E}((X-a)^2)$의 최솟값이 b일 때, $a+b$의 값은?

① 7 ② 8 ③ 9
④ 10 ⑤ 11

16 서술형

숫자 1, 2, 3, ⋯, n이 각각 적힌 n장의 카드에서 한 장을 뽑을 때, 그 카드에 적힌 숫자를 확률변수 X라고 하자. X의 평균과 분산을 구하여라.

17 서술형

1000명이 응시한 어떤 어학 시험의 점수는 평균이 600점, 표준편차가 75점인 정규분포를 따른다고 한다. 다음 물음에 답하여라.

(1) 700점 이상인 사람은 약 몇 명인가?
(단, $\mathrm{P}(0 \le Z \le 1.33) = 0.4082$)

(2) 상위 10 %에 들기 위한 최저 점수는 몇 점인가?
(단, $\mathrm{P}(0 \le Z \le 1.28) = 0.4$)

18

어떤 정책에 대한 찬성률 p를 신뢰도 95 %로 구간 추정하려고 한다. 이때, 신뢰구간의 최대 오차 범위 $1.96\sqrt{\frac{1}{4n}}$을 0.0392 이하로 하기 위한 표본의 크기 n의 최솟값을 구하여라.

IV 확률과 통계

중단원 평가 문제

▶ 1. 확률과 그 활용 / P_139

01 8개의 문자를 일렬로 나열하는 경우의 수는
$8!$가지
홀수 번째 자리 4개 중 3개를 택하여 모음 i, a, e를 배열하는 경우의 수는 ${}_4P_3$가지이고, 나머지 5개의 자리에 자음 t, r, n, g, l을 배열하는 경우의 수는 $5!$가지이므로 모음이 홀수 번째 자리에 오게 되는 경우의 수는
${}_4P_3 \times 5!$(가지)
따라서 구하는 확률은
$\dfrac{{}_4P_3 \times 5!}{8!} = \dfrac{4 \times 3 \times 2}{8 \times 7 \times 6} = \dfrac{1}{14}$

답 ③

02 6명의 학생이 일렬로 서는 경우의 수는
$6! = 720$(가지)
남여남여남여, 여남여남여남의 순서로 서는 두 가지 경우로 $3! \times 3! \times 2 = 72$(가지)
따라서 구하는 확률은 $\dfrac{72}{720} = \dfrac{1}{10}$

답 ①

03 10개의 공 중에서 3개의 공을 꺼내는 경우의 수는
${}_{10}C_3 = \dfrac{10 \times 9 \times 8}{3 \times 2 \times 1} = 120$(가지)
1에서 5까지 적힌 공 중에서 2개를 꺼내고 6이 적힌 공을 꺼내면 나온 번호의 최댓값이 6이 된다.
나온 번호의 최댓값이 6인 경우의 수는
${}_5C_2 = \dfrac{5 \times 4}{2 \times 1} = 10$(가지)
따라서 구하는 확률은 $\dfrac{10}{120} = \dfrac{1}{12}$

답 ②

04 동전 12개에서 6개의 동전을 뽑는 경우의 수는
${}_{12}C_6 = 924$(가지)이고, 이 중에서 금액의 합이 500원 이상인 경우는 다음과 같다.
(i) 100원짜리 4개, 50원짜리 2개
${}_6C_4 \cdot {}_4C_2 = 90$(가지)
(ii) 100원짜리 5개, 10원짜리나 50원짜리에서 아무거나 1개
${}_6C_5 \cdot {}_6C_1 = 36$(가지)
(iii) 100원짜리 6개
${}_6C_6 = 1$(가지)
따라서 구하는 확률은 $\dfrac{90+36+1}{924} = \dfrac{127}{924}$

답 $\dfrac{127}{924}$

05 구하는 안타의 개수를 x라고 하면 타율이 0.295이므로
$\dfrac{x}{200} = 0.295 \quad \therefore x = 59$
따라서 이 선수가 이번 시즌에 200번의 타석에서 칠 수 있는 안타수는 59개로 추측할 수 있다.

답 59개

06 흰 공이 나올 확률은 $\dfrac{250}{1000} = \dfrac{1}{4}$
따라서 $\dfrac{1}{4} = \dfrac{3}{3+4+n}$이므로
$3+4+n = 12 \quad \therefore n = 5$

답 ⑤

07 (1) 1부터 300까지의 자연수 중에서 3의 배수가 나오는 경우는
3, 6, 9, ⋯, 297, 300
즉, 3×1, 3×2, ⋯, 3×99, 3×100으로 100가지이다.
따라서 그 확률은 $\dfrac{100}{300} = \dfrac{1}{3}$
(2) 1부터 300까지의 자연수 중에서 4의 배수가 나오는 경우는
4, 8, 12, ⋯, 296, 300

즉, 4×1, 4×2, $\cdots$, 4×74, 4×75로 75가지이다.

따라서 그 확률은 $\frac{75}{300}=\frac{1}{4}$

(3) 3의 배수가 나오는 사건을 A, 4의 배수가 나오는 사건을 B라고 하면 $A\cap B$는 3의 배수이면서 4의 배수, 즉 3과 4의 최소공배수인 12의 배수가 나오는 사건이다.

$A\cap B=\{12, 24, \cdots, 288, 300\}$에서 $n(A\cap B)=25$

$\therefore \mathrm{P}(A\cap B)=\frac{25}{300}=\frac{1}{12}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$

$=\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{12}=\frac{1}{2}$

답 (1) $\frac{1}{3}$ (2) $\frac{1}{4}$ (3) $\frac{1}{2}$

08 서로 다른 두 개의 주사위를 동시에 던질 때, 나오는 모든 경우의 수는 $6\times6=36$(가지)

(1) 두 눈의 수의 합이 6이 되는 경우의 수는 $(1, 5)$, $(2, 4)$, $(3, 3)$, $(4, 2)$, $(5, 1)$의 5가지

두 눈의 수의 합이 8이 되는 경우의 수는 $(2, 6)$, $(3, 5)$, $(4, 4)$, $(5, 3)$, $(6, 2)$의 5가지

따라서 구하는 확률은

$\frac{5}{36}+\frac{5}{36}=\frac{10}{36}=\frac{5}{18}$

(2) 두 눈의 수의 합이 3 이하인 경우의 수는 $(1, 1)$, $(1, 2)$, $(2, 1)$의 3가지

두 눈의 수의 합이 11 이상인 경우의 수는 $(5, 6)$, $(6, 5)$, $(6, 6)$의 3가지

따라서 구하는 확률은

$\frac{3}{36}+\frac{3}{36}=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$

답 (1) $\frac{5}{18}$ (2) $\frac{1}{6}$

09 (1) 10개의 제비 중에 당첨 제비가 3개 들어 있으므로 구하는 확률은 $\frac{3}{10}$

(2) 갑이 당첨 제비를 뽑으면 을은 남아 있는 당첨 제비 2개 중 하나를 뽑아야 한다.

따라서 구하는 확률은 $\frac{3}{10}\times\frac{2}{9}=\frac{1}{15}$

(3) 갑이 당첨 제비가 아닌 7개 중 하나를 뽑고, 을이 당첨 제비 3개 중 하나를 뽑아야 한다.

따라서 구하는 확률은

$\frac{7}{10}\times\frac{3}{9}=\frac{7}{30}$

(4) 을이 당첨되는 경우는 (2) 또는 (3)의 경우이므로 구하는 확률은

$\frac{1}{15}+\frac{7}{30}=\frac{3}{10}$

답 (1) $\frac{3}{10}$ (2) $\frac{1}{15}$ (3) $\frac{7}{30}$ (4) $\frac{3}{10}$

10 주머니에서 3개의 공을 꺼내는 모든 경우의 수는 ${}_9\mathrm{C}_3$가지

(1) 붉은 공만 3개가 나오는 경우의 수는 ${}_6\mathrm{C}_3$가지이므로 구하는 확률은

$\frac{{}_6\mathrm{C}_3}{{}_9\mathrm{C}_3}=\frac{5}{21}$

(2) 붉은 공 1개, 흰 공 2개가 나올 확률은

$\frac{{}_6\mathrm{C}_1\cdot{}_3\mathrm{C}_2}{{}_9\mathrm{C}_3}=\frac{3}{14}$

붉은 공 2개, 흰 공 1개가 나올 확률은

$\frac{{}_6\mathrm{C}_2\cdot{}_3\mathrm{C}_1}{{}_9\mathrm{C}_3}=\frac{15}{28}$

따라서 구하는 확률은

$\frac{3}{14}+\frac{15}{28}=\frac{3}{4}$

답 (1) $\frac{5}{21}$ (2) $\frac{3}{4}$

11 (i) 세 사람이 모두 같은 것을 내는 경우는 (가위, 가위, 가위), (바위, 바위, 바위), (보, 보, 보)

따라서 구하는 확률은 $\frac{3}{27}=\frac{1}{9}$

(ii) 세 사람이 모두 다른 것을 내는 경우는
(가위, 바위, 보), (가위, 보, 바위),
(바위, 가위, 보), (바위, 보, 가위),
(보, 가위, 바위), (보, 바위, 가위)
따라서 구하는 확률은 $\frac{6}{27}=\frac{2}{9}$

따라서 비길 확률은 $\frac{1}{9}+\frac{2}{9}=\frac{1}{3}$

답 ④

12 $\mathrm{P}(B^C)=\frac{1}{3}$에서

$\mathrm{P}(B)=1-\mathrm{P}(B^C)=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$

이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cup B)$

$=\frac{1}{4}+\frac{2}{3}-\frac{1}{2}=\frac{5}{12}$

답 ③

13 (1) 두 공이 모두 검은 공일 확률은

$\frac{5}{8}\times\frac{5}{8}=\frac{25}{64}$

두 공이 모두 흰 공일 확률은

$\frac{3}{8}\times\frac{3}{8}=\frac{9}{64}$

따라서 구하는 확률은

$\frac{25}{64}+\frac{9}{64}=\frac{34}{64}=\frac{17}{32}$

(2) 두 공의 색이 다른 경우는 (1)의 여사건이므로 구하는 확률은

$1-\frac{17}{32}=\frac{15}{32}$

답 (1) $\frac{17}{32}$ (2) $\frac{15}{32}$

14 적어도 한쪽 끝에 여학생을 세우는 사건은 양쪽 끝에 모두 남학생을 세우는 사건의 여사건이므로 구하는 확률은

$1-\frac{{}_3\mathrm{P}_2\times 3!}{5!}=1-\frac{3}{10}=\frac{7}{10}$

답 ③

15 갑, 을, 병이 수학 문제를 맞히지 못할 확률은 각각 $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{3}$이다.

갑, 을 두 명이 맞히고, 병이 맞히지 못할 확률은

$\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}=\frac{6}{24}$

을, 병 두 명이 맞히고, 갑이 맞히지 못할 확률은

$\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{3}{24}$

병, 갑 두 명이 맞히고, 을이 맞히지 못할 확률은

$\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{24}$

갑, 을, 병 세 명이 모두 맞힐 확률은

$\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{3}{24}$

따라서 구하는 확률은

$\frac{6}{24}+\frac{3}{24}+\frac{1}{24}+\frac{3}{24}=\frac{13}{24}$

답 $\frac{13}{24}$

|다른 풀이|
적어도 두 명이 맞히는 경우는 모두 틀린 경우와 한 명씩만 맞힌 경우의 여사건임을 이용해도 된다.

16 10개의 구슬 중 2개를 꺼내는 경우의 수는 ${}_{10}\mathrm{C}_2$가지

적어도 한 개가 노란 구슬인 사건을 A라고 하면 2개가 모두 흰 구슬인 사건은 A^C이다. 이때, 노란 구슬의 개수를 n개라고 하면 A^C의 경우의 수는 ${}_{10-n}\mathrm{C}_2$가지이므로

$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)$

$=1-\frac{{}_{10-n}\mathrm{C}_2}{{}_{10}\mathrm{C}_2}=\frac{8}{15}$

${}_{10-n}\mathrm{C}_2=\frac{7}{15}\times{}_{10}\mathrm{C}_2$에서

$\frac{(10-n)(9-n)}{2}=21$

$(10-n)(9-n)=42=7\times 6$

$10-n=7 \quad \therefore n=3$

따라서 노란 구슬의 개수는 3개이다.

답 ①

|다른 풀이|

흰 구슬의 개수를 n개라고 하면

$1-\frac{{}_{n}C_{2}}{{}_{10}C_{2}}=\frac{8}{15}$, $\frac{{}_{n}C_{2}}{{}_{10}C_{2}}=\frac{7}{15}$

$\frac{n(n-1)}{10\cdot 9}=\frac{7}{15}$, $n(n-1)=7\times 6$

$\therefore n=7$

따라서 흰 구슬이 7개이므로 노란 구슬의 개수는

$10-7=3$(개)

▶ 2. 통계와 그 활용 / P_182

01 확률변수 X가 가지는 값은 0, 1, 2, 3이므로 각각의 확률을 구하면

$\mathrm{P}(X=0)=\frac{{}_{3}C_{0}\times{}_{3}C_{3}}{{}_{6}C_{3}}=\frac{1}{20}$

$\mathrm{P}(X=1)=\frac{{}_{3}C_{1}\times{}_{3}C_{2}}{{}_{6}C_{3}}=\frac{9}{20}$

$\mathrm{P}(X=2)=\frac{{}_{3}C_{2}\times{}_{3}C_{1}}{{}_{6}C_{3}}=\frac{9}{20}$

$\mathrm{P}(X=3)=\frac{{}_{3}C_{3}\times{}_{3}C_{0}}{{}_{6}C_{3}}=\frac{1}{20}$

따라서 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	3	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{20}$	$\frac{9}{20}$	$\frac{9}{20}$	$\frac{1}{20}$	1

답 풀이 참조

02 확률분포의 성질에 의하여

$\mathrm{P}(X=-1)+\mathrm{P}(X=0)+\mathrm{P}(X=1)=1$

$3a+4a+a=1$

$\therefore a=\frac{1}{8}$

$\therefore \mathrm{P}(X^2=1)=\mathrm{P}(X=1 \text{ 또는 } X=-1)$

$=\mathrm{P}(X=1)+\mathrm{P}(X=-1)$

$=\frac{1}{8}+\frac{3}{8}=\frac{1}{2}$

답 ③

03 동전의 앞면을 H, 뒷면을 T라고 할 때, 100원짜리 동전 2개와 10원짜리 동전 1개를 던져서 나오는 결과를 표로 나타내면 다음과 같다.

100원	100원	10원	받는 금액(원)
H	H	H	210
H	H	T	200
H	T	H	110
T	H	H	110
H	T	T	100
T	H	T	100
T	T	H	10
T	T	T	0

게임에서 받을 수 있는 금액을 X라고 하면 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 0, 10, 100, 110, 200, 210이고, 그 확률은 각각

$\mathrm{P}(X=0)=\frac{1}{8}$, $\mathrm{P}(X=10)=\frac{1}{8}$

$\mathrm{P}(X=100)=\frac{2}{8}$, $\mathrm{P}(X=110)=\frac{2}{8}$

$\mathrm{P}(X=200)=\frac{1}{8}$, $\mathrm{P}(X=210)=\frac{1}{8}$

이므로 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	10	100	110	200	210	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	1

따라서 구하는 기댓값은

$\mathrm{E}(X)=0\times\frac{1}{8}+10\times\frac{1}{8}+100\times\frac{2}{8}$

$+110\times\frac{2}{8}+200\times\frac{1}{8}+210\times\frac{1}{8}$

$=105$(원)

답 ②

04 $\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$이므로

$\mathrm{V}(X)=96-15=81$

$\therefore \sigma(X)=\sqrt{\mathrm{V}(X)}$

$=\sqrt{81}=9$

답 ②

05 안타를 친 횟수를 확률변수 X라고 하면 X의 확률분포는 이항분포 $B\left(4, \frac{1}{5}\right)$을 따른다.

따라서 X의 확률분포는

$P(X=x)={}_4C_x(0.2)^x(0.8)^{4-x}(x=0, 1, 2, 3, 4)$

이고, 세 번 이상 안타를 칠 확률은

$$\begin{aligned}P(X\geq 3)&=P(X=3)+P(X=4)\\&={}_4C_3(0.2)^3(0.8)^1+{}_4C_4(0.2)^4(0.8)^0\\&=0.0256+0.0016\\&=0.0272\end{aligned}$$

답 0.0272

06 확률변수 X는 이항분포 $B(100, 0.05)$를 따르므로

$E(X)=100\times0.05=5$

$V(X)=100\times0.05\times0.95=4.75$

답 평균: 5, 분산: 4.75

07 확률변수 X가 이항분포 $B(n, p)$를 따르므로

$E(X)=np=20$ ······㉠

$\sigma(X)=\sqrt{np(1-p)}=2$ ······㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$\sqrt{20(1-p)}=2$, $20(1-p)=4$

$\therefore p=\frac{4}{5}$

$p=\frac{4}{5}$를 ㉠에 대입하면 $\frac{4}{5}n=20$

$\therefore n=25$

답 ⑤

08 노란 공이 x개, 파란 공이 4개 들어 있는 주머니에서 1개의 공을 꺼낼 때 노란 공을 꺼낼 확률은 $\frac{x}{x+4}$이다. 이러한 시행을 n번 반복하므로 확률변수 X는 이항분포 $B\left(n, \frac{x}{x+4}\right)$를 따른다.

이때, X의 평균이 12, 분산이 3이므로

$E(X)=n\cdot\frac{x}{x+4}=12$ ······㉠

$V(X)=n\cdot\frac{x}{x+4}\cdot\left(1-\frac{x}{x+4}\right)=3$ ······㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$12\left(1-\frac{x}{x+4}\right)=3$, $\frac{4}{x+4}=\frac{1}{4}$

$\therefore x=12$

$x=12$를 ㉠에 대입하면

$n\cdot\frac{12}{12+4}=12$ $\therefore n=16$

$\therefore x+n=12+16=28$

답 ③

09 확률변수 $Z=\frac{X-100}{20}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따르므로

$$\begin{aligned}P(X\leq 80)&=P\left(Z\leq\frac{80-100}{20}\right)\\&=P(Z\leq -1)\\&=P(Z\geq 1)\\&=0.5-P(0\leq Z\leq 1)\end{aligned}$$

$P(|Z|\leq 1)=0.6826$에서

$P(-1\leq Z\leq 1)=0.6826$

$2P(0\leq Z\leq 1)=0.6826$

$\therefore P(0\leq Z\leq 1)=0.3413$

$\therefore P(X\leq 80)=0.5-0.3413=0.1587$

답 0.1587

10 확률변수 $Z=\frac{X-30}{2}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따르므로

$P(27\leq X\leq a)=0.7745$에서

$P\left(\frac{27-30}{2}\leq Z\leq\frac{a-30}{2}\right)=0.7745$

$P\left(-1.5\leq Z\leq\frac{a-30}{2}\right)=0.7745$

$P(-1.5\leq Z\leq 0)+P\left(0\leq Z\leq\frac{a-30}{2}\right)=0.7745$

$P(0\leq Z\leq 1.5)+P\left(0\leq Z\leq\frac{a-30}{2}\right)=0.7745$

$0.4332+P\left(0\leq Z\leq\frac{a-30}{2}\right)=0.7745$

$\therefore P\left(0\leq Z\leq\frac{a-30}{2}\right)=0.3413$

그런데 표준정규분포표에서

$P(0 \le Z \le 1) = 0.3413$이므로

$\frac{a-30}{2} = 1 \qquad \therefore a = 32$

답 ④

11 국어, 영어, 수학 성적을 각각 X_1, X_2, X_3이라고 하면 확률변수 X_1, X_2, X_3은 각각 정규분포 $N(70,\ 15^2)$, $N(74,\ 16^2)$, $N(76,\ 18^2)$을 따르므로 확률변수 Z_1, Z_2, Z_3으로 각각 표준화하면

$Z_1 = \frac{X_1 - 70}{15} = \frac{85-70}{15} = 1$

$Z_2 = \frac{X_2 - 74}{16} = \frac{82-74}{16} = \frac{1}{2}$

$Z_3 = \frac{X_3 - 76}{18} = \frac{92-76}{18} = \frac{8}{9}$

$\therefore Z_2 < Z_3 < Z_1$

따라서 상대적으로 성적이 좋은 과목부터 순서대로 나열하면 국어, 수학, 영어이다.

답 ②

12 응시자의 점수를 확률변수 X라고 하면 X는 정규분포 $N(700,\ 40^2)$을 따르므로 확률변수 $Z = \frac{X-700}{40}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다.

합격자의 최저 점수를 k라고 하면

$P(X \ge k) = \frac{350}{5000} = 0.07$에서

$P\left(Z \ge \frac{k-700}{40}\right) = 0.07$

$0.5 - P\left(0 \le Z \le \frac{k-700}{40}\right) = 0.07$

$\therefore P\left(0 \le Z \le \frac{k-700}{40}\right) = 0.43$

그런데 주어진 표준정규분포표에서

$P(0 \le Z \le 1.5) = 0.43$이므로

$\frac{k-700}{40} = 1.5 \qquad \therefore k = 760$

따라서 합격자의 최저 점수는 760점이다.

답 760점

13 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $N\left(5,\ \frac{2^2}{16}\right)$을 따르므로 확률변수 $Z = \frac{\overline{X}-5}{\frac{1}{2}}$로 놓으면 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다.

따라서 구하는 확률은

$P(4 \le \overline{X} \le 6) = P\left(\frac{4-5}{\frac{1}{2}} \le \frac{\overline{X}-5}{\frac{1}{2}} \le \frac{6-5}{\frac{1}{2}}\right)$

$= P(-2 \le Z \le 2)$

$= 2P(0 \le Z \le 2)$

$= 2 \times 0.4772$

$= 0.9544$

답 0.9544

14 $n = 100$, $\overline{x} = 56.5$, $\sigma = 6.3$이므로 신뢰도 95 %로 모평균 m의 범위를 구간추정하면

$56.5 - 1.96 \times \frac{6.3}{\sqrt{100}} \le m \le 56.5 + 1.96 \times \frac{6.3}{\sqrt{100}}$

$56.5 - 1.2348 \le m \le 56.5 + 1.2348$

$\therefore 55.2652 \le m \le 57.7348$

답 $55.2652 \le m \le 57.7348$

15 $n = 400$, 표본비율 $\hat{p} = \frac{10}{400} = 0.025$이고, $n\hat{p} \ge 5$이므로 표본비율 $\hat{p}$의 분포는 근사적으로 정규분포를 따른다.

따라서 모비율 p에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간의 양 끝값은

$\hat{p} - 1.96\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}$

$= 0.025 - 1.96\sqrt{\frac{0.025 \times 0.975}{400}}$

$\fallingdotseq 0.025 - 0.015$

$= 0.01$

$\hat{p} + 1.96\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}$

$= 0.025 + 1.96\sqrt{\frac{0.025 \times 0.975}{400}}$

$\fallingdotseq 0.025 + 0.015$

$= 0.04$

$\therefore 0.01 \le p \le 0.04$

따라서 이 지역 주민의 1 %~4 %가 B형 간염에 감염되었을 것으로 추정된다.

답 1 %~4 %

대단원 평가 문제 p.186~189

01 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(360, \frac{1}{6}\right)$을 따르므로

$\mathrm{E}(X)=360\times\frac{1}{6}=60$

$\mathrm{V}(X)=360\times\frac{1}{6}\times\frac{5}{6}=50$

$\sigma(X)=\sqrt{\mathrm{V}(X)}=\sqrt{50}=5\sqrt{2}$

답 ③

02 배추를 재배하는 농가가 뽑힐 사건을 A, 무를 재배하는 농가가 뽑힐 사건을 B라고 하면

$\mathrm{P}(A)=\frac{5}{6}$, $\mathrm{P}(B)=\frac{2}{3}$

이때, 배추와 무를 모두 재배하는 농가는 $A\cap B$이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{3}{5}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)+\mathrm{P}(A\cap B)$

$=\frac{5}{6}+\frac{2}{3}-\frac{3}{5}$

$=\frac{9}{10}$

답 ①

03 확률변수 X가 가지는 값은 0, 1, 2이므로 그 각각의 확률을 구하면

$\mathrm{P}(X=0)=\frac{{}_3\mathrm{C}_2\times{}_2\mathrm{C}_0}{{}_5\mathrm{C}_2}=\frac{3}{10}$

$\mathrm{P}(X=1)=\frac{{}_3\mathrm{C}_1\times{}_2\mathrm{C}_1}{{}_5\mathrm{C}_2}=\frac{6}{10}$

$\mathrm{P}(X=2)=\frac{{}_3\mathrm{C}_0\times{}_2\mathrm{C}_2}{{}_5\mathrm{C}_2}=\frac{1}{10}$

따라서 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{3}{10}$	$\frac{6}{10}$	$\frac{1}{10}$	1

$\therefore \mathrm{E}(X)=0\times\frac{3}{10}+1\times\frac{6}{10}+2\times\frac{1}{10}$

$=\frac{4}{5}$

답 ②

04 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}(100,\ 0.1)$을 따르므로

$\mathrm{E}(X)=100\times0.1=10$

$\mathrm{V}(X)=100\times0.1\times0.9=9$

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$이므로

$\mathrm{E}(X^2)=\mathrm{V}(X)+\{\mathrm{E}(X)\}^2=109$

답 ④

05 2장의 카드에 적힌 수의 곱이 짝수인 사건을 A라고 하면 2장의 카드에 적힌 수의 곱이 홀수인 사건은 A^C이다.

사건 A의 경우는 (홀수, 짝수), (짝수, 홀수), (짝수, 짝수)의 3가지이고, 사건 A^C의 경우는 (홀수, 홀수)의 1가지이므로 여사건의 확률을 이용하는 것이 더 편리하다.

10장의 카드 중 2장을 뽑는 경우의 수는 ${}_{10}\mathrm{C}_2$가지이고, 홀수 1, 3, 5, 7, 9의 5장의 카드 중 2장을 뽑는 경우의 수는 ${}_5\mathrm{C}_2$가지이므로

$\mathrm{P}(A^C)=\frac{{}_5\mathrm{C}_2}{{}_{10}\mathrm{C}_2}=\frac{2}{9}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)$

$=1-\frac{2}{9}=\frac{7}{9}$

답 ⑤

06 2명 모두 남학생일 확률은

$\frac{{}_6C_2}{{}_{10}C_2}=\frac{15}{45}$

2명 모두 여학생일 확률은

$\frac{{}_4C_2}{{}_{10}C_2}=\frac{6}{45}$

따라서 구하는 확률은

$\frac{15}{45}+\frac{6}{45}=\frac{21}{45}=\frac{7}{15}$

답 ③

07 $n=25$, $\bar{x}=32.2$, $\sigma=0.5$이므로 신뢰도 95 %로 구간추정하면

$32.2-1.96\times\frac{0.5}{\sqrt{25}}\le m\le 32.2+1.96\times\frac{0.5}{\sqrt{25}}$

$32.2-0.196\le m\le 32.2+0.196$

$\therefore 32.004\le m\le 32.396$

$\therefore \beta-\alpha=32.396-32.004=0.392$

답 ①

08 흰 공이 나오는 사건을 A, 검은 공이 나오는 사건을 B라고 할 때, 먼저 꺼내기 시작한 사람이 흰 공을 뽑는 경우와 확률은 다음과 같다.

(i) A: $\frac{4}{9}$

(ii) BBA: $\frac{5}{9}\times\frac{4}{8}\times\frac{4}{7}=\frac{10}{63}$

(iii) $BBBBA$: $\frac{5}{9}\times\frac{4}{8}\times\frac{3}{7}\times\frac{2}{6}\times\frac{4}{5}=\frac{2}{63}$

따라서 구하는 확률은

$\frac{4}{9}+\frac{10}{63}+\frac{2}{63}=\frac{40}{63}$

답 ⑤

09 $m=500$, $\sigma=20$, $n=25$이므로 표본평균 $\overline{X}$는

$E(\overline{X})=m=500$, $\sigma(\overline{X})=\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=\frac{20}{\sqrt{25}}=4$

인 정규분포 $N(500,\ 4^2)$을 따른다.

이때, 확률변수 $Z=\frac{\overline{X}-500}{4}$로 놓으면 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따르므로

$P(490\le\overline{X}\le 510)$

$=P\left(\frac{490-500}{4}\le\frac{\overline{X}-500}{4}\le\frac{510-500}{4}\right)$

$=P(-2.5\le Z\le 2.5)$

$=2P(0\le Z\le 2.5)$

$=2\times 0.4938=0.9876$

답 ⑤

10 이차방정식 $x^2+ax+b=0$이 실근을 가지려면

$D=a^2-4b\ge 0 \qquad \therefore a^2\ge 4b$

$a=1$일 때, b는 없다.

$a=2$일 때, $b=1$

$a=3$일 때, $b=1,\ 2$

$a=4$일 때, $b=1,\ 2,\ 3,\ 4$

$a=5$일 때, $b=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6$

$a=6$일 때, $b=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6$

따라서 $a^2\ge 4b$를 만족하는 순서쌍 $(a,\ b)$의 개수는 19개이므로 구하는 확률은 $\frac{19}{36}$

답 ④

11 $n=400$, 표본비율 $\hat{p}=\frac{320}{400}=0.8$이고, $n\hat{p}\ge 5$이므로 표본비율 $\hat{p}$의 분포는 근사적으로 정규분포를 따른다.

따라서 모비율 p에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간의 양 끝값은

$\hat{p}-1.96\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}=0.8-1.96\sqrt{\frac{0.8\times 0.2}{400}}$

$=0.8-0.0392$

$=0.7608$

$\hat{p}+1.96\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}=0.8+1.96\sqrt{\frac{0.8\times 0.2}{400}}$

$=0.8+0.0392$

$=0.8392$

$\therefore 0.7608\le p\le 0.8392$

답 ③

12 400개 중 25개의 비율은 $\frac{25}{400}=0.0625$이다.

표본에 있는 400개의 제품 중 1년 이내에 무상

보증 수리를 하는 제품의 비율을 $\hat{p}$이라고 하면 구하는 확률은 $\mathrm{P}(\hat{p}\le 0.0625)$이다.
여기서 모비율 $p=0.1$이고 $n=400$은 충분히 크므로 확률변수

$$Z=\frac{\hat{p}-p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}}=\frac{\hat{p}-0.1}{\sqrt{\frac{0.1\times 0.9}{400}}}=\frac{\hat{p}-0.1}{0.015}$$

로 놓으면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$에 가까워진다.

$\therefore \mathrm{P}(\hat{p}\le 0.0625)$

$=\mathrm{P}\left(\frac{\hat{p}-0.1}{0.015}\le\frac{0.0625-0.1}{0.015}\right)$

$=\mathrm{P}(Z\le -2.5)$

$=\mathrm{P}(Z\ge 2.5)$

$=0.5-\mathrm{P}(0\le Z\le 2.5)$

$=0.5-0.4938$

$=0.0062$

답 ①

13 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(10,\ \frac{4}{n}\right)$를 따르므로 확률변수 $Z=\frac{\overline{X}-10}{\frac{2}{\sqrt{n}}}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$\mathrm{P}(9\le\overline{X}\le 11)$

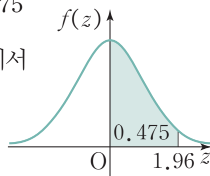
$=\mathrm{P}\left(\frac{9-10}{\frac{2}{\sqrt{n}}}\le\frac{\overline{X}-10}{\frac{2}{\sqrt{n}}}\le\frac{11-10}{\frac{2}{\sqrt{n}}}\right)$

$=\mathrm{P}\left(-\frac{\sqrt{n}}{2}\le Z\le\frac{\sqrt{n}}{2}\right)$

$=2\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{\sqrt{n}}{2}\right)\ge 0.95$

$\therefore \mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{\sqrt{n}}{2}\right)\ge 0.475$

주어진 표준정규분포표에서
$\mathrm{P}(0\le Z\le 1.96)=0.475$
이므로 $\frac{\sqrt{n}}{2}\ge 1.96$



$\therefore n\ge 15.3664$
따라서 n의 최솟값은 16이다.

답 ⑤

14 대진표를 짜는 전체 경우의 수는
4!가지
(i) A와 B가 첫 번째 경기에서 만나지 않는 경우
A가 카드를 선택할 수 있는 경우의 수는 4가지이고 그 각각에 대하여 B가 2가지 경우가 있다.
(예를 들어 A가 1을 선택하면 B는 3이나 4를 선택할 수 밖에 없다.)
그리고 나머지 2명이 카드를 선택하는 경우의 수는 2!가지이다.
따라서 (i)의 확률은

$\frac{4\times 2\times 2!}{4!}=\frac{16}{24}=\frac{2}{3}$

(ii) A와 B가 결승에 진출하는 경우
A가 C, D와 경기할 때 이길 확률은 모두 $\frac{2}{3}$이고, B가 C, D와 경기할 때 이길 확률은 모두 $\frac{1}{2}$이므로 (ii)의 확률은

$\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{3}$

따라서 A와 B가 결승에서 만날 확률은

$\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{2}{9}$

답 ①

15 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(36,\ \frac{1}{6}\right)$을 따르므로

$\mathrm{E}(X)=36\cdot\frac{1}{6}=6$

$\mathrm{V}(X)=36\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}=5$

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$이므로

$\mathrm{E}(X^2)=\mathrm{V}(X)+\{\mathrm{E}(X)\}^2$

$=5+6^2=41$

$\therefore \mathrm{E}((X-a)^2)=\mathrm{E}(X^2-2aX+a^2)$

$=\mathrm{E}(X^2)-2a\mathrm{E}(X)+a^2$

$=41-2a\cdot 6+a^2$

$=a^2-12a+41$

$=(a-6)^2+5$

따라서 $\mathrm{E}((X-a)^2)$은 $a=6$일 때 최솟값 $b=5$이므로

$a+b=6+5=11$

답 ⑤

16 1단계 확률변수 X의 확률분포표를 만든다.

X	1	2	$\cdots$	k	$\cdots$	n	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{n}$	$\frac{1}{n}$	$\cdots$	$\frac{1}{n}$	$\cdots$	$\frac{1}{n}$	1

2단계 평균 $\mathrm{E}(X)$를 구한다.

$\mathrm{E}(X)=1\times\frac{1}{n}+2\times\frac{1}{n}+3\times\frac{1}{n}+\cdots+n\times\frac{1}{n}$

$=\frac{1+2+3+\cdots+n}{n}$

$=\frac{1}{n}\cdot\frac{n(n+1)}{2}$

$=\frac{n+1}{2}$

3단계 분산 $\mathrm{V}(X)$를 구한다.

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$

$=\frac{1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2}{n}-\left(\frac{n+1}{2}\right)^2$

$=\frac{1}{n}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-\left(\frac{n+1}{2}\right)^2$

$=\frac{2(n+1)(2n+1)-3(n+1)^2}{12}$

$=\frac{(n+1)\{2(2n+1)-3(n+1)\}}{12}$

$=\frac{(n+1)(n-1)}{12}$

$=\frac{1}{12}(n^2-1)$

답 평균: $\frac{n+1}{2}$, 분산: $\frac{1}{12}(n^2-1)$

17 1단계 확률변수를 표준화한다.

어학 시험의 점수를 확률변수 X라고 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(600,\ 75^2)$을 따른다.

이때, 확률변수

$Z=\frac{X-600}{75}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

2단계 700점 이상인 사람 수를 구한다.

(1) $\mathrm{P}(X\ge 700)=\mathrm{P}\left(\frac{X-600}{75}\ge\frac{700-600}{75}\right)$

$\fallingdotseq\mathrm{P}(Z\ge 1.33)$

$=0.5-\mathrm{P}(0\le Z\le 1.33)$

$=0.5-0.4082$

$=0.0918$

$\therefore 1000\times 0.0918=91.8$

따라서 700점 이상인 사람은 약 92명이다.

3단계 상위 10 %에 들기 위한 최저 점수를 구한다.

(2) 구하는 최저 점수를 a라고 하면

$\mathrm{P}(X\ge a)=0.5-\mathrm{P}(0\le X\le a)$

$=0.5-\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{a-600}{75}\right)$

$=0.1$

$\therefore \mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{a-600}{75}\right)=0.4$

$\therefore \frac{a-600}{75}=1.28$

$\therefore a=696$

따라서 구하는 최저 점수는 696점이다.

답 (1) 약 92명 (2) 696점

18 $1.96\sqrt{\frac{1}{4n}}\le 0.0392$에서

$\sqrt{\frac{1}{4n}}\le 0.02$

$\frac{1}{4n}\le 0.0004$

$4n\ge\frac{1}{0.0004}=2500$

$\therefore n\ge 625$

따라서 표본의 크기는 625 이상이어야 한다.

답 625

V 도형과 그래프

1 도형과 그래프

고속 국도망이나 철도망을 나타내는 지도는 경로를 사실적으로 묘사하기보다는 도시와 도시 사이의 연결 관계에 초점을 두고 단순화하여 그린다. 이와 같이 점과 선으로 단순화하여 나타낸 그림을 활용하면 실생활의 여러 가지 상황을 표현하고 문제를 효율적으로 해결하는 데 도움이 된다.

단원의 흐름

이미 배운 내용

▶**중학교 1학년**
- 평면도형의 성질
- 입체도형의 성질

이번에 배울 내용

- 연결 상태가 같은 도형
- 그래프
- 그래프와 최적화

이 단원의 학습 목표

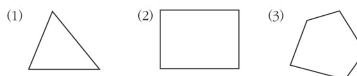
1. 평면도형의 성질을 이해하고, 공통적인 특징을 설명할 수 있다.
2. 입체도형에서 연결 상태가 같은 도형을 관찰하고, 공통적인 특징을 설명할 수 있다.
3. 점과 선으로 이루어진 도형의 성질을 이해한다.
4. 정다면체를 평면그래프로 나타낼 수 있다.
5. 그래프를 이용하여 여러 가지 최적화 문제를 해결할 수 있다.

단원을 시작하기 전에

다각형의 꼭짓점과 변

1 다음 도형의 꼭짓점과 변의 개수를 각각 구하여라.

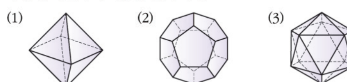
(1) (2) (3)



입체도형

2 다음 정다면체의 이름을 말하여라.

(1) (2) (3)



정다면체의 성질

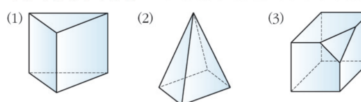
3 정다면체에 대하여 다음 표를 완성하여라.

정다면체	정사면체	정육면체	정팔면체	정십이면체	정이십면체
면의 모양	정삼각형				
면의 개수		6			
모서리의 개수			12		30
꼭짓점의 개수				20	

다면체의 꼭짓점과 모서리, 면

4 다음 다면체의 꼭짓점, 모서리, 면의 개수를 각각 구하여라.

(1) (2) (3)



단원을 시작하기 전에 ……………………풀이

1

도형	꼭짓점의 개수	변의 개수
(1)	3	3
(2)	4	4
(3)	5	5

2 (1) 정팔면체 (2) 정십이면체

(3) 정이십면체

3

정다면체	정사면체	정육면체	정팔면체	정십이면체	정이십면체
면의 모양	정삼각형	**정사각형**	**정삼각형**	**정오각형**	**정삼각형**
면의 개수	**4**	6	**8**	**12**	**20**
모서리의 개수	**6**	**12**	12	**30**	30
꼭짓점의 개수	**4**	**8**	**6**	20	**12**

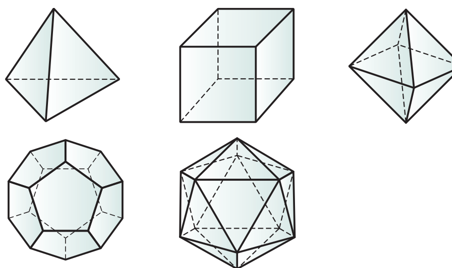
4

다면체	꼭짓점의 개수	모서리의 개수	면의 개수
(1)	6	9	5
(2)	5	8	5
(3)	10	15	7

참고 | 정다면체

다면체 중에서 각 면이 모두 합동인 정다각형이고, 각 꼭짓점에 모이는 면의 개수가 같은 다면체를 정다면체라고 한다.

정다면체는 다음 그림과 같이 정사면체, 정육면체, 정팔면체, 정십이면체, 정이십면체의 다섯 가지뿐임이 알려져 있다.



1 도형과 그래프

이 단원을 배우면

- 평면도형의 성질을 이해하고, 공통적인 특징을 설명할 수 있다.
- 입체도형에서 연결 상태가 같은 도형을 관찰하고, 공통적인 특징을 설명할 수 있다.
- 점과 선으로 이루어진 도형의 성질을 이해할 수 있다.
- 정다면체를 평면그래프로 나타낼 수 있다.
- 그래프를 이용하여 여러 가지 최적화 문제를 해결할 수 있다.

소단원의 학습 목표

1. 연결 상태가 같은 평면도형에 대하여 안다.
2. 연결 상태가 같은 입체도형에 대하여 안다.

156

1 도형과 그래프

1 연결 상태가 같은 도형

학습 목표

- 연결 상태가 같은 평면도형에 대하여 안다.
- 연결 상태가 같은 입체도형에 대하여 안다.

다 가 서 기 / **도자기 만들기**

원기둥 모양의 진흙 덩어리는 도공의 손끝의 움직임에 따라 속이 빈 원기둥으로 바뀌고, 이것은 다시 곡선미가 넘치는 도자기로 바뀐다.
마찬가지로 수학에서도 선을 늘이거나 줄이거나 또는 구부려서 변형할 수 있으며, 다면체 모양을 자르거나 구멍을 내지 않고 잡아 당기거나 늘이거나 줄여서 다양한 모양으로 변형할 수 있다.

다가서기 / 해설

도자기 만드는 방법은 크게 물레성형, 수공성형, 기계성형이 있다. 물레성형은 물레가 돌아가는 회전력을 이용해 주로 원형의 도자기를 빚는데 사용하며, 수공성형은 손으로 어떤 형태를 잡아가며 만드는 방법으로 자신의 생각을 자유롭게 표현할 수 있다. 또 기계성형은 틀을 이용하는 것으로 크기가 일정하고 대량 생산이 가능해 기업에서 많이 사용한다.

우리나라는 2001년부터 격년제로 도자 분야 최고의 국제 행사인 세계도자비엔날레를 개최하고 있다. 이런 행사나 주변에 있는 도예 공방을 이용하여 직접 도자기를 만들어 보면서 여러 가지 모양의 도자기들의 상태를 살펴보자.

참고 | 다면체

1. 다면체는 다음과 같이 두 가지 종류의 이름을 동시에 가진다.
   (i) 다면체를 이루는 면의 개수에 따라 사면체, 오면체, 육면체, …라고 한다.
   (ii) 다면체의 모양에 따라 각기둥, 각뿔, 각뿔대로 나누며 밑면의 모양에 따라 삼각기둥, 사각뿔, 오각뿔대, …라고 한다.

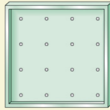
   예를 들어 삼각기둥은 오면체이다.
   한편 면이 원이거나 곡면인 입체도형은 다면체가 아니다.
2. 각기둥, 각뿔, 각뿔대의 성질은 각각 다음과 같다.
   (1) 각기둥은 밑면과 옆면이 수직인 것만 다룬다. 또한 두 밑면은 서로 합동인 도형이고, 그 옆면은 직사각형이다.
   (2) 각뿔은 밑면과 옆면이 이루는 각을 생각할 때 둔각이 되는 것은 다루지 않으며, 그 옆면은 삼각형이다.
   (3) 각뿔대는 각뿔을 밑면에 평행한 평면으로 자를 때 생기는 다면체이므로 두 밑면은 서로 닮은 도형이며 그 옆면은 사다리꼴이다.

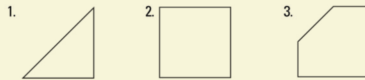
01 연결 상태가 같은 평면도형

탐 구 하 기 / 고무 밴드로 여러 가지 모양 만들기

준비물
기하판, 고무 밴드

오른쪽 그림과 같이 16개의 못이 박혀 있는 기하판이 있다. 고무 밴드를 못에 걸어서 다음과 같은 모양을 각각 만들어 보자.

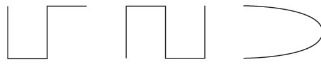




알 아 보 기 / 연결 상태가 같은 평면도형에 대하여 알아보자.

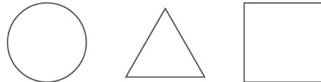
한 도형을 잘라 내거나 이어 붙이지 않고, 늘이거나 줄이거나 구부려서 그 도형 위의 서로 다른 두 점이 겹치지 않도록 변형한 도형을 처음 도형과 연결 상태가 같은 도형이라고 한다.

이를테면 다음의 도형은 모두 연결 상태가 같은 도형이다.



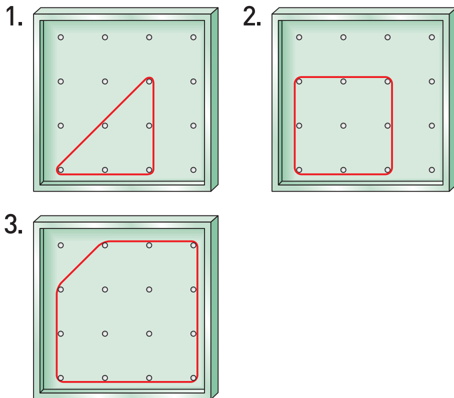
연결 상태가 같은 두 도형은 크기나 모양은 달라도 그 선 위에 있는 점들의 순서는 변하지 않는다.

고무 밴드를 원기둥, 삼각기둥, 사각기둥에 각각 끼우면 다음과 같이 서로 연결 상태가 같은 도형이 된다.



이와 같이 점과 선으로 된 도형 중에서 연결 상태가 원과 같은 도형을 단일폐곡선이라고 한다.

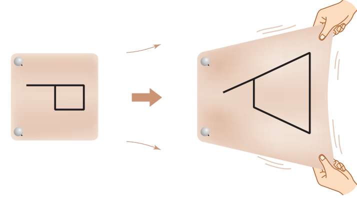
탐구하기 / 풀이



이외에도 크기를 다르게 하여 다양한 모양을 만들 수 있다.

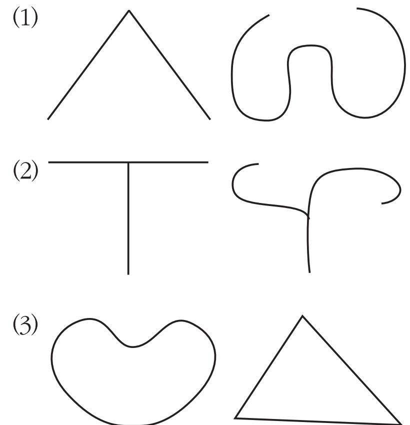
알아보기 / 해설

• 다음 그림과 같이 고무판에 그려진 도형에 대하여 고무판을 임의로 늘이거나 줄이면 다른 모양의 도형이 만들어진다.

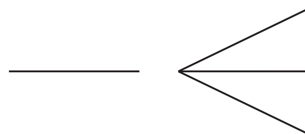


이와 같이 한쪽을 겹치거나 접지 않고, 늘이거나 줄여서 만들어지는 두 도형을 연결 상태가 같은 도형이라고 한다.

• 다음 그림에서 (1), (2), (3)의 각각에 속해 있는 도형끼리는 모양이나 길이에 관계없이 점이나 선의 연결 상태가 같다.

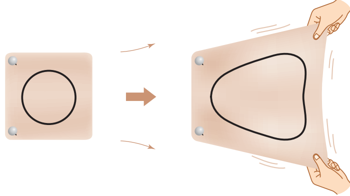


그러나 다음 그림에서 두 도형은 늘이거나 줄이거나 구부리는 것만으로는 서로 같게 만들 수가 없다. 따라서 두 도형은 서로 연결 상태가 같지 않음을 알 수 있다.



알아보기 / 해설

• 다음 그림과 같이 고무판을 겹치거나 접지 않고 늘이거나 줄이면 고무판에 그려진 원이 여러 가지 다른 모양으로 바뀐다.



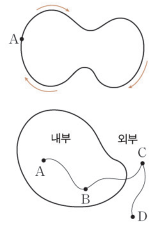
이와 같이 원과 연결 상태가 같은 도형을 단일폐곡선이라고 한다.

• 단일폐곡선의 성질은 다음과 같다.

(1) 곡선 위의 한 점에서 선을 따라가면 다시 그 점으로 되돌아 올 수 있다.

(2) 단일폐곡선의 내부에 있는 점과 외부에 있는 점을 연결하는 선은 반드시 이 단일폐곡선과 만난다.

단일폐곡선은 이 곡선 위의 한 점 A에서 출발하여 곡선을 따라 한쪽 방향으로 나아가면, 그 곡선 위의 모든 점을 한 번씩만 지나서 다시 출발점 A로 되돌아오게 된다.



한편 평면 위에 있는 단일폐곡선은 평면을 두 부분으로 나눈다. 이 두 부분 중에서 단일폐곡선으로 둘러싸여 있는 부분이 이 곡선의 내부이고 그렇지 않은 부분이 이 곡선의 외부이다.

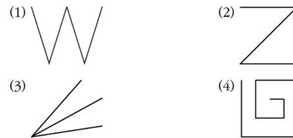
단일폐곡선의 내부에 있는 두 점 또는 외부에 있는 두 점은 이 곡선과 만나지 않는 선으로 이을 수 있지만, 단일폐곡선의 내부에 있는 점과 외부에 있는 점을 이은 선은 이 곡선과 반드시 만나게 된다.

이를테면 위의 그림에서 내부에 있는 두 점 A와 B, 외부에 있는 두 점 C와 D는 단일폐곡선과 만나지 않는 선으로 이을 수 있다. 그러나 B와 C를 이은 선은 이 곡선과 반드시 만난다.

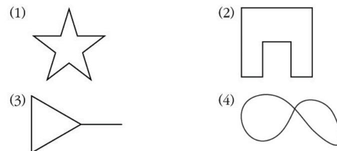
스스로 하기 /

익힘책 128쪽 | 익힘책 130쪽 | 익힘책 131쪽

1 다음 도형 중 연결 상태가 같은 것끼리 짝지어라.



2 다음 도형 중 단일폐곡선을 모두 찾아라.



스스로 하기 / 풀이

1 (1)과 (4)는 모두 늘이면 ———— 와 연결 상태가 같다.

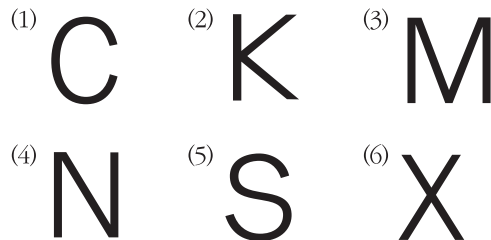
(2)와 (3)은 모두 늘이면 ┬ 와 연결 상태가 같다.

따라서 서로 연결 상태가 같은 도형은 (1)과 (4), (2)와 (3)이다.

2 단일폐곡선은 원과 연결 상태가 같은 도형이므로 (1), (2)이다.

Plus 문제

다음 도형 중 연결 상태가 같은 것끼리 짝지어라.



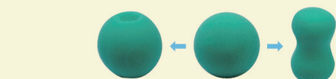
| 풀이 |

(1), (3), (4), (5)는 모두 늘이면 ———— 와 연결 상태가 같고, (2), (6)은 모두 늘이면 ─┼─ 와 연결 상태가 같다.

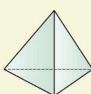
02 연결 상태가 같은 입체도형

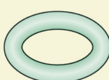
탐 구 하 기 / 찰흙으로 만드는 입체도형

구 모양의 찰흙을 겉면이 겹쳐지거나 잘리지 않도록 늘이거나 줄여서 다음과 같이 여러 가지 모양으로 변형할 수 있다.



이와 같은 방법으로 구 모양의 찰흙을 다음 도형으로 변형할 수 있는지 알아보자.

1. 

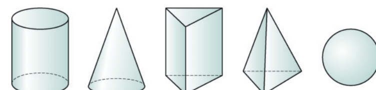
2. 

알 아 보 기 / 연결 상태가 같은 입체도형에 대하여 알아보자.

다음과 같이 구 모양의 찰흙을 손으로 눌러 다듬으면 육면체 모양으로 변형할 수 있다.

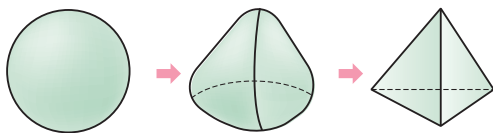
이와 같이 한 입체도형을 그 겉면이 겹쳐지거나 잘리지 않도록 늘이거나 줄여서 얻은 입체도형은 처음 입체도형과 연결 상태가 같은 도형이다.

그러므로 원기둥, 원뿔, 각기둥, 각뿔 등은 모두 구와 연결 상태가 같은 입체도형이다.



탐구하기 / 풀이

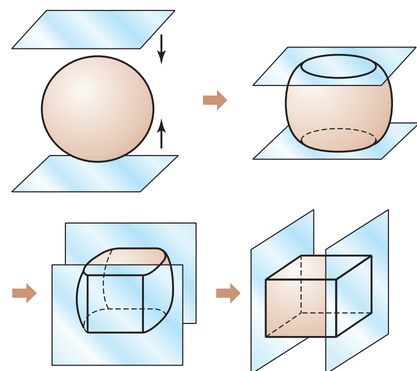
1. 만들 수 있다.



2. 구멍을 뚫어야 하므로 찰흙을 자르거나 잘라 붙이지 않고 만들 수 없다.

알아보기 / 해설

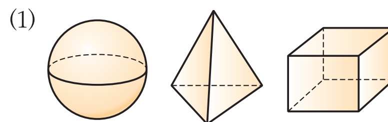
- 연결 상태가 같은 도형을 입체도형에서도 생각할 수 있다.



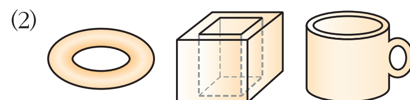
위의 그림과 같이 구 모양의 찰흙을 겹치거나 자르지 않고 늘이거나 줄이기만 하여 만들어진 도형을 구와 연결 상태가 같은 도형이라고 한다.

- 다음 그림의 (1), (2)에 각각 속해 있는 입체도형끼리는 연결 상태가 같은 도형들이다.

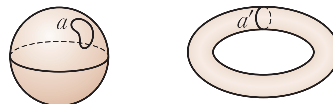
(1)



(2)



- 다음 그림과 같이 구와 도넛면에서 단일폐곡선 a, a'으로 각각 잘라 보자.

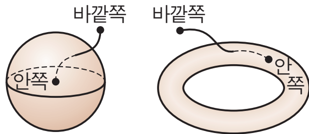


구면은 두 부분으로 나누어지지만 도넛면은 나누어지지 않는다. 이것으로부터 구면과 도넛면은 서로 연결 상태가 같지 않음을 알 수 있다.

즉, 단일폐곡선을 이용하여 입체도형을 몇 개의 부분으로 나눌 때, 나누어지는 수가 항상 같아야 연결 상태가 같은 도형이라고 할 수 있다.

알아보기 / 해설

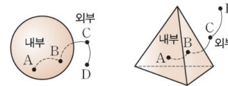
평면 위에 있는 단일폐곡선은 평면을 내부와 외부로 나누는 것처럼 다음 그림과 같이 구면이나 도넛면과 연결 상태가 각각 같은 입체도형도 공간을 안쪽과 바깥쪽으로 나눈다.



이 때에도 안쪽에 있는 점끼리나 바깥쪽에 있는 점끼리는 곡면과 만나지 않는 선으로 연결할 수 있으며, 안쪽에 있는 점과 바깥쪽에 있는 점을 잇는 선은 반드시 곡면과 만난다.

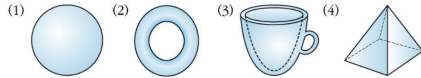
160

평면 위에 있는 단일폐곡선은 평면을 내부와 외부로 나눈다. 마찬가지로 구와 연결 상태가 같은 입체도형도 공간을 두 부분으로 나눈다. 이 중에서 입체도형으로 둘러싸인 부분이 입체도형의 내부이고, 그렇지 않은 부분이 외부이다.



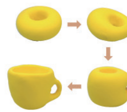
함 께 하 기 / 익힘책 128쪽 | 익힘책 130쪽 | 익힘책 131쪽

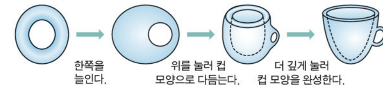
1 다음 도형 중 연결 상태가 같은 것을 찾아라.



풀이

도형 (1)과 (4)는 모두 구와 연결 상태가 같은 도형이다. 도형 (1)을 늘이거나 줄이거나 구부려서 도형 (2)와 (3)은 만들 수 없다. 그러나 도형 (2)는 다음 그림과 같이 도형 (3)으로 변형시킬 수 있으므로 (2)와 (3)은 서로 연결 상태가 같은 도형이다.

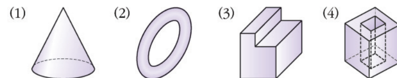




따라서 서로 연결 상태가 같은 도형은 **(1)과 (4)**, **(2)와 (3)**이다.

스 스 로 하 기 / 익힘책 128쪽 | 익힘책 130쪽 | 익힘책 131쪽

1 다음 도형 중 연결 상태가 같은 것끼리 짝지어라.

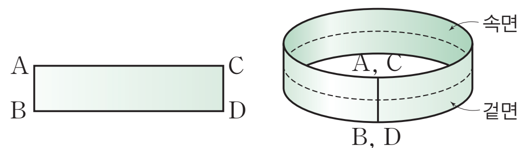


스스로 하기 / 풀이

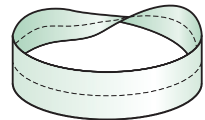
1 도형 (1)과 (3)은 모두 구와 연결 상태가 같은 도형이다.
도형 (2)와 (4)는 모두 구멍이 뚫린 입체도형(도넛)으로 연결 상태가 같은 도형이다.
따라서 서로 연결 상태가 같은 도형은 (1)과 (3), (2)와 (4)이다.

참고 | 뫼비우스의 띠

직사각형 모양의 종이 테이프로 다음 그림과 같은 띠를 만들면 겉면과 속면이 구별되고, 띠의 겉면 위의 한 점에서 출발하여 선을 그어 가면 띠의 가장자리를 거치지 않고서는 속면으로 선을 그을 수 없다.



그러나 오른쪽 그림과 같이 테이프를 한 번 꼬아서 붙인 모양의 띠를 만든 후, 곡면 위의 한 점을 출발하여 선을 그어 보면 가장자리를 거치지 않고서도 다른 쪽 면 위에 선을 그을 수 있다. 즉, 이 곡면은 안쪽과 바깥쪽의 구별이 없다.



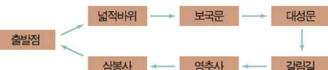
이와 같이 직사각형 모양의 종이를 한 번만 꼬아서 붙여 만든 띠를 뫼비우스의 띠라고 한다.

2 그래프

학습 목표
- 그래프의 뜻을 안다.
- 한붓그리기를 할 수 있는 그래프의 특징을 안다.
- 정다면체를 평면그래프로 나타낼 수 있다.
- 연결된 평면그래프에서 꼭짓점, 변, 면의 개수 사이의 관계를 안다.
- 입체도형에서 꼭짓점, 모서리, 면의 개수 사이의 관계를 안다.

다 가 서 기 / **등산 코스**

등산 코스를 지도에 표시하여 나타내는 경우도 있지만 다음과 같이 주요 지점 사이의 연결 상태로 간단히 나타낼 수도 있다.



이와 같이 일상생활에서 점과 선을 이용하여 연결 상태를 간단히 나타내는 경우가 많이 있다.

소단원의 학습 목표

1. 그래프의 뜻을 안다.
2. 한붓그리기를 할 수 있는 그래프의 특징을 안다.
3. 정다면체를 평면그래프로 나타낼 수 있다.
4. 연결된 평면그래프에서 꼭짓점, 변, 면의 개수 사이의 관계를 안다.
5. 입체도형에서 꼭짓점, 모서리, 면의 개수 사이의 관계를 안다.

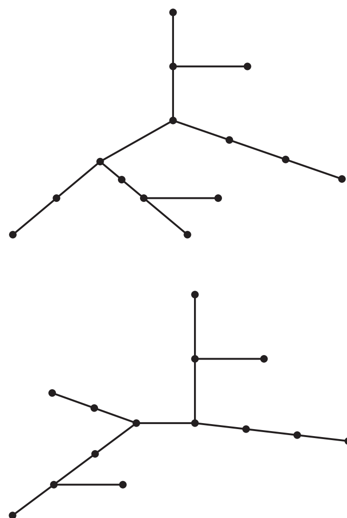
여기서 배우는 용어 및 기호

그래프, 꼭짓점, 변, 경로, 한붓그리기

다가서기 / 해설

다음 그림은 우리나라 고속철도망의 주요 도시를 표시한 것이다.

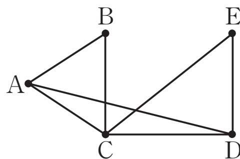
여기서 주요 도시를 점으로, 도시를 연결하는 고속철도망을 선으로 나타내어 점과 선으로만 이루어진 그림으로 간단히 나타내면 다음과 같이 여러 가지 모양으로 표현할 수 있다.



이밖에도 전기관이나 가스 배관, 통신망 등에서 여러 거점을 점으로, 여러 거점 사이의 연결 상태를 선으로 나타내어 간단히 표현할 수 있다.
이와 같이 점과 선을 이용하여 복잡한 연결 상태를 간단히 나타내는 경우가 많이 있다.

탐구하기 / 풀이

1. 김포는 광주, 제주, 부산과 각각 두 지역을 오가는 항공기 노선이 있으므로 점 A는 점 B, C, D와 각각 선분으로 연결한다.
광주와 제주를 오가는 항공기 노선이 있으므로 점 B와 점 C를 선분으로 연결한다.
제주와 부산, 제주와 양양을 오가는 항공기 노선이 있으므로 점 C와 점 D, 점 C와 점 E를 선분으로 연결한다.
부산과 양양을 오가는 항공기 노선이 있으므로 점 D와 점 E를 선분으로 연결한다.
따라서 두 점 사이를 선분으로 연결한 그림은 다음과 같다.



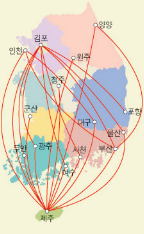
2. 연결된 선분이 가장 많은 점은 C이다.

162

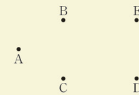
01 그래프의 뜻

탐 구 하 기 / 항공기 취항 노선도

오른쪽 그림은 우리나라의 항공기 취항 노선도로, 두 지역을 오가는 항공기 노선이 있을 경우에 두 지역을 선으로 연결한 것이다. 다음 물음에 답하여 보자.



1. 김포, 광주, 제주, 부산, 양양을 각각 점 A, B, C, D, E로 다음과 같이 표시하자. 두 지역을 오가는 항공기 노선이 있을 때, 두 점 사이를 선분으로 연결하여 보아라.

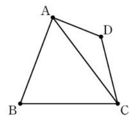


2. 물음 1의 결과에서 연결된 선분이 가장 많은 점을 찾아라.

알 아 보 기 / 그래프의 뜻을 알아보자.

두 꼭짓점 사이에는 많아야 한 개의 변만 있고 같은 꼭짓점을 연결하는 변이 없는 그래프만 다룬다.

오른쪽 그림과 같이 점과 선으로 이루어진 그림을 **그래프**라고 한다. 그래프에서 점을 **꼭짓점**이라 하고, 꼭짓점을 연결한 선을 **변**이라고 한다.



꼭짓점은 A, B, C, …와 같이 나타내고 변은 양 끝의 꼭짓점을 이용하여 AB, AC, BC, …와 같이 나타낸다.

한편 그래프의 한 꼭짓점에서 이어진 변을 따라 변을 반복하지 않으면서 또 다른 꼭짓점으로 이동할 때, 순서대로 꼭짓점을 나열한 것을 **경로**라고 한다.

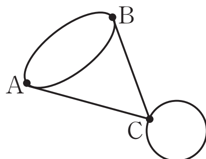
예를 들어 위의 그래프에서 A에서 C로 가는 경로는

AC, ABC, ADC

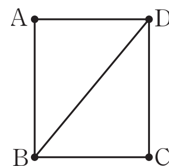
와 같이 3가지가 있다.

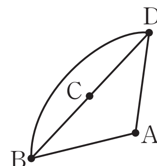
알아보기 / 해설

- 두 꼭짓점을 연결한 선을 변이라고 하는데 두 꼭짓점 A, B 사이의 변이 하나뿐일 때 AB 또는 BA로 나타낸다. 또한 그래프에서는 변을 곡선으로 그릴 수도 있다.
- 오른쪽 그림과 같이 두 꼭짓점 A, B 사이에 변이 두 개 이상인 그래프나 한 꼭짓점에서 자기 자신으로 돌아오는 변을 포함한 그래프도 생각할 수 있다. 그러나 여기서는 두 꼭짓점 사이에 변이 많아야 한 개인 경우만 다룬다.



- 본문에 주어진 그래프에서
(꼭짓점의 집합)={A, B, C, D}
(변의 집합)={AB, AC, AD, BC, CD}
- 그래프에서는 점과 점 사이의 연결 관계만이 중요하므로 꼭짓점의 위치를 바꾸거나 변을 늘이거나 줄여도 같은 그래프로 본다. 예를 들어 다음 두 그래프는 서로 같은 그래프이다.





- 동형인 그래프는 꼭짓점의 개수와 변의 개수가 각각 같고 꼭짓점에 연결된 변의 개수가 같다.

163

그래프에서 꼭짓점의 위치를 바꾸거나 변을 늘이거나 줄이거나 구부려서 두 그래프가 연결 상태가 같은 도형이 되면 두 그래프는 동형이라고 한다.

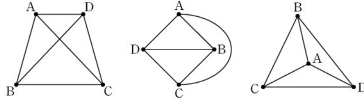
이를테면 꼭짓점의 집합이

$\{A, B, C, D\}$

이고, 변의 집합이

$\{AB, AC, AD, BC, BD, CD\}$

인 다음 세 그래프는 모두 동형이다.



즉, 꼭짓점의 위치와 변의 길이에 따라 다양한 그래프가 그려질 수 있지만 꼭짓점의 위치를 바꾸거나 변의 길이를 바꾸어 위의 그래프와 같아지면 모두 동형이다.

스스로 하기 / 익힘책 128쪽 | 익힘책 130쪽 | 익힘책 131쪽

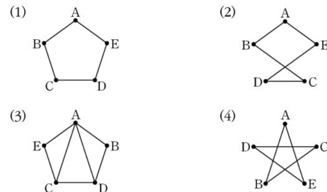
1 다음과 같은 꼭짓점과 변의 집합을 가지는 그래프를 그려라.

(1) (꼭짓점의 집합)$=\{A, B, C\}$
(변의 집합)$=\{AB, BC\}$

(2) (꼭짓점의 집합)$=\{A, B, C, D\}$
(변의 집합)$=\{AB, AC, AD, BC\}$

(3) (꼭짓점의 집합)$=\{A, B, C, D, E\}$
(변의 집합)$=\{AB, AE, BC, BD, DE\}$

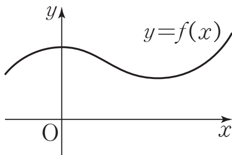
2 다음 그래프 중 서로 동형인 것을 모두 찾아라.



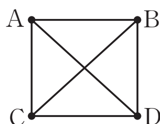
보충 학습

1. 수학에서 그래프는 전혀 다른 두 가지 대상을 가리키는 용어로 사용되고 있다.

(1) 함수 $y=f(x)$의 그래프



(2) 점과 선으로 이루어진 그래프



이 단원에서의 그래프는 (2)의 그래프를 의미한다.

2. 그래프의 한 변은 두 개의 꼭짓점과 연결되어 있다. 따라서 다음이 성립한다.

(그래프의 변의 개수)

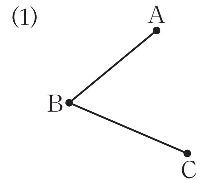
$$=\frac{(\text{각 꼭짓점에 연결된 변의 개수의 합})}{2}$$

3. 시작점과 끝점이 같은 경로는 회로라고 한다.

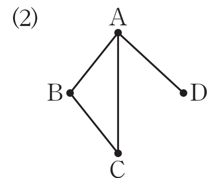
스스로 하기 / 풀이

1 먼저 꼭짓점을 찍은 다음에 각 변이 나타내는 꼭짓점을 연결한다.

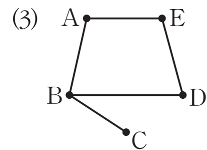
(1)



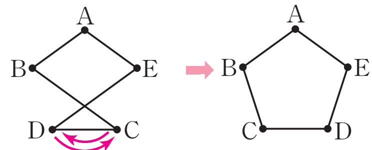
(2)

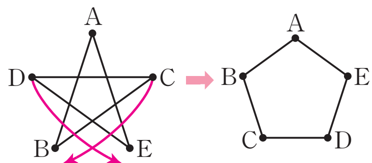


(3)



2





따라서 (1), (2), (4)는 서로 동형이다.

스스로 하기 / 풀이

3 직접 연결하는 노선이 있을 경우를 표로 정리하면 다음과 같다.

	A	B	C	D	E
A	＼	○	○		○
B	○	＼	○	○	○
C	○	○	＼		○
D		○		＼	○
E	○	○	○	○	＼

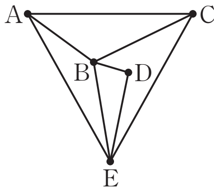
(꼭짓점의 집합)

={A, B, C, D, E}

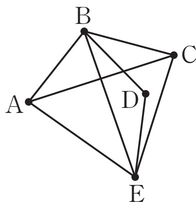
(변의 집합)

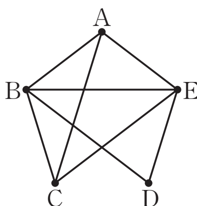
={AB, AC, AE, BC, BD, BE, CE, DE}

따라서 그래프로 나타내면 다음과 같다.



또한 꼭짓점의 위치에 따라 다음과 같이 다양한 모양의 그래프가 그려질 수 있다.





164

함 께 하 기 / 익힘책 128쪽 | 익힘책 130쪽 | 익힘책 131쪽

1 오른쪽 표는 사이클 동호회 회원인 성호, 주현, 광수, 현민, 정수가 동호회 홈페이지 대화방에서 만나 대화한 상대를 조사한 것이다. 성호, 주현, 광수, 현민, 정수를 각각 꼭짓점 A, B, C, D, E라 하고, 서로 대화한 두 사람을 변으로 연결하여 그래프로 나타내어라.

회원 이름	대화한 상대
성호	광수, 현민, 정수
주현	광수, 정수
광수	성호, 주현, 현민, 정수
현민	성호, 광수, 정수
정수	성호, 주현, 광수, 현민

풀이

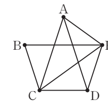
5명이 각각 대화한 상대를 오른쪽 표와 같이 정리하면

	A	B	C	D	E
A	＼		○	○	○
B		＼	○		○
C	○	○	＼	○	○
D	○		○	＼	○
E	○	○	○	○	＼

(꼭짓점의 집합)={A, B, C, D, E}

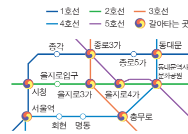
(변의 집합)={AC, AD, AE, BC, BE, CD, CE, DE}

따라서 그래프로 나타내면 다음과 같다.



스 스 로 하 기 / 익힘책 128쪽 | 익힘책 130쪽 | 익힘책 131쪽

3 오른쪽 그림은 서울 지하철 노선도의 일부이다. 서울역, 종로3가, 동대문, 을지로3가, 충무로를 각각 꼭짓점 A, B, C, D, E라 하고, 두 역 사이를 다른 노선을 갈아타지 않고 직접 연결하는 노선이 있을 경우 변으로 연결하여 그래프로 나타내어라.

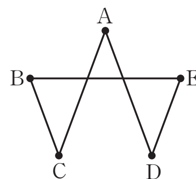


Plus 문제

오른쪽 표는 5개의 야구팀 A, B, C, D, E가 야구 경기를 한 상대를 조사한 것이다. 각 팀을 점으로 나타내고, 서로 시합한 두 팀을 변으로 연결하여 그래프로 나타내어라.

팀	경기한 상대
A	C, D
B	C, E
C	A, B
D	A, E
E	B, D

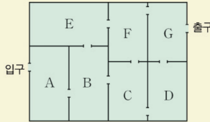
| 풀이 |



02 한붓그리기

탐구하기 / 전시관 관람 순서

오른쪽 그림과 같이 7개 구역 A, B, C, D, E, F, G로 나누어진 전시관이 있다. 다음 물음에 답하여 보자.



1. 입구로 들어가 모든 전시 구역을 한 번씩만 지나서 출구로 나가는 경로를 그려 보아라.
2. 7개 구역 A, B, C, D, E, F, G를 각각 꼭짓점으로 하고, 두 구역 사이에 출입문이 있는 경우 변으로 연결하여 그래프로 나타내어라.
3. 물음 2의 그래프에서 A에서 출발하여 모든 변을 한 번씩만 지나 G까지 가는 경로가 존재하는지 말하여라.

알아보기 / 한붓그리기에 대하여 알아보자.

연결된 그래프의 한 꼭짓점에서 출발하여 꼭짓점을 여러 번 지날 수 있지만 모든 변을 한 번씩만 지나 어느 한 꼭짓점으로 가는 경로가 있을 때, 이 그래프는 **한붓그리기**가 가능하다고 한다.

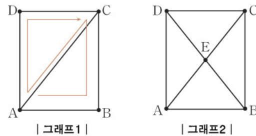
이를테면 다음 |그래프1|은 꼭짓점 A에서 출발하여 모든 변을 지나 꼭짓점 C로 가는 경로

ABCADC

가 존재한다.

따라서 이 그래프는 한붓그리기가 가능하다.

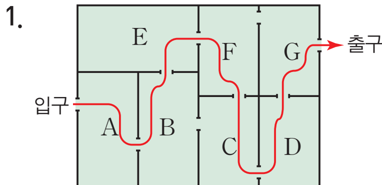
그러나 |그래프2|는 한붓그리기가 가능하지 않다.



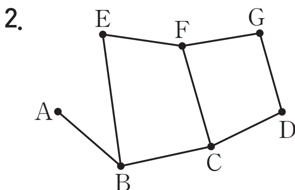
|그래프1| |그래프2|

탐구하기 / 풀이

1.



2.



3. 존재하지 않는다.

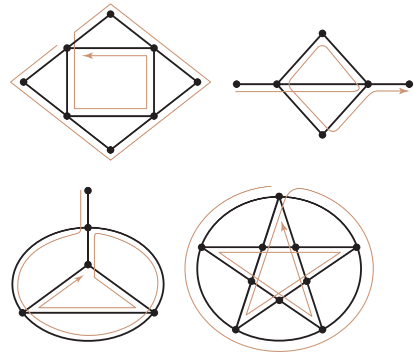
알아보기 / 해설

- 오른쪽 그림과 같이 점 A에서 점 B까지 화살표의 방향으로 그려 가면, 연필을 떼지 않고 모든 변을 한 번씩만 지나도록 그릴 수 있다. 즉, 꼭짓점 A에서 출발하여 모든 변을 한 번씩만 지나 꼭짓점 B로 가는 경로 ABCDEACEB가 존재한다.

이와 같이 연필을 떼지 않고 모든 변을 한 번씩만 지나도록 그릴 수 있을 때, 그 그래프는 한붓그리기가 가능하다고 한다.

특히, 한붓그리기에서는 시작하는 점이나 도착하는 점을 정할 필요는 없고, 같은 꼭짓점은 여러 번 지나도 좋으나 모든 변은 꼭 한번씩만 지나가야 한다.

- 한붓그리기가 가능한 그래프는 다음과 같이 여러 가지가 있다.



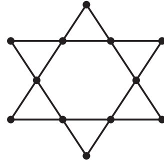
보충 학습

탐구하기의 그래프는 왜 한붓그리기가 가능하지 않을까? 한붓그리기가 가능하려면 시작점과 끝점을 제외한 모든 꼭짓점은 들어오는 변에 대하여 나가는 변이 있어야 한다. 즉, 짝수 개의 변이 연결되어 있어야 한다.

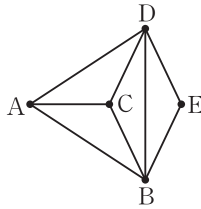
알아보기 / 해설

• 그래프에서 한 꼭짓점에 연결된 변의 개수가 짝수 개일 때 그 꼭짓점을 짝수점, 홀수 개일 때 그 꼭짓점을 홀수점이라고 한다.

오른쪽 그래프에서 모든 꼭짓점에 연결되어 있는 변의 개수는 짝수이므로 모든 꼭짓점은 짝수점이다.



한편 오른쪽 그래프에서는 꼭짓점 A, C는 홀수점이고, 꼭짓점 B, D, E는 짝수점임을 알 수 있다.



• 한붓그리기가 가능한 그래프에서 살펴보면 출발점, 통과점, 도착점에 대하여 다음을 알 수 있다.

(1) 통과점은 짝수점

(2) 출발점과 도착점이 같으면 그 점은 짝수점

(3) 출발점과 도착점이 다르면 그 점은 홀수점

즉, 한붓그리기가 가능한 그래프는 짝수점은 통과하는 점이고, 홀수점은 시작하는 점이거나 도착하는 점이 됨을 알 수 있다.

따라서 꼭짓점과 변으로 이루어진 그래프는 홀수점이 없거나 2개일 때에만 한붓그리기가 가능하다.

또한 홀수점이 없는 그래프는 어떤 점에서 출발하여도 그 출발점에서 끝나는 한붓그리기가 가능하고, 홀수점이 2개인 그래프는 한 홀수점에서 출발하여 다른 홀수점에서 끝나는 한붓그리기가 가능하다.

• 홀수점이 2개보다 많이 있는 그래프는 한붓그리기가 불가능하다.

166

그래프에서 짝수 개의 변과 연결된 꼭짓점을 짝수점이라 하고, 홀수 개의 변과 연결된 꼭짓점을 홀수점이라고 한다.

오른쪽 | 그래프3 | 에서 모든 꼭짓점은 짝수점이다.

이와 같이 모든 꼭짓점이 짝수점인 그래프는 어느 꼭짓점에서 출발하더라도 한붓그리기가 가능하다. 이때, 출발점과 도착점은 일치한다.

| 그래프3 |

오른쪽 | 그래프4 | 에서 꼭짓점 A, B, D, E는 짝수점이고, 꼭짓점 C, F는 홀수점이다.

이와 같이 홀수점이 2개인 그래프에서는 한쪽 홀수점에서 출발하면 다른 홀수점이 도착점이 되는 한붓그리기가 가능하다.

그러나 짝수점에서 출발하면 한붓그리기가 가능하지 않다.

| 그래프4 |

오른쪽 | 그래프5 | 에서 꼭짓점 A, C, D, E는 홀수점이고, 꼭짓점 B는 짝수점이다.

이와 같이 홀수점이 3개 이상인 그래프는 한붓그리기가 가능하지 않다.

| 그래프5 |

일반적으로 한붓그리기가 가능한 그래프는 다음과 같다.

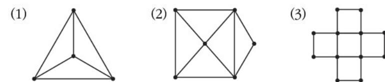
한붓그리기가 가능한 그래프

(1) 홀수점이 없는 그래프는 어떤 점에서 출발하여도 그 출발점에서 끝나는 한붓그리기가 가능하다.

(2) 홀수점이 2개인 그래프는 한 홀수점에서 출발하여 다른 홀수점에서 끝나는 한붓그리기가 가능하다.

스스로 하기 / 익힘책 128쪽 | 익힘책 130쪽 | 익힘책 131쪽

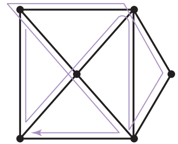
1 다음 그래프 중 한붓그리기가 가능한 것을 모두 찾아라.



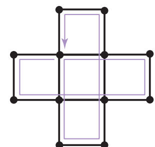
스스로 하기 / 풀이

1 (1) 홀수점이 4개이므로 한붓그리기가 불가능하다.

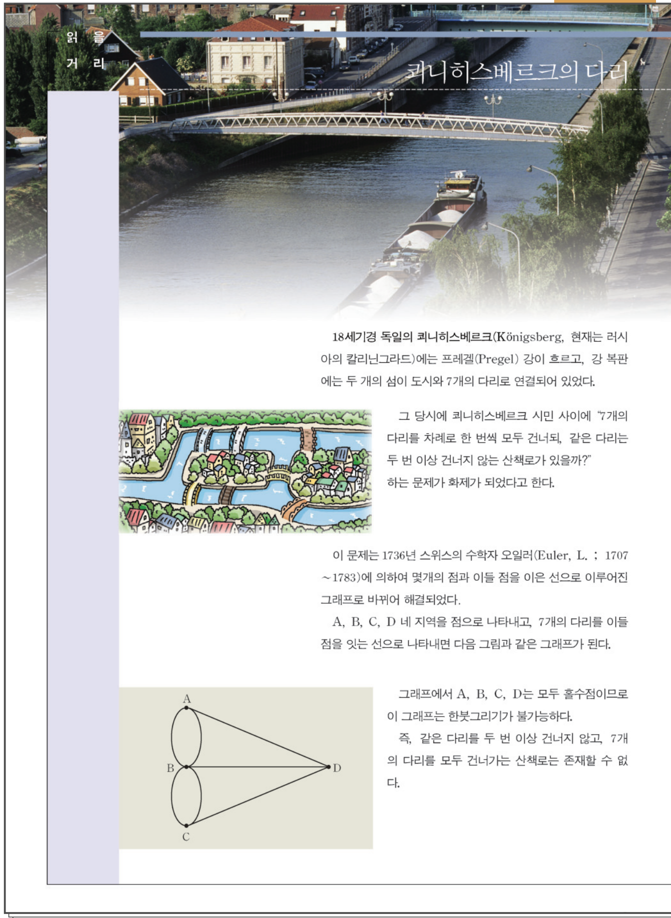
(2) 홀수점이 2개이므로 한붓그리기가 가능하다.



(3) 홀수점이 없으므로 한붓그리기가 가능하다.



따라서 한붓그리기가 가능한 것은 (2), (3)이다.


167

읽을거리

쾨니히스베르크의 다리

18세기경 독일의 쾨니히스베르크(Königsberg, 현재는 러시아의 칼리닌그라드)에는 프레겔(Pregel) 강이 흐르고, 강 복판에는 두 개의 섬이 도시와 7개의 다리로 연결되어 있었다.

그 당시에 쾨니히스베르크 시민 사이에 "7개의 다리를 차례로 한 번씩 모두 건너되, 같은 다리는 두 번 이상 건너지 않는 산책로가 있을까?" 하는 문제가 화제가 되었다고 한다.

이 문제는 1736년 스위스의 수학자 오일러(Euler, L. ; 1707~1783)에 의하여 몇개의 점과 이들 점을 이은 선으로 이루어진 그래프로 바뀌어 해결되었다.

A, B, C, D 네 지역을 점으로 나타내고, 7개의 다리를 이들 점을 잇는 선으로 나타내면 다음 그림과 같은 그래프가 된다.

그래프에서 A, B, C, D는 모두 홀수점이므로 이 그래프는 한붓그리기가 불가능하다.

즉, 같은 다리를 두 번 이상 건너지 않고, 7개의 다리를 모두 건너가는 산책로는 존재할 수 없다.

이때, 짝수점만으로 되어 있는 그래프는 어느 점에서 시작하여도 시작한 위치로 돌아오는 한붓그리기가 가능하고, 홀수점이 2개인 그래프는 한 홀수점에서 시작하여 다른 홀수점에서 끝나는 한붓그리기가 가능하다.
여기에서 그래프 이론이 태어난 것이다.
이와 같은 그래프 이론은 여러 수학의 분야 중에서 비교적 최근에 연구가 시작된 학문으로 실생활과 관련된 많은 문제를 해결할 수 있는 수학적 모형이기도 하다.
현재 그래프 이론은 조합론, 전산 및 통계학, 유전학, 생태계 연구, 교통 문제 해결 등에 널리 활용되면서 점점 활용 분야를 넓혀가고 있다.

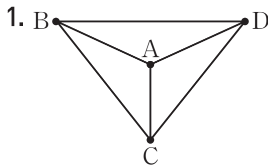
읽을거리 / 해설

1736년 오일러는 7개의 다리를 차례로 한 번씩 모두 건너되, 같은 다리는 두 번 이상 건너지 않는 산책 방법은 없음을 증명하였다. 어떻게 증명하였을까? 오일러는 땅을 꼭짓점, 다리를 변으로 하는 그래프를 그린 후 한붓그리기 문제로 바꾸어서 생각하였다.
주어진 그래프는 한붓그리기가 가능할까?
불가능하다. 홀수점이 4개이기 때문이다.
그러면 홀수점이 없거나 2개이어야만 한붓그리기가 가능한 이유는 뭘까?
한붓그리기가 가능하다면 출발점과 도착점을 제외한 중간의 점에서는 들어가는 변이 있으면 반드시 나오는 변이 있어야 한다. 따라서 중간의 점은 모두 짝수점이다.

참고 | 오일러회로와 해밀턴회로

한 꼭짓점에서 시작하여 모든 변을 지나고 지난 변을 다시 지나지 않고 시작점으로 돌아오는 경로를 오일러회로(Euler circuit)라고 한다. 오일러회로가 존재하기 위해서는 모든 꼭짓점에서 연결된 변의 개수가 짝수이어야 한다.
오일러회로 문제는 길 청소 문제, 우편 배달 문제, 전시회 물건 배치 문제 등 여러 곳에 응용될 수 있다.
한편 한 꼭짓점에서 시작하여 모든 꼭짓점을 오직 한 번씩만 지나고 시작점으로 돌아오는 경로를 해밀턴회로(Hamilton circuit)라고 한다.

탐구하기 / 풀이

1. 

2. (꼭짓점의 집합)={A, B, C, D}

(변의 집합)={AB, AC, AD, BC, BD, CD}

따라서 꼭짓점은 **4**개, 변은 **6**개이다.

03 평면그래프와 정다면체

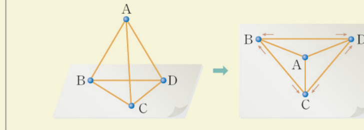
탐 구 하 기 / 정사면체의 그래프

준비물
구멍 뚫린 구슬 4개, 고무줄, 가위, A4 용지

다음 순서에 따라 활동한 후 물음에 답하여 보자.

1단계 다음 그림과 같이 구멍 뚫린 4개의 구슬과 고무줄을 이용하여 정사면체를 만들고, A4 용지 위에 B, C, D 구슬이 닿도록 한다.

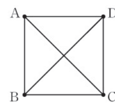
2단계 고무줄이 꼬이지 않도록 B, C, D 세 개의 구슬을 잡아 당겨 A, B, C, D 네 개의 구슬이 모두 A4 용지 위에 닿도록 한다.



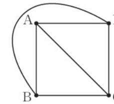
1. A4 용지 위에 놓인 네 구슬을 꼭짓점으로 하고, 구슬을 연결하는 고무줄을 변으로 하는 그래프를 그려라.
2. 물음 1에서 그린 그래프에서 꼭짓점, 변의 개수를 구하여라.

알 아 보 기 / 평면그래프에 대하여 알아보자.

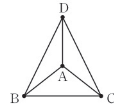
변이 꼭짓점에서만 만나도록 평면 위에 다시 그릴 수 있는 그래프를 평면그래프라고 한다. 다음 |그림1|의 그래프는 변 AC와 변 BD가 서로 엇갈려 있지만 이것을 |그림2| 또는 |그림3|의 그래프와 같이 변이 꼭짓점에서만 만나도록 평면 위에 다시 그릴 수 있으므로 평면그래프이다.



|그림1|



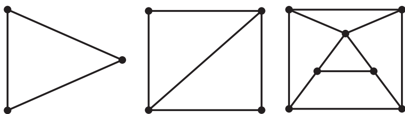
|그림2|



|그림3|

알아보기 / 해설

- 각종 전자 제품의 회로도는 그 제품에 사용되는 반도체, 저항, 스위치, 전구 등의 연결 상태를 그래프로 나타낸 것이다. 이 그래프의 변이 꼭짓점이 아닌 곳에서 서로 교차하면 제품에서는 합선이 일어나기 때문에 이를 막기 위한 추가적인 조치가 필요하며 그만큼 일손이나 비용도 더 들게 된다. 따라서 변이 꼭짓점이 아닌 곳에서 서로 교차하지 않도록 평면그래프를 이용한다.
- 평면그래프에는 다음과 같이 여러 가지가 있다.



또한 변이 서로 엇갈려 있는 그래프라도 변이 서로 교차하지 않게 평면에 다시 그릴 수 있으면 평면그래프이다.

보충 학습

평면그래프가 아닌 그래프

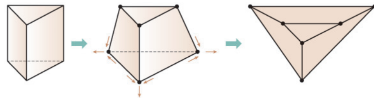
예를 들어 다음과 같이 세 집과 세 상점이 있다.

이때, 각 집에서 세 상점을 각각 갈 때, 길이 교차하지 않도록 가는 방법을 찾아보자.

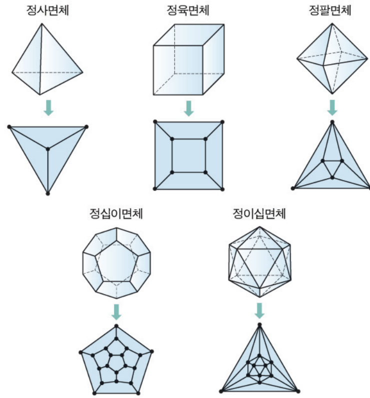
세 집과 세 상점을 각각 꼭짓점 A, B, C, D, E, F로 나타내고 길을 변으로 나타내면 그래프는 다음과 같다.

169

다음 그림과 같이 구와 연결 상태가 같은 다면체에서 그 다면체를 이루는 면 하나를 잘라 내고, 나머지 면을 늘여서 평면 위에 펼쳐 놓으면 꼭짓점과 모서리를 각각 꼭짓점과 변으로 하는 평면그래프가 된다.



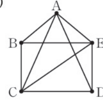
이와 같은 방법으로 정다면체를 평면그래프로 나타내면 다음과 같다.



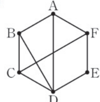
스스로 하기 / 익힘책 128쪽 | 익힘책 130쪽 | 익힘책 131쪽

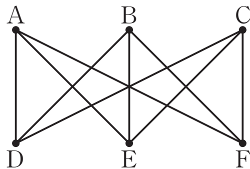
1 다음 그래프와 연결 상태가 같은 평면그래프를 그려라.

(1)



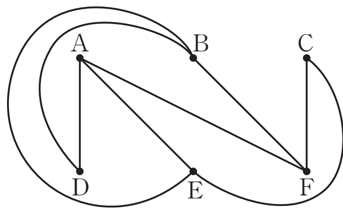
(2)





즉, 이 문제는 위의 그래프를 변이 서로 교차하지 않도록 다시 그리는 문제이다.

변이 교차하지 않도록 위의 그래프를 변 CD를 제외하고 그려 보면

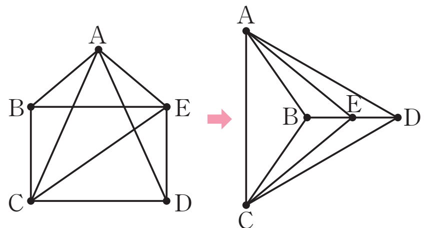


이 그래프를 처음 나타낸 그래프와 동형으로 만들려면 변 CD를 그어야 한다. 변 CD를 긋기 위해 C와 D를 이어야 하나 C와 D는 각각 꼭짓점 B, E, A, D로 이루어진 단일폐곡선의 외부와 내부에 있는 점이므로 변을 교차하지 않고서는 그 두 점을 이을 수 없다.

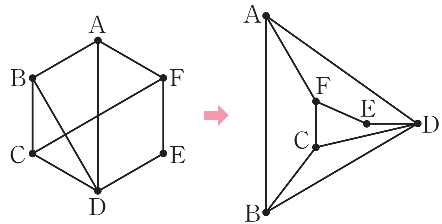
따라서 각 집에서 길을 교차하지 않고 세 상점에 이르는 방법은 없다.

스스로 하기 / 풀이

1 (1) 변 AC, AD와 변 BE가 꼭짓점에서만 만나도록 꼭짓점 B, E를 삼각형 ACD의 중앙으로 옮겨 다시 그린다.



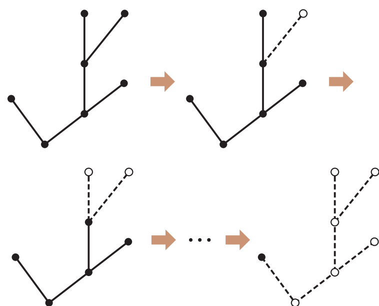
(2) 변 BD와 변 CF가 만나지 않도록 꼭짓점 C, E, F를 삼각형 ABD의 중앙으로 옮겨 다시 그린다.



알아보기 / 해설

- 오른쪽 그림과 같이 꼭짓점과 변으로 이루어진 평면그래프에서 단일폐곡선이 있을 때, 그 단일폐곡선으로 둘러싸인 부분을 유한한 면이라 하고, 변으로 둘러싸이지 않은 면을 무한한 면이라고 한다.
- 무한한 면만 1개 있는 연결된 평면그래프에서 꼭짓점의 개수, 변의 개수, 면의 개수 사이의 관계를 알아보자.

아래 그림의 왼쪽 처음 도형에서부터 끝에 있는 꼭짓점과 그 꼭짓점을 포함한 변을 함께 지워 나가면 마지막으로 꼭짓점만 하나 남게 된다.



여기서 꼭짓점의 개수가 변의 개수보다 하나 더 많다는 것을 알 수 있다.

이때, 면의 개수는 1이므로

(꼭짓점의 개수)−(변의 개수)+(면의 개수)=2

의 관계가 성립한다.

- 유한한 면이 있는 연결된 평면그래프에서 꼭짓점의 개수, 변의 개수, 면의 개수 사이의 관계를 알아보자.

다음 그림의 왼쪽 처음 도형에서부터 유한한 면을 이루는 변 하나를 그 면과 함께 지워 나가면 변이 하나 없어질 때 면도 하나 없어진다. 면이 모두 없어질 때까지 이 과정을 계속하면 마지막으로 면의 개수만큼 변이 없어진다.

170

04 연결된 평면그래프에서의 꼭짓점, 변, 면의 개수

알 아 보 기 / 연결된 평면그래프에서 꼭짓점, 변, 면의 개수 사이의 관계를 알아보자.

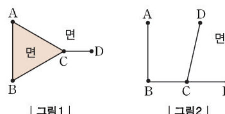
평면은 평면그래프에 의하여 몇개의 영역으로 나누어진다. 이때, 나누어진 각각의 부분을 이 평면그래프의 면이라고 한다.

이를테면 오른쪽 평면그래프에는 3개의 면이 있다.

그래프의 면에는 변으로 둘러싸인 유한한 면과 변으로 둘러싸이지 않은 무한한 면이 있다.

위의 평면그래프에서 변 AB, 변 BC, 변 CD, 변 DA로 둘러싸인 면과 변 CE, 변 ED, 변 DC로 둘러싸인 면은 모두 유한한 면이고, 변 AB, 변 BC, 변 CE, 변 ED, 변 DA로 이루어진 오각형의 바깥쪽은 하나의 무한한 면으로 생각한다.

| 보기 | | 그림1 | 의 평면그래프에는 유한한 면과 무한한 면이 각각 1개씩 있고, | 그림2 | 의 평면그래프에는 무한한 면만 1개 있다.



| 그림1 | | 그림2 |

변으로 둘러싸인 유한한 면이 없는 연결된 평면그래프에서 한 꼭짓점과 그 꼭짓점에 연결된 한 변을 소거하는 일을 되풀이하면 결국 한 개의 꼭짓점만 남게 된다.

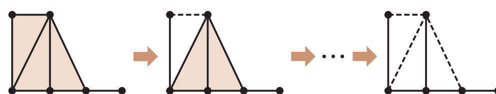
따라서 유한한 면이 없는 연결된 평면그래프에서 꼭짓점의 개수를 v, 변의 개수를 e, 면의 개수를 f라고 하면

$$e=v-1,\ f=1$$

이므로

$$v-e+f=v-(v-1)+1=2$$

의 관계가 성립한다.



여기서 처음 도형에서나 마지막 도형에서나

(꼭짓점의 개수)−(변의 개수)+(면의 개수)

의 값은 변하지 않음을 알 수 있다.

따라서 처음 도형의 꼭짓점, 변, 면의 개수를 각각 v, e, f라고 하면 다음 관계식이 성립한다.

$$v-e+f=2$$

이를테면 위의 처음 도형에서 $v=6$, $e=8$, $f=4$이므로

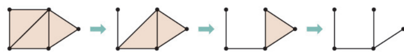
$v-e+f=6-8+4=2$

가 성립한다.

171

한편 유한한 면이 있는 연결된 평면그래프에서 유한한 면을 이루는 변 하나를 지우면 그 유한한 면이 없어진다. 이러한 과정을 계속하면 유한한 면이 없는 그래프를 만들 수 있다.

다음 그림은 유한한 면 3개를 없애기 위해서 변 3개를 지운 것이다.



일반적으로 유한한 면이 있는 연결된 평면그래프에서 꼭짓점의 개수를 v, 변의 개수를 e, 면의 개수를 f라고 할 때, 이 그래프에서 유한한 면을 없애도 꼭짓점의 개수 v는 변하지 않는다. 그러나 변의 개수는 유한한 면의 개수만큼 적어지므로 유한한 면이 없는 연결된 평면그래프로 만들었을 때의 변의 개수는 $e-(f-1)$이 되고 면의 개수는 1이 된다.

따라서 v, e, f 사이에 다음의 관계가 성립함을 알 수 있다.

$$v-\{e-(f-1)\}+1=2 \qquad \therefore v-e+f=2$$

이상을 정리하면 다음과 같다.

연결된 평면그래프의 꼭짓점, 변, 면의 개수

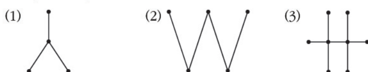
꼭짓점의 개수를 v, 변의 개수를 e, 면의 개수를 f라고 하면

$$v-e+f=2$$

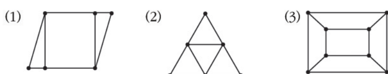
스스로 하기 /

익힘책 128쪽 | 익힘책 130쪽 | 익힘책 131쪽

1 다음 그래프에서 꼭짓점의 개수를 v, 변의 개수를 e, 면의 개수를 f라고 할 때, $v-e+f=2$가 성립함을 확인하여라.



2 다음 그래프에서 꼭짓점의 개수를 v, 변의 개수를 e, 면의 개수를 f라고 할 때, $v-e+f=2$가 성립함을 확인하여라.



스스로 하기 / 풀이

1

그래프	v	e	f	$v-e+f$
(1)	4	3	1	2
(2)	5	4	1	2
(3)	8	7	1	2

(1), (2), (3) 모두 $v-e+f=2$가 성립한다.

2

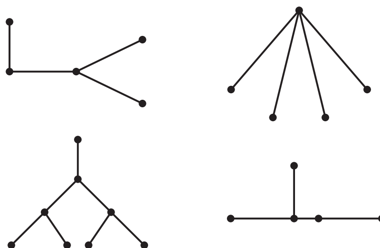
그래프	v	e	f	$v-e+f$
(1)	6	8	4	2
(2)	6	9	5	2
(3)	8	12	6	2

(1), (2), (3) 모두 $v-e+f=2$가 성립한다.

참고 | 수형도

평면그래프에서 유한한 면이 없고 무한한 면이 1개만 있는 연결된 그래프를 수형도라고 한다. 수형도는 한 꼭짓점에서 출발하여 다른 꼭짓점을 거쳐 처음 꼭짓점으로 되돌아오는 경로가 존재하지 않는다.

수형도의 예는 다음과 같다.

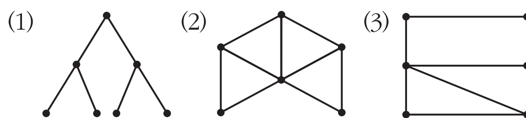


수형도는 다음과 같은 성질이 있다.

- 꼭짓점이 n개이면 변은 $(n-1)$개이다.
- 임의의 두 꼭짓점 사이에는 단 하나의 경로가 있다.
- 변을 하나라도 지우면 그래프가 더 이상 연결되어 있지 않으므로 수형도가 아니다.

Plus 문제

다음 그래프에서 꼭짓점의 개수 (v), 변의 개수 (e), 면의 개수 (f)를 각각 구하고, $v-e+f$의 값을 구하여라.



| 풀이 |

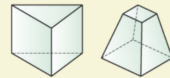
그래프	v	e	f	$v-e+f$
(1)	7	6	1	2
(2)	6	9	5	2
(3)	6	7	3	2

172

05 입체도형에서의 꼭짓점, 모서리, 면의 개수

탐 구 하 기 / 다면체의 꼭짓점, 모서리, 면의 개수

오른쪽 다면체의 꼭짓점의 개수를 v, 모서리의 개수를 e, 면의 개수를 f라고 할 때, 다음 표를 완성하여 보자.



다면체	꼭짓점의 개수(v)	모서리의 개수(e)	면의 개수(f)	$v-e+f$
삼각기둥				
사각뿔대				

알 아 보 기 / 입체도형에서의 꼭짓점, 모서리, 면의 개수 사이의 관계를 알아보자.

구와 연결 상태가 같은 다면체에서 꼭짓점의 개수를 v, 모서리의 개수를 e, 면의 개수를 f라고 하자.

이 다면체에서 면 하나를 잘라 내고 나머지 면을 늘여서 평면에 펼쳐 평면그래프를 만들 수 있다. 이때, 잘라낸 면을 평면그래프에서 무한한 면으로 생각하면 꼭짓점, 변, 면의 개수는 모두 변하지 않는다.

따라서 v, e, f 사이에

$$v-e+f=2$$

의 관계가 성립함을 알 수 있다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

튜브와 연결 상태가 같은 입체도형은 $v-e+f=0$ 의 관계가 성립한다.

구와 연결 상태가 같은 입체도형의 꼭짓점, 모서리, 면의 개수

꼭짓점의 개수를 v, 모서리의 개수를 e, 면의 개수를 f라고 하면

$$v-e+f=2$$

스 스 로 하 기 / 익힘책 128쪽 | 익힘책 130쪽 | 익힘책 131쪽

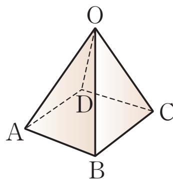
1. 오른쪽 그림과 같은 입체도형에서 꼭짓점의 개수 v와 면의 개수 f는 각각 $v=60$, $f=32$이다. 이때, 모서리의 개수 e를 구하여라.

탐구하기 / 풀이

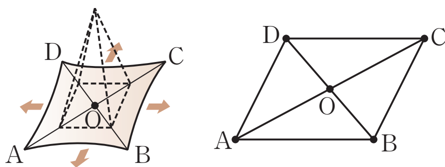
다면체	꼭짓점의 개수(v)	모서리의 개수(e)	면의 개수(f)	$v-e+f$
삼각기둥	6	9	5	2
사각뿔대	8	12	6	2

알아보기 / 해설

• 오른쪽 그림과 같이 구와 연결 상태가 같은 다면체 O−ABCD (사각뿔)의 꼭짓점, 모서리, 면의 개수를 각각 v, e, f라고 하자.



이 다면체의 밑면 ABCD를 잘라 내고 옆면을 늘여서 평면 위에 펼쳐 놓으면 다음 그림과 같이 꼭짓점과 변으로 이루어진 도형이 된다.



이때, 꼭짓점, 변의 개수는 변함이 없고, 잘라낸 밑면을 평면그래프에서 무한한 면으로 생각하면 면의 개수도 변함이 없다.

따라서 다면체에서 $v-e+f=2$가 성립함을 알 수 있다.

이 관계식을 오일러의 공식이라고 한다.

실제로 위의 다면체 O−ABCD에서 $v=5$, $e=8$, $f=5$이므로 $v-e+f=5-8+5=2$가 성립한다.

일반적으로 구와 연결 상태가 같은 다면체에 대하여 오일러의 공식이 성립한다는 것이 알려져 있다.

• 영어로 꼭짓점은 vertex, 모서리는 edge, 면은 face라고 한다.

스스로 하기 / 풀이

1. 구와 연결 상태가 같은 입체도형으로 $v=60$, $f=32$이므로 $v-e+f=2$에서

$60-e+32=2$

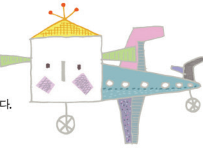
$\therefore$ **$e=90$**

173

3 그래프와 최적화

학습 목표

• 그래프를 이용하여 여러 가지 최적화 문제를 해결할 수 있다.



1 도형과 그래프

다 가 서 기 / **일의 순서 정하기**

생산 관리, 재고 관리, 수송 문제 등에서 그래프를 이용하면 효율적으로 의사 결정을 할 수 있다.

또 작업의 순서를 정하거나 최적의 경로를 찾아 문제를 해결하는 데에도 그래프를 활용할 수 있다.

소단원의 학습 목표

1. 그래프를 이용하여 의사 결정을 할 수 있다.
2. 단일폐곡선이 없는 연결된 그래프를 이용하여 의사 결정을 할 수 있다.
3. 그래프의 꼭짓점의 색칠 문제를 이용하여 의사 결정을 할 수 있다.
4. 단일폐곡선을 이용하여 최적의 경로를 구할 수 있다.

여기서 배우는 용어 및 기호

최적의 경로

다가서기 / 해설

19세기 말에 테일러(Taylor. F. W.)는 과학적 관리법을 주창하여 관리 문제에 과학의 사용을 촉진하였다. 그는 어떤 일을 수행하는 데에는 여러 가지 방법이 있지만 이 중에서 최선의 방법이 존재하며 이를 찾아서 그에 따라 업무를 수행하여야 한다고 주장했다.

또한 제2차 세계대전의 발발로 의사 결정에 있어서 더욱 과학적이고 체계적인 분석이 필요하게 되었다.

우리는 살아가면서 겪게 되는 수많은 의사 결정 과정 중에서 미래에 끼칠 영향을 고려하며 가장 합리적이면서 최적의 의사 결정을 하려고 한다.

이를테면 어떤 과목부터 공부를 해야 시간을 효율적으로 이용할 수 있는지, 어떤 업무부터 처리해야 일에 차질이 생기지 않는지, 중간에 일어날 변수는 없는지 등을 고려하며 의사 결정을 한다.

전산 관련 분야에서도 정보를 정확하면서 보다 빨리 찾아낼 수 있도록 프로그램을 만든다. 예를 들면 인터넷으로 물건을 주문했던 고객들의 정보가 담겨 있는 파일에서 특정한 고객의 전화번호를 찾거나 특정한 물건에 대한 주문 기록을 찾아내기 쉽도록 최적의 프로그램을 만든다.

최근 수학은 우주 로켓이나 미세 로봇의 개발 등 물질적인 첨단 과학의 발전에 크게 기여할 뿐만 아니라 우리 인간의 행동 양식이나 가치, 상호작용, 갈등과 같은 연구에도 깊은 관련이 있다. 계획 세우기나 영업 사원 방문 문제 등 다양한 의사 결정 과정에서 합리적이고 최적의 문제 해결을 위하여 그래프를 이용한 방법이 연구되어 활용되고 있다. 이때, 생성수형도, Greedy 알고리즘, Kruskal 알고리즘 등을 이용하면 최적의 의사 결정을 하는데 도움이 된다.

알아보기 / 해설

작업 사이의 선후 관계가 있는 여러 가지 일을 그래프로 나타내면 작업 일정을 보다 쉽게 파악하여 일의 순서를 정할 수 있다.
그래프를 이용하여 계획 세우기 문제를 해결하는 순서는 다음과 같다.

① 각 작업을 꼭짓점으로 한다.
② 두 작업 사이의 선후 관계를 화살표로 표시하여 그래프로 나타낸다.
즉, 작업 A가 다른 작업 B보다 먼저 행해져야 한다면 꼭짓점 A에서 꼭짓점 B로 향하는 화살표를 그린다.
③ 각 꼭짓점에 그 작업을 마치는 데 필요한 작업 시간을 나타낸다.

전체 작업을 마치기 위해 필요한 최소의 시간은 시작에서 마지막 작업까지의 경로 중에서 작업 시간이 가장 긴 경로로 결정한다.

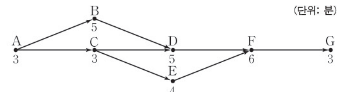
01 그래프를 이용한 의사 결정 최적화

알 아 보 기 / 그래프를 이용하여 의사 결정을 하여 보자.

여러 가지 일을 순서를 정하여 실행하는 문제나 계획을 세우는 문제는 각 작업을 꼭짓점으로 하고, 두 작업 사이의 선후 관계를 화살표로 표시하여 그래프로 나타내면 작업 일정을 보다 쉽게 파악할 수 있다. 이때, 전체 작업을 마치기 위해 필요한 최소의 시간은 시작에서 마지막 작업까지의 경로 중에서 작업 시간이 가장 긴 경로로 결정된다.

이를테면 어떤 공장에서 한 개의 상품을 만들기 위해 필요한 최소의 시간을 구하려고 한다.

필요한 작업 A, B, C, D, E, F, G에 각각 걸리는 시간과 작업의 순서를 그래프로 나타내면 다음과 같다고 하자.



이때, A에서 G로 가는 모든 경로와 걸리는 시간은 다음과 같다.

A → B → D → F → G: 22(분)
A → C → D → F → G: 20(분)
A → C → E → F → G: 19(분)

따라서 공장에서 한 개의 상품이 만들어지기 위해 필요한 최소의 시간은 22분이다.

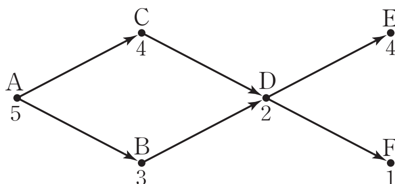
스 스 로 하 기 / 익힘책 134쪽 | 익힘책 135쪽 | 익힘책 136쪽

1 어느 회사에서 대리점을 개설하기로 하였다. 오른쪽 표는 대리점을 개설하는 데 필요한 작업과 각 작업에 걸리는 시간 및 작업의 순서 관계를 나타낸 것이다. 대리점 개설을 끝마치는 데 필요한 최소의 시간은 며칠인지 구하여라.

	작업	작업 시간(일)	먼저 해야 할 작업
A	사무실 선정	5	없음
B	사무 집기 구입	3	A
C	통신 장비 설치	4	A
D	사무실 꾸미기	2	B, C
E	사무실 홍보	4	D
F	입주	1	D

스스로 하기 / 풀이

1 필요한 작업 A, B, C, D, E, F에 각각 걸리는 시간과 작업의 순서 관계를 고려하여 그래프로 나타내면 다음과 같다.



A → B → D → E: $5+3+2+4=14$(일)
A → B → D → F: $5+3+2+1=11$(일)
A → C → D → E: $5+4+2+4=15$(일)
A → C → D → F: $5+4+2+1=12$(일)

따라서 대리점 개설을 끝마치는 데 필요한 최소의 시간은 **15**일이다.

Plus 문제

다음 표는 어느 전시회를 여는데 필요한 작업과 각 작업에 걸리는 시간 및 작업의 순서 관계를 나타낸 것이다. 전시회를 끝마치는 데 필요한 최소의 시간은 며칠인지 구하여라.

	작업	작업 시간(일)	먼저 해야 할 작업
A	장소 선정	2	없음
B	작품 모집	7	없음
C	작품 선정	4	B
D	전시회장 준비	3	A, C
E	현수막 제작	2	A
F	홍보하기	2	E
G	전시	3	D, E

175

알 아 보 기 / 단일폐곡선이 없는 연결된 그래프를 이용하여 의사 결정을 하여 보자.

변에 어떤 값을 가지는 그래프로 나타낸 후 변의 값의 합을 최소로 하면서 단일폐곡선이 없는 연결된 그래프로 만드는 문제로 모형화할 수 있는 문제는 다음과 같은 방법으로 해결한다.

단일폐곡선이 없는 연결된 그래프를 수형도라 하고, 연결된 그래프에서 적당히 변을 삭제하여 얻은 수형도를 생성수형도라고 한다.

❶ 그래프에서 가장 큰 값을 가지는 변을 제거한다. 그러나 연결된 그래프가 되지 않으면 그 다음 큰 값을 가지는 변을 제거한다. 이때, 같은 값을 가지는 변이 있으면 그 중 임의로 한 변을 제거한다.
❷ 남은 그래프가 단일폐곡선이 없는 연결된 그래프인지를 확인한다.
❸ 단일폐곡선이 있으면 ❶로 되돌아간다.
❹ 단일폐곡선이 없으면 이 과정을 끝낸다.

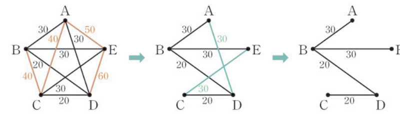
이를테면 다섯 주택 A, B, C, D, E에 가스 공급을 위하여 배관 작업을 하려고 한다. 두 주택 사이의 배관을 위한 비용이 오른쪽 표와 같고, 모든 주택에 가스가 공급되도록 최소의 비용으로 배관 작업을 하려고 할 때, 배관 연결 방법은 다음과 같이 찾을 수 있다.

(단위: 만 원)

	A	B	C	D	E
A		30	40	30	50
B	30		40	20	30
C	40	40		20	30
D	30	20	20		60
E	50	30	30	60	

❶ 각 주택을 꼭짓점으로 하고, 연결되는 배관을 변으로 하는 그래프를 그린 후, 각 변에 배관에 필요한 비용을 써넣는다.
❷ 가장 큰 값을 가지는 변 DE를 제거하고, 큰 값을 가지는 순서대로 변 AE, 변 AC, 변 BC를 제거한다.
❸ 남은 변 중에서 가장 큰 값을 가지는 변 AB, 변 AD, 변 BE, 변 CE 중에서 2개를 제거하여 단일폐곡선이 없는 연결된 그래프를 만든다.

가장 작은 값을 가지는 순서대로 변을 택하면서 각 꼭짓점을 이어 단일폐곡선이 없는 연결된 그래프를 만들어 갈 수도 있다.
즉, 변 BD와 변 CD를 택한 후 변 AB, 변 AD, 변 BE, 변 CE 중에서 변 AB와 변 BE를 택한다.

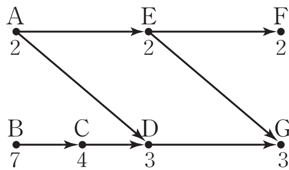


따라서 배관 작업에 드는 최소 비용은

$$30+30+20+20=100(\text{만 원})$$

이다.

| 풀이 |



B→C→D→G의 경우가 $7+4+3+3=17$(일)로 가장 길다. 따라서 전시회를 끝마치는 데 필요한 최소의 시간은 17일이다.

알아보기 / 해설

생성수형도를 이용한 의사 결정

변에 어떤 값을 가지는 그래프에서 변의 값의 합을 최소로 하며 각 꼭짓점을 연결하는 방법은 그 그래프의 생성수형도 중에서 변의 값의 합이 최소인 것을 찾아내는 것과 같으며 다음과 같이 구할 수 있다.

① 그래프에서 가장 큰 값을 가지는 변을 제거한다. 단, 연결된 그래프가 되어야 하고 같은 값을 가지는 변이 있으면 그 중 임의로 한 변을 제거한다.

② 남은 그래프가 주어진 그래프의 생성수형도이면 이 과정을 끝내고 아니면 ①로 되돌아간다.

위의 알고리즘에서는 주어진 그래프의 생성수형도를 얻을 수 있을 때까지 값이 큰 변을 차례로 제거하였다.

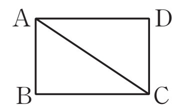
이와 반대로 값이 작은 변을 선택하여 생성수형도를 만들 수도 있다. 이때, 변의 값의 합은 위의 알고리즘으로 얻은 생성수형도의 변의 값의 합과 같다.

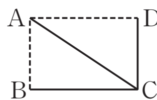
① 가장 작은 값을 가지는 변을 선택하여 빨간색으로 칠한다. 단, 같은 값을 가지는 변이 있으면 그 중 임의로 한 변을 선택한다.

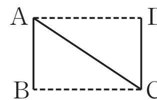
② 빨간색으로 색칠한 그래프가 주어진 그래프의 생성수형도이면 이 과정을 끝내고 아니면 ①로 되돌아간다.

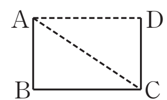
참고 | 생성수형도

한 그래프에 대하여 생성수형도는 여러 개 존재할 수 있다. 이를테면 오른쪽 그래프의 생성수형도는 다음과 같이 여러 가지가 있다.



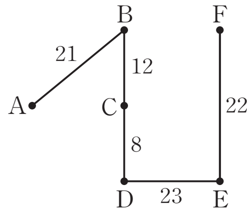






스스로 하기 / 풀이

2 가장 큰 비용이 드는 변 CF를 제거하고, 비용이 많이 드는 순서대로 변 BF, 변 AD, 변 CE를 제거한다. 6개의 꼭짓점이 단일폐곡선 없이 연결되어 있고 이때의 그래프는 다음과 같다.



따라서 수도관 설치에 드는 최소 비용은

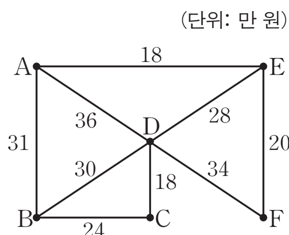
21+12+8+23+22=**86**(만 원)

참고로 가장 비용이 적은 순서대로 변 CD, 변 BC, 변 AB, 변 EF, 변 DE를 택하면서 각 꼭짓점을 이어 단일폐곡선이 없는 연결된 그래프를 만들어 최소 비용을 구할 수도 있다.

Plus 문제

다음 그래프는 어느 마을의 여섯 가구 A, B, C, D, E, F 사이에 상수도 구축 비용을 조사하여 나타낸 것이다. 모든 집에 상수도를 설치할 때, 최소 비용을 구하여라.

(단위: 만 원)



176

함께 하기 / 익힘책 134쪽 | 익힘책 135쪽 | 익힘책 136쪽

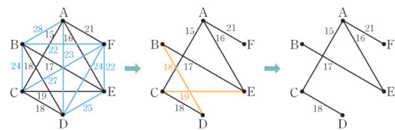
1 오른쪽 표는 어느 마을의 여섯 가구 A, B, C, D, E, F 사이에 통신 케이블을 설치하는 데 드는 비용을 나타낸 것이다. 모든 집이 통신이 될 수 있도록 케이블을 설치할 때, 최소 비용을 구하여라.

(단위: 만 원)

	A	B	C	D	E	F
A		28	15	23	16	21
B	28		24	18	17	22
C	15	24		18	19	27
D	23	18	18		25	24
E	16	17	19	25		22
F	21	22	27	24	22	

풀이

각 집을 꼭짓점으로 하고 연결되는 통신 케이블을 변으로 하는 그래프를 그린 후, 각 변에 통신 케이블 설치에 필요한 비용을 써넣는다.
가장 큰 비용이 드는 변 AB를 제거하고, 비용이 많이 드는 순서대로 변 CF, 변 DE, 변 BC, 변 DF, 변 AD, 변 BF, 변 EF를 제거한다.
다음으로 변 AF를 소거하면 꼭짓점 F가 떨어지므로 변 AF는 제거하지 않고, 6개의 꼭짓점이 단일폐곡선 없이 연결되도록 변 CE와 변 BD를 제거한다.



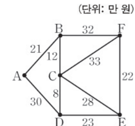
따라서 통신 케이블 설치에 드는 최소 비용은

15+18+16+17+21=**87(만 원)**

스스로 하기 / 익힘책 134쪽 | 익힘책 135쪽 | 익힘책 136쪽

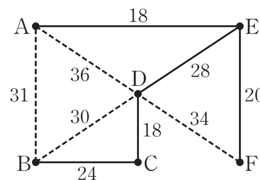
2 오른쪽 그래프는 어느 마을의 여섯 가구 A, B, C, D, E, F 사이에 수도관을 설치하는 데 드는 비용을 나타낸 것이다. 모든 집에 수돗물이 공급되도록 수도관을 설치할 때, 최소 비용을 구하여라.

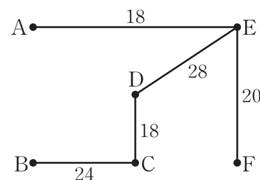
(단위: 만 원)



| 풀이 |

가장 큰 비용이 드는 변 AD를 제거하고, 비용이 많이 드는 순서대로 변 DF, 변 AB, 변 BD를 제거한다.





따라서 상수도를 설치하는 데 드는 최소 비용은

18+20+28+18+24=108(만 원)

알 아 보 기 / 그래프의 꼭짓점의 색칠 문제를 이용하여 의사 결정을 하여 보자.

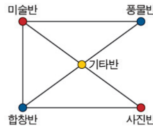
그래프에서 이웃하는 꼭짓점이 서로 다른 색을 갖도록 그 그래프의 모든 꼭짓점을 색칠하는 것을 꼭짓점의 적절한 색칠이라 하고, 이때 필요한 최소의 색의 수를 구하는 것을 꼭짓점의 색칠 문제라고 한다.

꼭짓점의 색칠 문제를 이용하여 의사 결정을 하는 방법을 알아보자.

오른쪽 표는 A, B, C, D, E 다섯 사람이 각각 참가하는 5개의 동아리를 나타낸 것이다. 동아리 발표를 준비하기 위하여 각 동아리는 1시간씩 모임을 갖기로 하였다. 각 동아리 회원이 모두 참석할 수 있도록 일정을 정할 때, 5개의 동아리의 모임을 모두 마치려면 최소한 몇 시간이 필요한지 알아보자.

동아리	회원
미술반	A, C, D
사진반	B, E
합창반	A, B, E
기타반	B, D
풍물반	C, D

각 동아리를 꼭짓점으로 하여 같은 사람이 회원으로 있는 동아리를 변으로 연결하면 오른쪽과 같은 그래프를 그릴 수 있다.



이때, 이 그래프를 적절하게 색칠하는 데 필요한 최소의 색의 수는 3가지이다.

같은 색으로 색칠한 동아리는 동시에 모임을 가질 수 있으므로 최소한 3시간이 필요하다.

변으로 연결된 동아리는 동시에 모임을 가질 수 없다.

스 스 로 하 기 / 익힘책 134쪽 | 익힘책 135쪽 | 익힘책 136쪽

3 오른쪽 표는 6개의 화학 물질에 대하여 함께 보관할 수 없는 화학 물질을 나타낸 표이다. 꼭짓점의 색칠 문제를 이용하여, 6개의 화학 물질을 보관하는 창고의 수의 최솟값을 구하여라.

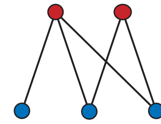
화학 물질	함께 보관할 수 없는 화학 물질
A	B, C, E
B	A, C, E, F
C	A, B, D
D	C
E	A, B
F	B

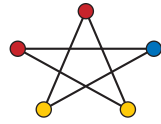
어떤 화학 물질끼리는 서로 반응하기 쉬워서 사고 방지를 위하여 따로 보관하여야 하는 경우가 있다.

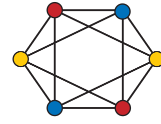
알아보기 / 해설

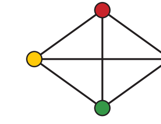
• 그래프의 꼭짓점의 색칠 문제는 지도 색칠 문제에서 나왔다. '국경을 공유하는 국가들을 서로 다른 색을 칠하여 구분되도록 할 때, 최소한 몇 가지 색이 필요할까?' 라는 문제가 1970년대에 그래프의 꼭짓점의 색칠 문제로 바꾸어 해결되었다.
지도에서 국가들을 꼭짓점으로 나타내고 서로 국경을 공유하고 있는 국가들에 대한 꼭짓점들을 변으로 연결하면 그래프를 그릴 수 있다. 그리고 변으로 연결된 두 꼭짓점은 서로 다른 색으로 칠하면서 꼭짓점에 칠해진 색의 수를 최소가 되게 하면 이 색의 수가 지도를 만들 때 필요한 최소의 색의 수가 된다.

• 다음 그래프들은 적절하게 색칠하는 데 필요한 최소의 색의 수이다.


2가지


3가지

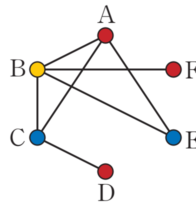

3가지


4가지

• 그래프의 꼭짓점의 색칠 문제는 상호 작용하는 화학 약품을 효율적으로 보관하는 문제, 무선 기지국 사이의 간섭이 일어나지 않도록 하기 위한 주파수 할당 문제 등에 활용된다.

스스로 하기 / 풀이

3 각 화학 물질을 꼭짓점으로 하여 함께 보관할 수 없는 화학 물질을 변으로 연결하면 다음과 같은 그래프를 그릴 수 있다.



이때, 이 그래프를 적절하게 색칠하는 데 필요한 최소의 색의 수는 3가지이다.
따라서 같은 색으로 색칠한 화학 물질은 함께 보관할 수 있으므로 최소한 **3**개의 창고가 필요하다.

알아보기 / 해설

- 대표적인 최적화 문제는 외판원 문제로 한 외판원이 본사를 출발하여 그의 고객이 살고 있는 도시를 단 한 번씩 모두 방문하고 본사로 돌아오는 데 최소 비용(또는 최소 이동 거리, 최소의 시간)이 드는 경로를 찾는 것이다. 이런 문제는 수학적으로 모형화시키기는 쉽지만 최적의 경로를 찾는 것은 모든 경로를 확인해야 하므로 쉽지 않다. 방문해야 할 도시를 꼭짓점으로 하고, 두 도시를 변으로 연결한 후 각 변에 비용을 써넣어 그래프로 나타낸다.
어느 특정한 꼭짓점을 출발하여 다른 모든 꼭짓점을 단 한 번씩만 지나고 그 꼭짓점으로 되돌아오는 데 드는 비용이 최소인 경로가 최적의 경로이다.
- 주어진 시작점에서 가장 작은 값의 변을 따라 이동하여 얻어진 값이 최소라고는 할 수 없다.

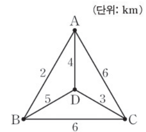
알아보기 / 단일폐곡선을 이용하여 최적의 경로를 알아보자.

한 지점을 출발하여 이동 거리의 합을 최소로 하면서 여러 곳을 방문하고 처음 출발점으로 되돌아오는 문제는, 그래프에서 각 변의 값의 합이 최소가 되는 단일폐곡선 경로를 찾는 문제이다.

일반적으로 그래프에서 각 변의 값의 합이 최소 또는 최대가 되는 경로를 **최적의 경로**라고 한다. 최적의 경로를 결정하는 효과적인 알고리즘은 알려져 있지 않으므로 가능한 모든 경로를 확인하여야 한다.

예를 들어 어느 택배 운송 차량이 A 지점을 출발하여 B, C, D 지점을 모두 방문하고 다시 A 지점으로 돌아오는 최소의 경로를 알아보자.

A, B, C, D 각 지점을 꼭짓점으로 하고, 두 꼭짓점 사이를 변으로 연결한 후 각 변에 두 지점 사이의 거리를 써넣어 그래프로 나타내면 오른쪽과 같다고 하자.



이때, 모든 경로의 이동 거리를 구하여 보면 다음과 같다.

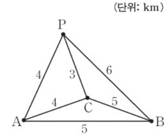
A → B → C → D → A: 2+6+3+4=15(km)
A → D → C → B → A: 4+3+6+2=15(km)
A → C → B → D → A: 6+6+5+4=21(km)
A → D → B → C → A: 4+5+6+6=21(km)
A → B → D → C → A: 2+5+3+6=16(km)
A → C → D → B → A: 6+3+5+2=16(km)

따라서 A → B → C → D → A 또는 A → D → C → B → A의 순서로 방문할 때, 이동 거리가 최소이다.

이때, 이동 거리의 최솟값은 15 km이다.

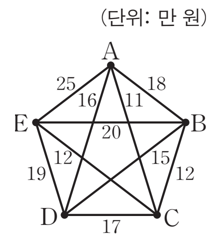
스스로 하기 / 익힘책 134쪽 | 익힘책 135쪽 | 익힘책 136쪽

4 오른쪽 그림은 우체국 P와 세 지역 A, B, C 사이의 거리를 변 위에 써넣은 그래프이다. 우체부가 P에서 출발하여 A, B, C 지역을 지나 다시 P로 돌아올 때, 이동 거리의 최솟값을 구하여라.



Plus 문제

오른쪽 그림은 A, B, C, D, E 도시 사이의 교통비를 변 위에 써넣은 그래프이다. A도시를 출발하여 B, C, D, E 도시를 모두 방문하고 다시 A 도시로 돌아오는 여행 일정을 세우려고 할 때, 드는 비용의 최솟값을 구하여라.



| 풀이 |

비용이 최소가 되는 경로는
A → D → B → E → C → A
A → C → E → B → D → A
: 16+15+20+12+11=74(만 원)

스스로 하기 / 풀이

4 P에서 출발하여 다른 세 지역을 거쳐 다시 P로 돌아오는 모든 경로의 이동 거리는 다음과 같다.

P → A → B → C → P,
P → C → B → A → P
: 4+5+5+3=17(km)
P → A → C → B → P,
P → B → C → A → P
: 4+4+5+6=19(km)
P → B → A → C → P,
P → C → A → B → P
: 6+5+4+3=18(km)

따라서 이동 거리의 최솟값은 **17 km**이다.

중단원 확인하기

새로 나온 용어와 기호
그래프, 꼭짓점, 변, 경로, 한붓그리기, 최적의 경로

Ⅴ-1. 도형과 그래프

그래프의 뜻

의사소통

1 다음과 같은 꼭짓점과 변의 집합을 가지는 그래프를 그려라.

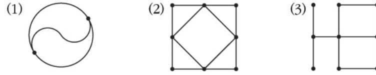
(꼭짓점의 집합)$=\{$A, B, C, D, E$\}$

(변의 집합)$=\{$AB, AD, AE, BC, BD, DE$\}$

한붓그리기

이해

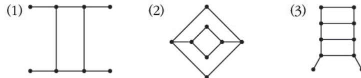
2 다음 그래프 중 한붓그리기가 가능한 것을 모두 찾아라.



꼭짓점, 변, 면의 개수

이해

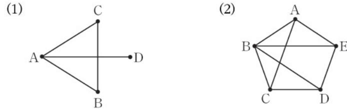
3 다음 그래프에서 꼭짓점의 개수를 v, 변의 개수를 e, 면의 개수를 f라고 할 때, $v-e+f$의 값을 구하여라.



평면그래프

이해

4 다음 그래프와 연결 상태가 같은 평면그래프를 그려라.

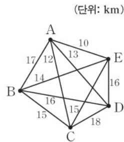


전선 설치

의사소통

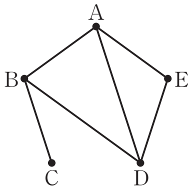
5 오른쪽 그래프는 다섯 마을 A, B, C, D, E 사이의 거리를 나타낸 것이다. 모든 마을에 전기가 공급되도록 전선을 설치할 때, 설치되는 전선의 최소 길이를 구하여라.

(단위: km)

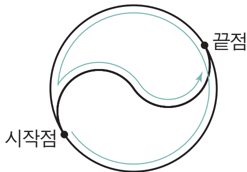


중단원 확인하기 / 풀이

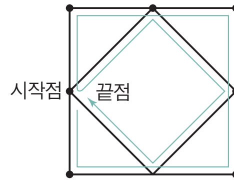
1



2 (1) 홀수점이 2개이므로 한붓그리기가 가능하다.



(2) 모든 점이 짝수점이므로 한붓그리기가 가능하다.



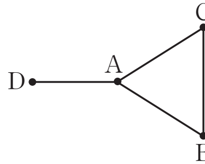
(3) 홀수점이 4개이므로 한붓그리기가 가능하지 않다.

따라서 한붓그리기가 가능한 그래프는 (1), (2)이다.

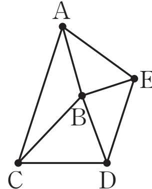
3

그래프	v	e	f	$v-e+f$
(1)	8	8	2	2
(2)	8	10	4	2
(3)	10	12	4	2

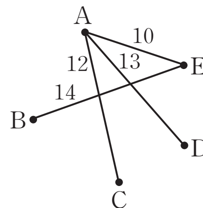
4 (1)



(2)



5 그래프에서 거리가 긴 변부터 차례로 제거하여 단일폐곡선이 없는 연결된 그래프를 만든다. 즉, 변 CD, 변 AB, 변 BD, 변 DE, 변 BC, 변 CE를 차례로 제거한다.



따라서 설치되는 전선의 최소 길이는

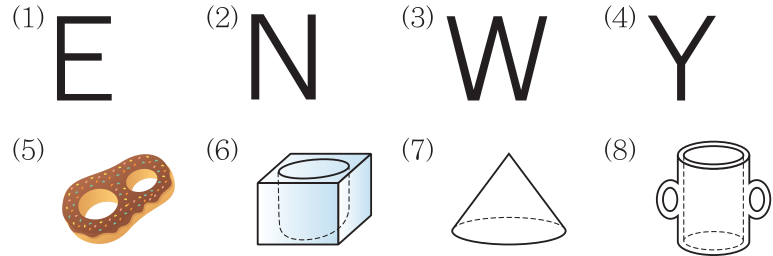
$10+12+13+14=$**49(km)**

중단원 평가 문제

정답과 풀이 p.254

01 바탕

다음 도형 중 연결 상태가 같은 것끼리 짝지어라.

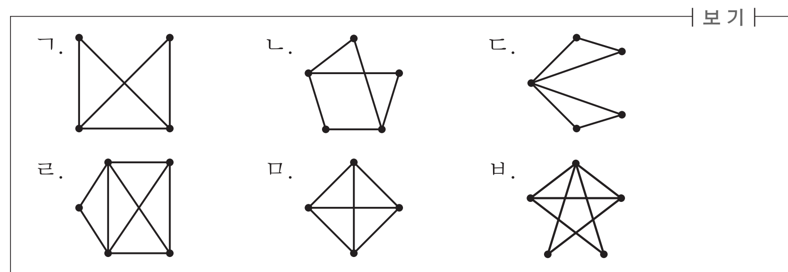


02 기본

꼭짓점의 집합이 {A, B, C, D, E}이고, 변의 집합이 {AC, AE, BC, CD, CE, DE}인 그래프를 그려라.

03 기본

다음 보기 중 서로 같은 그래프끼리 바르게 짝지은 것은?

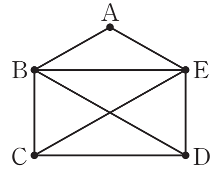


① ㄱ, ㅁ ② ㄱ, ㅂ ③ ㄴ, ㄷ ④ ㄹ, ㅁ ⑤ ㄹ, ㅂ

변을 반복하지 않으면서 한 꼭짓점에서 다른 꼭짓점으로 가는 길을 경로라고 한다.

04 기본

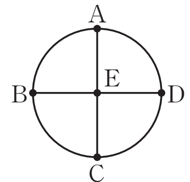
오른쪽 그래프에서 꼭짓점 A를 출발하여 변을 4개를 지나 꼭짓점 D로 가는 경로의 수를 구하여라.



홀수점이 2개인 그래프는 한 홀수점에서 출발하여 다른 홀수점에서 끝난다.

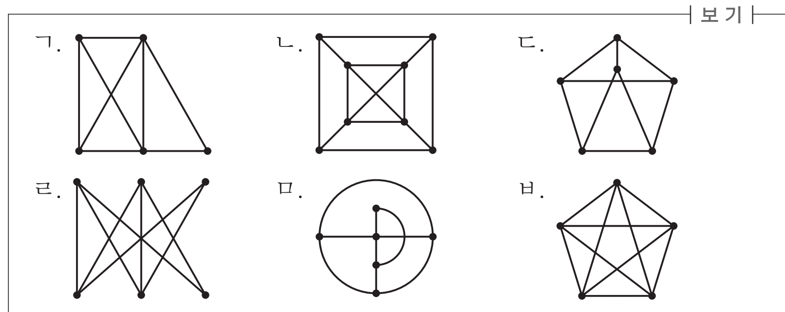
05 실력

오른쪽 도형에서 한 선분을 그어 점 A를 출발하여 점 B에서 끝나도록 한붓그리기를 하려고 한다. 어느 두 점을 이어야 하는지 말하여라.



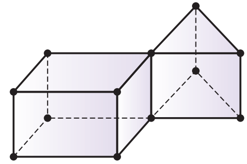
06 바탕

다음 보기 중 평면그래프를 모두 찾아라.



07 바탕

오른쪽 그림과 같이 한 모서리를 공유하는 직육면체와 삼각기둥으로 된 입체도형에서 꼭짓점의 개수를 v, 모서리의 개수를 e, 면의 개수를 f라고 할 때, 다음 물음에 답하여라.



(1) v, e, f의 값을 각각 구하여라.

(2) $v-e+f$의 값을 구하여라.

08 바탕

구와 연결 상태가 같은 입체도형의 꼭짓점의 개수가 20개, 모서리의 개수가 32개일 때, 이 입체도형의 면의 개수를 구하여라.

필요한 최소의 시간은 시작에서 마지막 작업까지의 경로 중에서 작업 시간이 가장 긴 경로로 결정된다.

09 기본

어느 고등학교 미술 동아리에서 작품 전시회를 열기로 하였다. 다음은 작품 전시회를 준비하는 데 필요한 작업, 각 작업에 걸리는 시간, 작업의 순서 관계를 나타낸 표이다.

	작업	작업 시간(일)	먼저 해야 할 작업
A	전시회 기본 계획 수립	2	없음
B	작품 모집	5	A
C	전시회 장소 선정	3	A
D	현수막 제작	2	C
E	초대장 제작	3	C
F	전시회 작품 선정	1	B
G	전시회장 준비	2	C, D, F

작품 전시회 준비를 끝마치는 데 필요한 최소의 시간은 며칠인지 구하여라.

10 실력

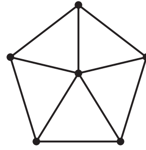
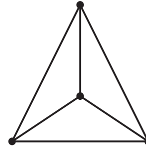
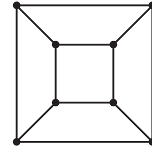
오른쪽 표는 다섯 개의 지점 A, B, C, D, E 사이에 통신 케이블을 설치하는 데 드는 비용을 나타낸 것이다.
다섯 개의 지점이 통신이 될 수 있도록 케이블을 설치할 때, 최소 비용을 구하여라.

(단위: 백만 원)

	A	B	C	D	E
A		2	4	3	3
B	2		3	1	4
C	4	3		2	3
D	3	1	2		5
E	3	4	3	5	

11 기본

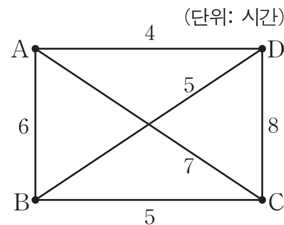
다음 세 그래프에서 이웃하는 꼭짓점이 서로 다른 색을 갖도록 모든 꼭짓점을 적절하게 색칠할 때, 필요한 최소의 색의 수를 각각 x, y, z라고 하면 $x+y+z$의 값은?

① 6 ② 10 ③ 12 ④ 15 ⑤ 18

12 기본

다음 그림은 네 관광지 A, B, C, D 사이의 이동 시간을 변 위에 써넣은 그래프이다. A 관광지에서 출발하여 B, C, D 관광지를 지나 다시 A 관광지로 돌아올 때, 최소 이동 시간을 구하여라.

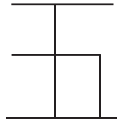


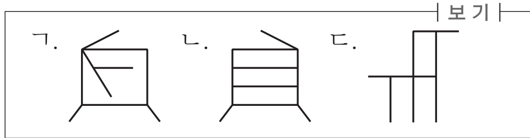
대단원 평가 문제

정답과 풀이 p.255

01

다음 보기의 도형 중 오른쪽 도형과 연결 상태가 같은 것을 모두 고른 것은?

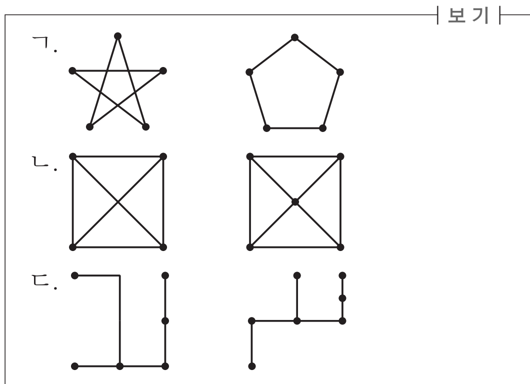




① ㄱ　② ㄱ, ㄴ　③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

02

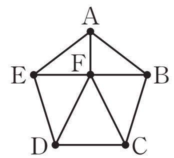
다음 보기 중 서로 동형인 그래프끼리 짝지어진 것만을 모두 고른 것은?



① ㄱ　② ㄱ, ㄴ　③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

03

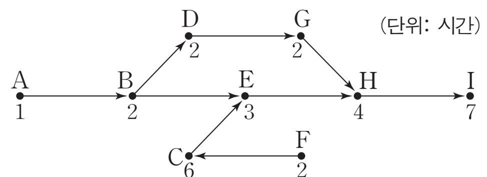
오른쪽 그래프에서 꼭짓점 A를 출발하여 모든 꼭짓점을 한 번씩만 지나서 꼭짓점 B로 가는 경로의 수는?



① 1　② 2　③ 3
④ 4　⑤ 5

04

다음 그래프는 어떤 일을 하는데 필요한 9가지 작업에 각각 걸리는 시간과 작업 순서를 나타낸 것이다. 이 작업을 끝마치는 데 필요한 최소의 시간은?



① 17시간　② 18시간　③ 20시간
④ 22시간　⑤ 23시간

05

구와 연결 상태가 같은 십면체의 모서리의 개수가 24개일 때, 꼭짓점의 개수는?

① 16개　② 18개　③ 20개
④ 22개　⑤ 24개

06

다음 표는 어느 공장에서 상품을 만드는 데 필요한 작업, 작업 시간, 작업의 순서 관계를 나타낸 것이다.

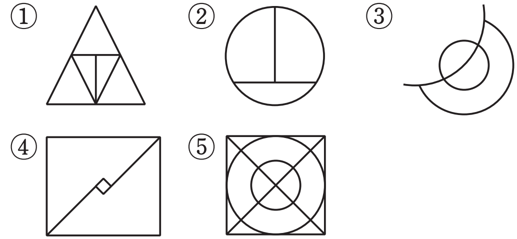
작업	작업 시간(일)	선행 작업
A	2	없음
B	4	A
C	5	A
D	6	B
E	5	B, C
F	3	D, E
G	1	E
H	4	F, G

이 작업을 모두 마치는 데 필요한 최소의 작업 일수는?

① 16일　② 17일　③ 18일
④ 19일　⑤ 20일

07

다음 도형 중 한붓그리기가 가능한 것은?



08

국토해양부에서는 A, B, C, D, E의 5개의 도시를 연결하는 철도를 건설할 계획을 가지고 있다. 오른쪽 표는 두 도시를 직접 연결하는 철도를 건설하는 데 드는 비용을 나타낸 것이다. 5개의 도시가 모두 연결되도록 최소 비용으로 철도를 건설하려고 할 때, A 도시와 직접 연결되는 도시를 모두 나열한 것은?

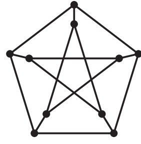
(단위: 백만 원)

	A	B	C	D	E
A		6	5	7	2
B	6		5	8	6
C	5	5		9	4
D	7	8	9		8
E	2	6	4	8	

① C　② E　③ B, C
④ C, D　⑤ D, E

09

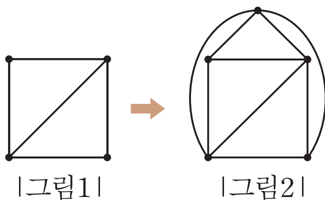
10개의 서류를 봉투에 담아 보관하려고 한다. 각 서류를 꼭짓점으로 나타내고, 같은 봉투에 담아서는 안되는 서류끼리 변으로 연결하면 오른쪽 그래프와 같다. 이때, 필요한 서류 봉투의 최소 개수는?



① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

10 UP!!

다음의 |그림 1|과 같은 그래프에 n개의 꼭짓점을 추가하여 변의 개수가 최대인 평면그래프를 만들 때, 이 그래프의 변의 개수를 F_n이라고 하자. 예를 들어 |그림 2|의 변의 개수는 F_1이고, $F_1=9$이다.



|그림1| |그림2|

이때, F_{10}의 값은?

① 18 ② 27 ③ 36
④ 45 ⑤ 61

11 서술형

다음 표는 어느 무선 통신 회사의 6개의 기지국 A, B, C, D, E, F 사이의 거리를 나타낸 것이다. 두 기지국 사이의 거리가 150 km 이내인 기지국끼리는 같은 주파수를 사용할 수 없다고 할 때, 이 무선 통신 회사가 확보해야 할 주파수의 최소 개수를 구하여라.

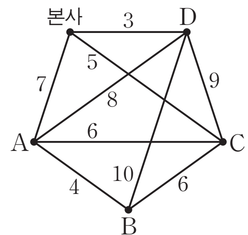
(단위: km)

	A	B	C	D	E	F
A		90	180	205	55	105
B	90		130	180	105	165
C	180	130		100	200	250
D	205	180	100		210	225
E	55	105	200	210		100
F	105	165	250	225	100	

12 서술형

어떤 회사의 영업 사원이 본사를 출발하여 거리가 오른쪽 그림과 같은 A, B, C, D 4개 지점을 모두 방문하고 본사로 되돌아오려고 할 때, 최소 이동 거리를 구하여라.

(단위: km)



V 도형과 그래프

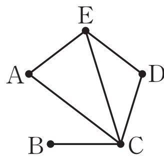
중단원 평가 문제

▶ 1. 도형과 그래프 / P_218

01 (1)과 (4)를 모두 늘이면 ┬ 와 연결 상태가 같다.
(2)와 (3)을 모두 늘이면 ─── 와 연결 상태가 같다.
(5)와 (8)은 구멍이 2개 뚫린 입체도형으로 서로 연결 상태가 같다.
(6)과 (7)은 구와 연결 상태가 같은 도형으로 서로 연결 상태가 같다.

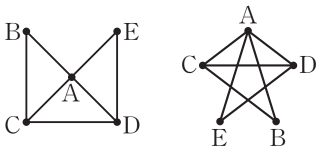
답 (1)과 (4), (2)와 (3), (5)와 (8), (6)과 (7)

02 먼저 꼭짓점을 찍은 다음에 각 변이 나타내는 꼭짓점을 연결하면 오른쪽 그래프와 같다.



답 풀이 참조

03 ①은 서로 같지 않다.
ㄱ은 연결된 변이 2개인 꼭짓점이 있지만 ㅁ은 없다.
②는 서로 같다.



③은 서로 같지 않다.
ㄴ은 연결된 변이 4개인 꼭짓점이 없지만 ㄷ은 있다.
④도 서로 같지 않다.
ㄹ은 꼭짓점이 5개, ㅁ은 꼭짓점이 4개이다.
⑤도 서로 같지 않다.
ㄹ은 연결된 변이 2개인 꼭짓점이 한 개이지만 ㅂ은 두 개이다.

답 ②

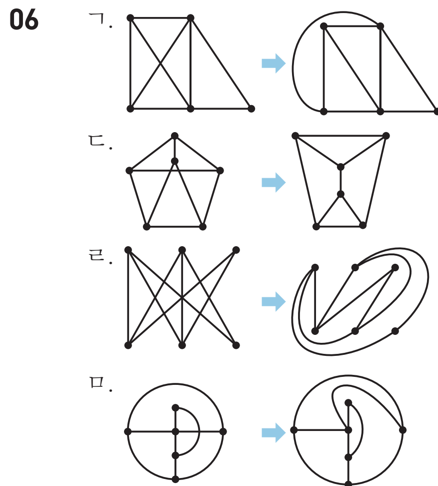
04 꼭짓점 A에서 출발하여 변을 4개 지나 꼭짓점 D로 가는 경로의 수는 ABCED, ABECD, AEBCD, AECBD로 4개이다.

답 4개

05 네 점 A, B, C, D가 모두 홀수점이므로 점 C와 점 D를 짝수점으로 바꿔 주어야 한다. 즉, 점 C와 점 D를 잇는다.

답 점 C와 점 D

06



따라서 평면그래프는 ㄱ, ㄷ, ㄹ, ㅁ이다.

답 ㄱ, ㄷ, ㄹ, ㅁ

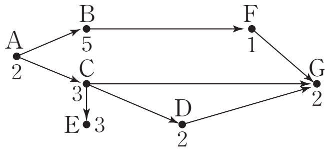
07 (1) $v=12,\ e=20,\ f=11$
(2) $v-e+f=12-20+11=3$

답 (1) $v=12,\ e=20,\ f=11$ (2) 3

08 구와 연결 상태가 같은 입체도형에서
$v-e+f=2$
이므로 $20-32+f=2$ $\quad\therefore f=14$
따라서 면의 개수는 14개이다.

답 14개

09 필요한 작업을 꼭짓점으로 하고 작업에 걸리는 시간과 작업의 순서 관계를 고려하여 그래프로 나타내면 다음과 같다.



A→B→F→G: 2+5+1+2=10(일)

A→C→D→G: 2+3+2+2=9(일)

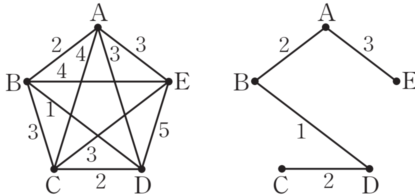
A→C→E: 2+3+3=8(일)

A→C→G: 2+3+2=7(일)

따라서 작품 전시회 준비를 끝마치는 데 필요한 최소의 시간은 10일이다.

답 10일

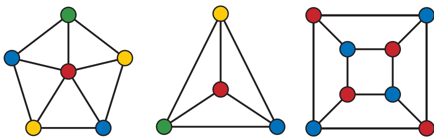
10 각 지점을 꼭짓점으로 하고 연결되는 통신 케이블을 변으로 하는 그래프를 그린 후, 각 변에 통신 케이블 설치에 필요한 비용을 써넣는다.
이 그래프에서 가장 큰 비용이 드는 변 DE를 제거하고, 비용이 많이 드는 순서대로 변 AC, 변 BE를 제거한다.
다음으로 같은 값을 가지는 변 4개 중에서 단일폐곡선이 없는 연결된 그래프를 만들기 위해 변 BC와 변 AD를 제거한 후 변 CE와 변 AE 중 임의로 한 변을 제거한다.



따라서 통신 케이블 설치에 드는 최소 비용은
1+2+2+3=8(백만 원)

답 800만 원

11 주어진 조건을 만족하도록 그래프의 꼭짓점을 색칠하면



$\therefore x+y+z=4+4+2=10$

답 ②

12 A 관광지에서 출발하여 다른 세 관광지를 거쳐 다시 A 관광지로 돌아오는 모든 경로의 이동 시간은 다음과 같다.

A→B→C→D→A, A→D→C→B→A
: 6+5+8+4=23 (시간)

A→B→D→C→A, A→C→D→B→A
: 6+5+8+7=26 (시간)

A→C→B→D→A, A→D→B→C→A
: 7+5+5+4=21 (시간)

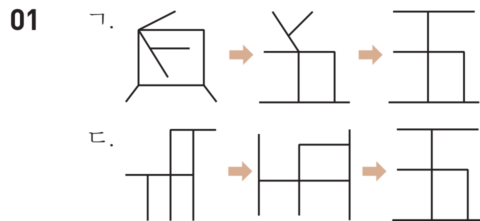
따라서 최소 이동 시간은 21시간이다.

답 21시간

대단원 평가 문제 p.222~224

01 ㄱ.

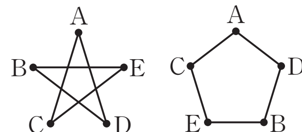
ㄷ.



따라서 주어진 도형과 연결 상태가 같은 도형은 ㄱ, ㄷ이다.

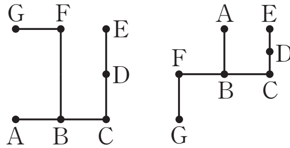
답 ③

02 ㄱ은 서로 동형이다.



ㄴ은 서로 동형이 아니다.
두 그래프의 꼭짓점이 각각 4개, 5개로 다르므로 서로 다른 그래프이다.

ㄷ은 서로 동형이다.



따라서 보기 중 서로 동형인 그래프끼리 짝지어진 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ③

03 A에서 모든 꼭짓점을 한 번씩만 지나서 B로 가는 경로는 AEDCFB, AEDFCB, AEFDCB, AFEDCB이므로 4가지이다.

답 ④

04 A에서 I로 가는 모든 경로와 걸리는 시간은

A→B→D→G→H→I

: $1+2+2+2+4+7=18$(시간)

A→B→E→H→I

: $1+2+3+4+7=17$(시간)

F에서 I로 가는 경로와 걸리는 시간은

F→C→E→H→I

: $2+6+3+4+7=22$(시간)

따라서 작업을 끝마치는 데 필요한 최소의 시간은 22시간이다.

답 ④

05 주어진 도형은 십면체이므로 면의 개수는 10이다.

구와 연결 상태가 같은 입체도형에서

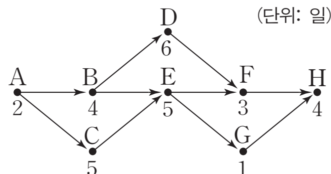
$v-e+f=2$이므로

$v-24+10=2$

$\therefore v=16$

답 ①

06 각 작업을 꼭짓점으로 하고 작업의 순서 관계를 고려하여 그래프로 나타내면 다음과 같다.



이때, A에서 H로 가는 모든 경로와 걸리는 시간은 다음과 같다.

A→B→D→F→H : 19(일)

A→B→E→F→H : 18(일)

A→B→E→G→H : 16(일)

A→C→E→F→H : 19(일)

A→C→E→G→H : 17(일)

따라서 작업을 모두 마치는 데 필요한 최소의 작업 일수는 19일이다.

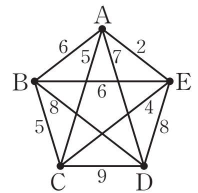
답 ④

07 홀수점의 개수가 0 또는 2인 도형은 한붓그리기가 가능하다. 홀수점의 개수는 각각 다음과 같다.

①은 2개, ②, ③, ④, ⑤는 4개이다.

답 ①

08 각 도시를 꼭짓점으로 하고 연결하는 철도를 변으로 하는 그래프를 그린 후 각 변에 건설에 드는 비용을 써넣으면 오른쪽 그림과 같다.



다음과 같은 방법으로 건설 비용의 최솟값을 찾을 수 있다.

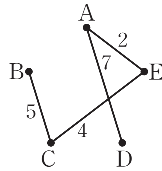
(i) 먼저 A를 선택하고 A와 직접 연결된 변 중 최솟값을 가지는 것을 선택한다.
$\therefore$ A−E

(ii) A 또는 E와 연결된 변 중 최솟값을 가지는 것을 선택한다. $\therefore$ A−E−C

(iii) A 또는 C와 연결된 변 중 최솟값을 가지는 것을 선택한다. 단, 단일폐곡선이 생기면 안되므로 A−C는 제외한다.
$\therefore$ A−E−C−B

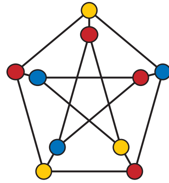
(iv) A 또는 B와 연결된 변 중 최솟값을 가지는 것을 선택한다. 단, 단일폐곡선이 생기면 안되므로 A−C와 A−B는 제외한다.
$\therefore$ D−A−E−C−B

따라서 A 도시와 직접 연결되는 도시는 D, E이다.



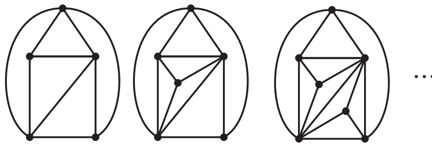
답 ⑤

09 오른쪽 그림과 같이 주어진 그래프를 적절하게 색칠하는 데 필요한 최소의 색의 수는 3가지이다.



답 ③

10



$F_1=9$ $F_2=9+3$ $F_3=9+3+3$

그래프의 변의 개수는 9, 12, 15, 18, …로 첫째항이 9, 공차가 3인 등차수열을 이룬다.

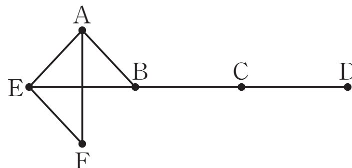
$F_n=9+(n-1)\times 3$

$\therefore F_{10}=9+9\times 3=36$

답 ③

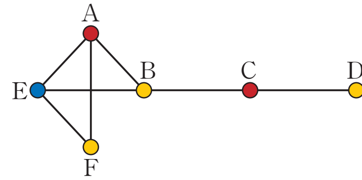
11 1단계 **표를 그래프로 나타낸다.**

각 기지국을 꼭짓점으로 하고 두 기지국 사이의 거리가 150 km 이내인 기지국을 나타내는 꼭짓점끼리 변으로 연결한다.



2단계 **그래프의 꼭짓점의 색칠 문제를 이용한다.**

최소의 색으로 구별하면 다음 그림과 같다.



따라서 무선 통신 회사가 확보해야 할 주파수의 최소 개수는 3개이다.

답 3개

12 1단계 **모든 경로의 이동 거리를 구한다.**

본사에서 출발하여 4개 지점을 모두 방문하고 본사로 돌아오는 모든 경로의 이동 시간은 다음과 같다.

본사→A→B→C→D→본사
본사→D→C→B→A→본사
: $7+4+6+9+3=29$(km)

본사→A→B→D→C→본사
본사→C→D→B→A→본사
: $7+4+10+9+5=35$(km)

본사→A→C→B→D→본사
본사→D→B→C→A→본사
: $7+6+6+10+3=32$(km)

본사→A→D→B→C→본사
본사→C→B→D→A→본사
: $7+8+10+6+5=36$(km)

본사→C→A→B→D→본사
본사→D→B→A→C→본사
: $5+6+4+10+3=28$(km)

본사→C→B→A→D→본사
본사→D→A→B→C→본사
: $5+6+4+8+3=26$(km)

2단계 **최적의 경로를 구한다.**

본사→C→B→A→D→본사
또는 본사→D→A→B→C→본사
의 순서로 방문할 때, 이동 거리가 최소이다.

3단계 **이동 거리의 최솟값을 구한다.**

따라서 이동 거리의 최솟값은
$5+6+4+8+3=26$(km)이다.

답 26 km